

«CARACTERÍSTIQUES DELS VECTORS»

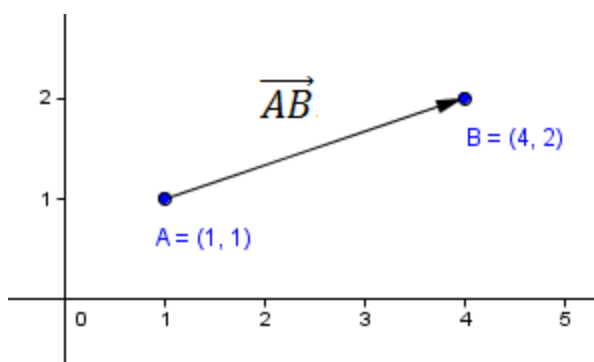
1. QUÈ ÉS UN VECTOR

Treballem en 2D, és a dir: al pla, on utilitzarem coordenades cartesianes per referir els seus punts.



Un **vector** és una fletxa que té el seu origen (“cua”) i el seu extrem (“punta”) fixats a dos punts del pla.

Per tant, si determinem les coordenades cartesianes (x_A, y_A) i (x_B, y_B) , de l'origen A i l'extrem B , determinem de manera **unívoca** de quin vector estem parlant, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.



2. CARACTERÍSTIQUES D'UN VECTOR

A banda dels punts “origen” i “extrem”, podem parlar d'alguns altres elements o característiques d'un vector qualsevol donat.

Així, tenim:

– Les **components**: la diferència de les coordenades cartesianes d'extrem i origen (“extrem menys origen”). Per exemple, al dibuix anterior les components del vector \overrightarrow{AB} serien: $(v_x, v_y) = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (3, 1)$.

– El **mòdul**: la longitud del segment que uneix l'extrem i l'origen. Si tenim les components, es pot calcular amb el teorema de Pitàgores. A l'exemple seria: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

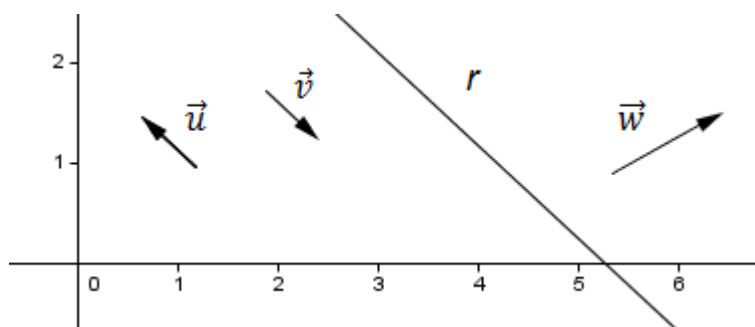
– L'**orientació**: ens diu cap a on *mira* el vector. Si construïm, per exemple, un vector de mòdul 2 i amb l'origen fixat al punt $(3, 4)$, encara tenim la

llibertat de triar cap a on mirarà: cap al Nord, cap al sud, cap al sud-est... Especificar l'orientació d'un vector és quelcom que sol crear dificultats conceptuals als estudiants. Quan ens referim a vectors, les paraules **orientació**, **direcció** i **sentit** signifiquen tres coses diferents molt precises. Per entendre-ho bé, és millor no pensar en el significat que aquestes paraules tenen en el llenguatge comú.



Especificar l'**orientació** d'un vector és equivalent a dir, alhora, la seua **direcció** i **sentit**.

