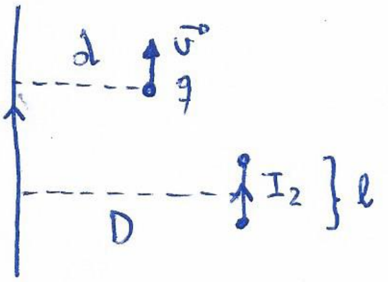
EJERCICIOS BÁSICOS de VECTORES y CAMPO $\vec{B}$

PEPE RÓDENAS BORJA

ENUNCIADOS:

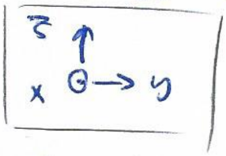
Sea un cable rectilíneo indefinido recorrido por una intensidad I tal como se indica en la figura:



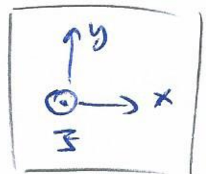
Calcula $\vec{B}$ y $\vec{F_m}$ sobre q y el trozo de cable en los casos siguientes:

a) $I_1 = 2$ A, $d = 15$ cm,
$v = 7$ m/s, $q = 4$ C
$I_2 = 3$ A, $D = 23$ cm, $l = 5$ cm,

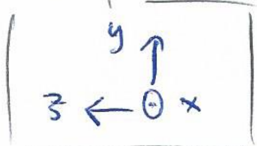
con los ejes cartesianos dispuestos como se indica a continuación:



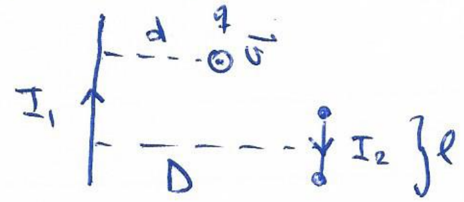
b) Repite los cálculos situando los ejes así:



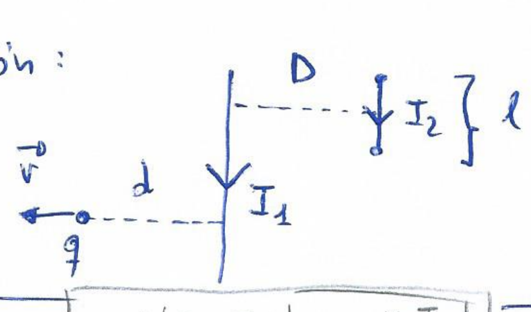
c) Repite los cálculos situando los ejes así:



d) Repite (a) para la siguiente configuración:

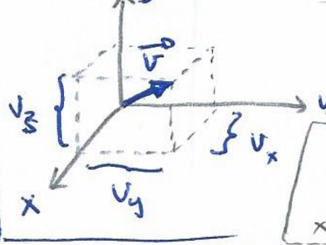


e) Repite (a) para la siguiente configuración:
tomando $\boxed{q = -1\ C}$



RESUMEN de ALGUNAS COSAS ÚTILES:

VECTORES:



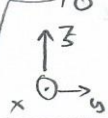
$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} : \quad (v_x, v_y, v_z)$$

PRODUCTO VECTORIAL:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k}.$$

$\vec{B}$ ⊙ I ⊗ $\vec{B}$ $\quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

6 Ejemplos sencillos: $(m > 0)$



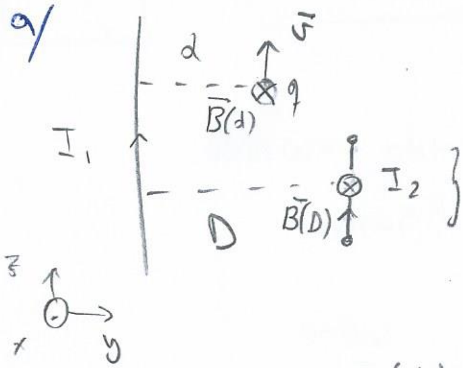
↑ + ↓ − $\vec{v}: (0, 0, \pm m)$
⊙ + ⊗ − $\vec{v}: (\pm m, 0, 0)$
→ + ← − $\vec{v}: (0, \pm m, 0)$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ T \cdot A^{-1} \cdot m$

RESOLUCIONES:

$I_1 = 2\,A \quad d = 0{,}15\ m \quad v = 7\ m/s \quad q = 4\ C$
$I_2 = 3\ A \quad D = 0{,}23\ m \quad l = 0{,}05\ m.$

a/



$\vec{B}(d) = (-B(d), 0, 0) = -B(d)\,\vec{i}$

$\vec{B}(D) = (-B(D), 0, 0) = -B(D)\,\vec{i}$

Cálculo de módulos:

$$B(d) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi \cdot 0{,}15} = 2{,}67 \cdot 10^{-6}\ T \qquad (1)$$

$$B(D) = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi \cdot 0{,}23} = 1{,}74 \cdot 10^{-6}\ T \qquad (2)$$

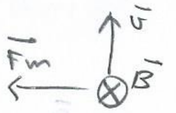
• CAMPOS:

$\Rightarrow$ (3) $\boxed{\vec{B}(d) = (-2'67, 0, 0)\cdot 10^{-6}\ T = -2{,}67\cdot 10^{-6}\,\vec{i}\ T}$ ($\vec{B}$ en la posición de la carga q).

(4) $\boxed{\vec{B}(D) = (-1'74, 0, 0)\cdot 10^{-6}\ T = -1{,}74\cdot 10^{-6}\,\vec{i}\ T}$ ($\vec{B}$ en la posición del trozo de hilo).

• FUERZAS:

CARGA q:



$q > 0$

$\boxed{\vec{F_m} = q\,\vec{v} \times \vec{B}}$

$\Rightarrow$ Abatiendo $\vec{v}$ sobre $\vec{B}$, aplicando la regla de la mano derecha, y considerando que q es positivo, obtenemos la siguiente dirección y sentido:

$$\vec{F_m}(q) = (0, -F_m(q), 0) = -F_m(q)\,\vec{j}$$

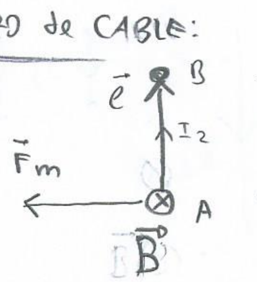
Cálculo del módulo: $\boxed{|\vec{F_m}(q)| = |q\,\vec{v}\times\vec{B}| = |q|\,v B \underbrace{\text{sen } 90°}_{=1} = |q|\,v B} \overset{[1]}{=}$

$= 4 \cdot 7 \cdot 2{,}67\cdot 10^{-6} = \boxed{7{,}48\cdot 10^{-5}\ N}$ (5')

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{F_m}(q) = (0, -7'48, 0)\cdot 10^{-5}\ N = -7{,}48\cdot 10^{-5}\,\vec{j}\ N}$ (5)

(Fuerza magnética sobre la carga q)

TROZO de CABLE:



$\vec{l}$: vector de longitud l (la del cable) que va del extremo A del cable al extremo B del cable en el sentido de la corriente:

$$\vec{l} = (0, 0, l)$$

$\boxed{\vec{F_m} = I_2\,\vec{l} \times \vec{B}}$ $\Rightarrow$ Abatiendo $\vec{l}$ sobre $\vec{B}$ obtenemos para la dirección y sentido: $\vec{F_m}(l) = (0, F_m(l), 0) = -F_m(l)\,\vec{j}$ (6')

Cálculo del módulo: $\boxed{|\vec{F_m}(l)| = |I_2\,\vec{l}\times\vec{B}| = I_2\, l B \text{ sen} 90° \overset{[2]}{=} 3 \cdot 0{,}05 \cdot 1{,}74\cdot 10^{-6} = 2{,}61\cdot 10^{-7}\ N}$

(6) $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{F_m}(l) = (0, -2'61, 0)\cdot 10^{-7}\ N = -2{,}61\cdot 10^{-7}\,\vec{j}\ N}$ Fuerza magnética sobre el cable l.