– La **direcció** d'un vector queda determinada per qualsevol recta del pla paral·lela al segment que uneix l'origen i l'extrem del vector. Per exemple, la recta r del dibuix següent representa la direcció dels vectors \vec{u} i \vec{v} , però no del \vec{w} :



– El **sentit** d'un vector: només és possible especificar-lo si suposem que ja coneixem la seua direcció. Donada la recta que representa la direcció d'un vector, **existeixen dos possibles sentits**. Podem entendre'ls com les dues possibilitats que tindríem de caminar seguint la recta (“anada” i “tornada”, per exemple). Quina de les dues possibilitats expressa el sentit del vector? Recordem que un vector és una fletxa; així, el seu sentit seria la manera de caminar per la recta corresponent, tot “seguint la fletxa” (igual que fem quan passem pel camp i trobem un senyal indicador a una cruïlla). Per **exemple**: al dibuix anterior, caminar per la recta r cap amunt representaria el sentit del vector \vec{u} , i caminar cap avall representaria el sentit del \vec{v} . Amb la recta r no podem especificar el sentit de \vec{w} .

(Nota: al punt 5 recollim algunes maneres d'entendre millor que volen dir sentit i direcció).

3. MANERES D'ESPECIFICAR UN VECTOR

Hem dit que per especificar unívocament un vector cal determinar les coordenades del seu origen i el seu extrem. Aquesta no és la única manera possible. Vegem-ne algunes altres d'equivalents:

- Especificar l'origen, el mòdul, la direcció i el sentit.
- Especificar l'origen, el mòdul i l'orientació.
- Especificar l'origen i les components.

4. VECTORS FIXOS I VECTORS LLIURES

Fins ara hem parlat només d'un tipus de vectors anomenat **vectors fixos**, definits com una fletxa que va d'un origen a un extrem concrets en el pla. N'existeix un altre tipus, els **vectors lliures**. Podem definir-los, de manera abstracta, com l'objecte format només per un mòdul i una orientació. (Equivalentment, per unes components; o per un mòdul, una direcció i un sentit).

Podem visualitzar-los d'una manera una mica més concreta com a fletxes que "viuen" al pla, però, en comptes d'estar fixes, les podem canviar de lloc sempre que no modifiquem la seua orientació ni la seua longitud (mòdul).

Podem entendre físicament la diferència entre vectors fixos i vectors lliures pensant en **desplaçaments** i **velocitats**. Vegem el següent plànol de l'exemple barceloní:



El vector que hi indica el desplaçament entre els punts **A** i **B** té el mateix mòdul i orientació que el que hi indica el desplaçament entre els punts **C** i **D**. És evident, però, que no considerarem que tals vectors siguin iguals, perquè representen físicament dos desplaçaments diferents (entre llocs diferents!). Per tant, els desplaçaments cal representar-los amb **vectors fixos** al pla.

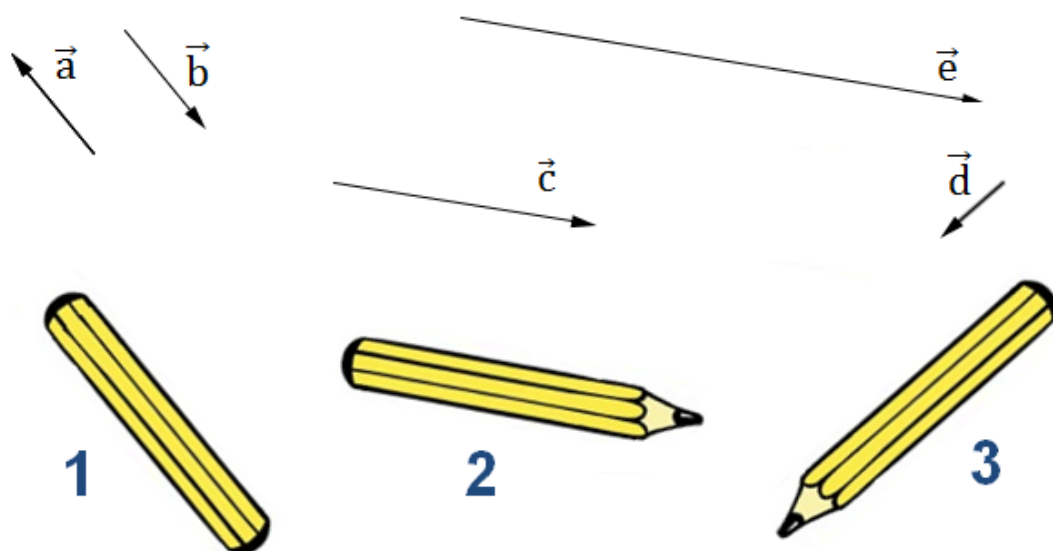
El vector que hi indica la velocitat del vehicle **m** i el que indica la del vehicle **n** no tenen l'origen ficat al mateix punt del pla, però els dos vehicles es mouen cap a l'oest a 40 km/h. Per tant, seria correcte dir que van exactament a la mateixa velocitat, i conseqüentment els vectors que la representen els podem considerar iguals. Així entenem que les velocitats cal representar-les amb **vectors lliures**.