▶ Cálculo alternativo de las fuerzas: análisis del producto vectorial mediante el determinante:

$$\boxed{\bar{a} \times \bar{b} =} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$
$$\begin{matrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix}$$

"REGLA de SARRUS":

1º: copiamos abajo del determinante las dos filas primera y segunda.

2º: hacemos los productos de los elementos de las "tres diagonales" y los sumamos

3º: hacemos los productos de las tres antidiagonales y los sumamos:

4º: restamos: los "productos diagonales" menos los "antidiagonales".

$$= \left(\bar{i}\, a_2 b_3 + a_1 b_2 \bar{k} + b_1 \bar{j}\, a_3\right) - \left(b_1 a_2 \bar{k} + \bar{i}\, b_2 a_3 + a_1 \bar{j}\, b_3\right) =$$

$$\underset{\text{ordenado}}{\overset{\uparrow}{=}} \boxed{(a_2 b_3 - a_3 b_2)\bar{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\bar{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\bar{k}}.$$

En componentes:

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1).}$$

▶ Repetimos cálculo $\bar{F}_m(q)$ y $\bar{F}_m(\ell)$ con el determinante:

$$\boxed{\bar{F}_m(q) = q\,\bar{v} \times \bar{B}(d)} = 4 \cdot (0,0,7) \times (-2'67 \cdot 10^{-6}, 0, 0) = 4 \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 7 \\ -2'67 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

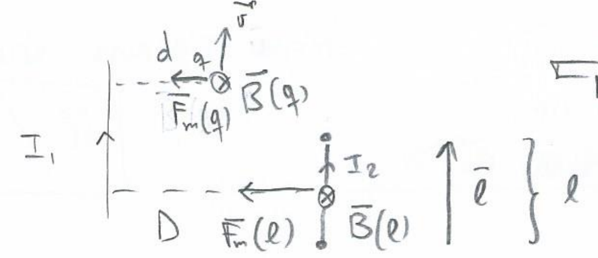
$(\bar{v} = (0,0,7)\ m/s\ \uparrow\bar{v})$

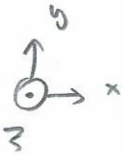
$$= 4 \cdot (-2{,}67 \cdot 10^{-6}\, \bar{j}\, 7) = \boxed{-7{,}48 \cdot 10^{-5}\, \bar{j}\ \ N}$$

$$\boxed{\bar{F}_m(\ell) = I_2\, \bar{\ell} \times \bar{B}(D)} = 3 \cdot (0,0,0'05) \times (-1'74 \cdot 10^{-6}, 0, 0) = 3 \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 0{,}05 \\ -1'74 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-1{,}74 \cdot 10^{-6}\, \bar{j}\, 0{,}05) = \boxed{-2{,}61 \cdot 10^{-7}\, \bar{j}\ \ N}$$

b/





⇒ Los módulos, que son las longitudes de los vectores, no cambian aunque cambiemos los ejes:

$B(q) = 2{,}67\cdot 10^{-6}$ T (7)

$B(\ell) = 1{,}74\cdot 10^{-6}$ T (8)

$F_m(q) = 7{,}48\cdot 10^{-5}$ N (9)

$F_m(\ell) = 2{,}61\cdot 10^{-7}$ N (10)

⇓ … con estos ejes:

[7]

$$\otimes\quad \boxed{\vec B(q) = (0,0,-B(q)) = -2{,}67\cdot 10^{-6}\,\vec k \text{ T}}$$
$$\otimes\quad \boxed{\vec B(\ell) = (0,0,-B(\ell)) = -1{,}74\cdot 10^{-6}\,\vec k \text{ T}} \quad (11)$$

[8]

$$\leftarrow\quad \boxed{\vec F_m(q) = (-F_m(q),0,0) = -7{,}48\cdot 10^{-5}\,\vec i \text{ N}}$$
$$\leftarrow\quad \boxed{\vec F_m(\ell) = (-F_m(\ell),0,0) = -2{,}61\cdot 10^{-7}\,\vec i \text{ N}} \quad (12)$$

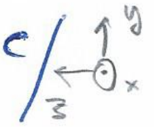
NOTA: antes hemos escrito $\vec B(d)$, "campo a distancia d", y ahora $\vec B(q)$, "campo sobre q" (o también: $\vec B(D)$ y $\vec B(\ell)$). Ambas formas son aceptables. Cabe recordar, sin embargo, que el valor del campo no depende de la carga o cable que siente sus efectos, sino tan sólo de quien lo crea (el hilo $\uparrow I_1$, y la distancia d ó D a él).

Con el determinante, $\vec v = (0,7,0)$ m/s y $\vec \ell = (0, 0'05, 0)$ m,

y hacemos:
$$\boxed{\vec F_m(q) = q\,\vec v\times\vec B(q) = q\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 0 & v & 0\\ 0 & 0 & -B(q)\end{vmatrix} = -q\,v\,B(q)\,\vec i = -7{,}48\cdot 10^{-5}\,\vec i \text{ N}} \quad (13)$$

$$\boxed{\vec F_m(\ell) = I_2\,\vec \ell\times \vec B(\ell) = I_2\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 0 & \ell & 0\\ 0 & 0 & -B(\ell)\end{vmatrix} = -I_2\,\ell\, B(\ell)\,\vec i = -2{,}61\cdot 10^{-7}\,\vec i \text{ N}} \quad (14)$$

c/



$$\Rightarrow\ \otimes\ \boxed{\vec B(q) = (-B(q),0,0) = -2{,}67\cdot 10^{-6}\,\vec i \text{ T}}$$
$$\otimes\ \boxed{\vec B(\ell) = (-B(\ell),0,0) = -1{,}74\cdot 10^{-6}\,\vec i \text{ T}} \quad (15)$$

→ con estos ejes, los campos no cambian respecto apartado (a): [3] y [4].

$$\leftarrow (16)\ \boxed{\vec F_m(q) = q\,\vec v\times\vec B(q) = q\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 0 & v & 0\\ -B(q) & 0 & 0\end{vmatrix} = q\cdot(-v(-B(q))\,\vec k) = q\,v\,B(q)\,\vec k = 7{,}48\cdot 10^{-5}\,\vec k \text{ N}}$$

$$\leftarrow (17)\ \boxed{\vec F_m(\ell) = I_2\,\vec \ell\times\vec B(\ell) = I_2\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 0 & \ell & 0\\ -B(\ell) & 0 & 0\end{vmatrix} = I_2\,\ell\,B(\ell)\,\vec k = 2{,}61\cdot 10^{-7}\,\vec k \text{ N}}$$

d/ Los campos son los mismos que en (a), pues no dependen de las cargas o corrientes que los sienten. Para las fuerzas:

$q\ \odot\vec v\ \otimes\vec B(q) \Rightarrow$ (18) $\boxed{\vec F_m(q) = q\,\vec v\times\vec B(q) = \vec 0}$ ← $\vec v$ y $\vec B(q)$ forman $\alpha = 180^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow F_m = |q|\,v\,B(q)\,\underbrace{\operatorname{sen}180^\circ}_{0} = 0$.

También, con el determinante:

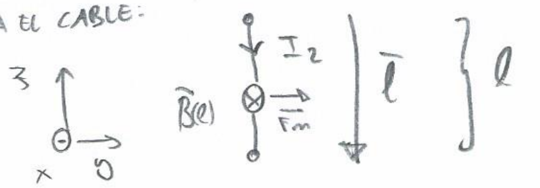
$\odot\ \vec v = (v,0,0)$

$\otimes\ \vec B(q) = (-B(q),0,0)$

$$\rightarrow \vec F_m(q) = q\,\vec v\times\vec B(q) = \begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ v & 0 & 0\\ -B & 0 & 0\end{vmatrix} = \vec 0.$$

(19)

PARA EL CABLE:



$$\boxed{\vec{F}_m(\ell) = I_2\, \vec{\ell} \times \vec{B}(\ell)} = (0,\ F_m(\ell),\ 0) \quad (*)$$

lo vemos con la regla de mano dcha.