Dels vectors fixos \overrightarrow{AB} i \overrightarrow{CD} del darrer plànol sí que podríem dir que, tot i no ser iguals, es corresponen amb el mateix vector lliure, volent dir que tenen el mateix mòdul, direcció i sentit.

5. PER APRENDRE A DISTINGIR MILLOR DIRECCIÓ I SENTIT

Anem a proposar una representació simbòlica de les direccions i les orientacions (és a dir: direcció + sentit). Veurem, com sempre, un vector com a una fletxa, i imaginarem que la seua **orientació** queda representada per un **llapis amb punta**, que ha de ser paral·lel a la vareta de la fletxa i la seua punta ha de apuntar cap a on aquesta apunta.

A la figura següent hem representat l'orientació del vector \vec{d} amb el llapis número **3**. Notem que la llargària del llapis no juga cap paper, perquè no parlem del mòdul.



Els vectors \vec{c} i \vec{e} tenen la mateixa orientació (és a dir: la mateixa direcció i sentit), i l'hem representada amb el llapis **2**.

Els vectors \vec{a} i \vec{b} tenen la mateixa direcció, però diferent sentit. Per a representar només la **direcció**, fem servir un **llapis sense punta**, que fiquem paral·lel a ambdues fletxes (el llapis **1**). Si volguérem, a més a més, representar-hi el sentit del vector \vec{a} , li hauríem de fer punta al llapis per la part de dalt. Si volguérem representar-hi el sentit del \vec{b} , hauríem de fer-li-la per baix.

Una altra manera d'entendre què és una **direcció**, seria pensar en una **via de tren** que uneix dues ciutats, **A** i **B**, en línia recta. Només mirant la via no sabem si un tren aniria cap a la ciutat **A** o cap a la **B**, però sí que sabem que la seua trajectòria no seria mai paral·lela a una recta que formara, per exemple, un angle de 35° amb la via.

Per entendre què és un **sentit**, podem pensar que en comptes d'una via de tren tenim **una carretera** unint les ciutats **A** i **B**. La carretera té dos carrils, un "per anar" i l'altre "per tornar". La carretera sencera representa una direcció; cadascun dels dos carrils representa els dos sentits associats a aquesta direcció.

Per acabar, donarem un exemple de com la influència del llenguatge comú ens dificulta ser matemàticament precisos quan parlem de direccions i sentits: quan un vaixell salpa de Mallorca cap al nord, solem dir que va "en direcció nord". Matemàticament, açò és incorrecte: la frase "el vaixell va cap al nord" està expressant tant la direcció com el sentit del vaixell. Si aquest isquera de Mallorca cap al sud, per exemple, tindria la mateixa direcció (però sentit oposat). Per especificar amb propietat la direcció d'ambdós vaixells, diríem que ve representada per la recta tangent en Mallorca al meridià que passa per Mallorca. Veiem, doncs, que aquest exemple és massa esvarós, i no convé emprar-lo per plantejar exercicis a secundària, ni prendre'l com a imatge mental per recordar què volen dir direcció i sentit.