$\vec{\ell} = (0, 0, -\ell)$ ✓ $\vec{\ell}$ está orientado como el trozo de cable con el sentido de la corriente I_2 que lo recorre (que ahora baja).

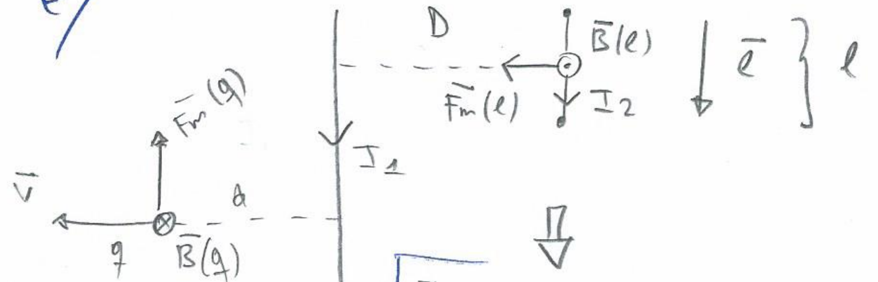
- Cálculo del módulo:

$$\boxed{F_m(\ell) = |I_2\, \vec{\ell} \times \vec{B}(\ell)| = I_2\, \ell\, B(\ell) \underbrace{\sin 90^\circ}_{=1}} = 3 \cdot 0{,}05 \cdot 1{,}74 \cdot 10^{-6} = \boxed{2{,}61 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T}}$$

$$[*] \Rightarrow \boxed{\vec{F}_m(\ell) = 2{,}61 \cdot 10^{-7}\, \vec{j}\quad \mathrm{T}} \quad (19)$$

NOTA: el módulo vuelve a salir el mismo, pero ahora la fuerza es repulsiva (lo cual era de esperar, pues es una fuerza entre cables recorridos por corrientes de sentidos opuestos).

e/



- Como los módulos de $\vec{B}$ sólo dependen de la I_1 y la distancia, vuelven a salirnos [1] y [2]. Su dirección es perpendicular al papel, y su sentido se deduce de la regla de la mano derecha con I_1: $\overset{\otimes}{\vec{B}}\ \downarrow_{I_1}\ \overset{\odot}{\vec{B}}$.

$$\boxed{\vec{B}(\ell) = (B(\ell), 0, 0)} = \boxed{1{,}74 \cdot 10^{-6}\, \vec{i}\quad \mathrm{T}} \quad (20)$$

$$\boxed{\vec{B}(q)} = (-B(q), 0, 0) = \boxed{-2{,}67 \cdot 10^{-6}\, \vec{i}\quad \mathrm{T}} \quad (21)$$

$$\boxed{\vec{F}_m(\ell) = I_2\, \vec{\ell} \times \vec{B}(\ell)} = I_2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\ell \\ B(\ell) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -I_2\, \ell\, B(\ell)\, \vec{j} =$$

$$= -3 \cdot 0{,}05 \cdot 1{,}74 \cdot 10^{-6}\, \vec{j} = \boxed{-2{,}61 \cdot 10^{-7}\, \vec{j}\quad \mathrm{N}}$$

$\left(\begin{array}{l} \vec{\ell} = (0, 0, -\ell) \downarrow \\ \vec{v} = (0, -v, 0) \leftarrow \end{array}\right)$

(Atractiva: como esperamos entre cables con mismo sentido de la corriente ↓ ↓.)

$$\boxed{\vec{F}_m(q) = q\, \vec{v} \times \vec{B}(q)} =$$

[ahora, $q = -1\,C$!!]

$$= q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -v & 0 \\ -B(q) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -q\,(-v)\cdot(-B(q))\, \vec{k} = -q\, v\, B(q)\, \vec{k} =$$

$$= +1 \cdot 7 \cdot 2{,}67 \cdot 10^{-6}\, \vec{k} = \boxed{1{,}87 \cdot 10^{-5}\, \vec{k}\quad \mathrm{N}}$$

(recordamos que las "antidiagonales" llevan signo menos).