E. Pia Sabadell
2n Batx. 2013/14
MATES - soc.

MATRIUS

NOM: Gemma B.

$$k\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka & kb\\ kc & kd\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}6 & 7\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}6 & 2 & 3\\ 7 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

tasca personal

ESCOLA PIA SABADELL	Data: *12 d'abril de 2014*
Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials	*Instruccions i Sumari*
Matrius: Tasca personal de Setmana Santa	Curs: 2n Bat.

Instruccions per a fer i presentar aquesta tasca:

i) Cal presentar-la obligatòriament al principi de la primera classe de Matemàtiques en tornar de les vacances, això és: dimarts 22 d'abril a les 12:45 hores.

ii) Comptarà el 20% de la nota de l'examen del tema, tret de dues excepcions. La primera: si considerar la nota de la tasca baixés la nota de l'examen, es prendria només la nota de l'examen. La segona: si l'examen està suspès (nota inferior a cinc sobre deu), la nota de la tasca no es considerarà.

iii) Per a fer la tasca, podeu consultar uns resums que vaig penjar la setmana passada al meu web:

http://manifoldo.weebly.com/uploads/2/0/7/8/20783898/m2_matrius_endoll_gauss_operacions.pdf

Hi teniu tres resums: el 1r té una explicació detallada de la tècnica de l'endoll per a multiplicar matrius; el 2n té una explicació detallada, i amb exemples, del mètode de Gauss per a triangular matrius; el 3r, totes les altres operacions que hem vist a classe, amb les seves propietats més importants.

iv) Tot seguit teniu els enunciats de les tasques. Hi ha quatre tipus d'exercicis, com es pot veure al sumari del final d'aquesta pàgina. Al final, hi ha les solucions. Podeu fer-les servir per a controlar que aneu fent bé els exercicis, i de vegades també hi trobareu alguns petits comentaris, útils per a entendre millor allò que heu calculat.

v) Cal presentar la resolució detallada de tots els exercicis. Això vol dir, per exemple, que si feu un producte de dues matrius, no heu de ficar només el resultat: com a mínim hauríeu de presentar un pas intermedi. Això és especialment important en els exercicis de triangulació, on el resultat del procés no és únic; llavors, caldrà que anoteu, com a mínim, quines operacions feu amb les files, i com queda la matriu després de cada pas. (Podeu fer-ho de manera semblant a com està al resum, amb allò de $f_2 \to 2f_2 - 3f_3$, etc.).

Sumari de continguts:

A1. Comprova la següent equació matricial. Per a fer-ho, has de fer les operacions indicades i després comparar els resultats que trobes a cada costat de l'igual. L'equació serà certa si dóna la mateixa matriu als dos costats.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 64 \\ -17 & -28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

A2. Comprova aquesta propietat de la transposició de matrius: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$, és a dir, que "la transposada del producte és igual al producte de les transposades en ordre invers". Fes-ho amb les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

A3. Comprova la propietat associativa del producte de matrius:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Fes-ho amb les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 19 & 0 \\ 14 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A4. Comprova la propietat distributiva del producte de matrius respecte de la suma de matrius:

a) per l'esquerra: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

b) per la dreta: $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$

Fes-ho amb les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

A5. Sigui la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcula el resultat de fer $(A + 2 \cdot I)^2$, sent-hi I la matriu identitat 2x2. (Nota: la segona potència d'una matriu quadrada M qualsevol es calcula així: $M^2 = M \cdot M$).

B1. Trobar la matriu inversa d'una matriu quadrada A resulta molt útil en diversos contexts, però en general és un procediment laboriós, i no sempre és possible. Existeix, però, una excepció: les matrius 2x2. Si tenim una matriu A amb els següents elements

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

definim el seu "determinant" com la quantitat: $\Delta = a \cdot d - c \cdot b$ (el producte dels elements de la diagonal principal menys el producte dels de l' "antidiagonal"). La matriu es podrà invertir sempre que el seu determinant sigui diferent de zero, $\Delta \neq 0$, i la matriu inversa es calcularà amb la següent fórmula:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Troba amb la darrera fórmula la matriu inversa de la següent matriu 2x2, i comprova que realment és la inversa fent els productes $A \cdot A^{-1}$ i $A^{-1} \cdot A$:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

B2. Troba la matriu inversa de la següent matriu:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

B3. Troba la matriu inversa de la següent matriu diagonal:

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

B4. Ja sabem que un sistema d'equacions es pot reescriure utilitzant un llenguatge matricial. Per exemple,

$$\begin{cases} 2x - 4y = -8 \\ x - 3y = -7 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{AX = D}$$

Si trobem la matriu inversa de la matriu A dels coeficients del sistema, A^{-1}, podem resoldre la darrera equació matricial multiplicant-la per l'esquerra per A^{-1}, és a dir: $A^{-1}AX = A^{-1}D \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}D}$ (recordem que $A^{-1}A = I$, i multiplicar per la matriu identitat I és com no fer res: és l' "element neutre" del producte de matrius).

Resol el sistema del darrer exemple utilitzant aquest mètode.

C1. Triangula, utilitzant el mètode de Gauss, les següents matrius 2x2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

C2. Triangula, utilitzant el mètode de Gauss, les següents matrius 3x3:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -3 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

C3. Triangula, utilitzant el mètode de Gauss, les següents matrius 2x3:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

D1. [*Inspirat en PAU juny'12, sèrie 3, problema 3*]

Siguin les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Justifica si és possible efectuar $A \cdot B$ ó $B \cdot A$. Quan sigui possible, calcula-ho.

b) Calcula B^2 i B^3.

D2. [*Inspirat en PAU setembre'12, sèrie 4, problema 6*]

Donades les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Troba una matriu X tal que $A \cdot B + X = C$

b) Calcula C^3.

D3. [*Inspirat en PAU juny'11, sèrie 1, problema 4*]

Considera la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Una matriu B, que té dues columnes, compleix que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$. Quantes files té B? Explica per què.

b) Troba la matriu B sabent que la seva primera fila és $(1 \quad 0)$.

D4. [*Inspirat en PAU juny'12, sèrie 1, problema 6*]

Siguin les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determina les matrius X i Y tals que $X - 2Y = A$ i $2X - Y = B$.

S.A1 Quan fem totes les operacions trobem als dos costats de l'igual la mateixa matriu com a resultat, $\begin{pmatrix} -7 & -39 \\ 14 & 29 \end{pmatrix}$. Per tant, l'equació és certa.

S.A2 Fent les operacions d'una i altra manera arribem sempre al mateix resultat, $\begin{pmatrix} -4 & 19 & -30 \\ -5 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. Per tant, comprovem la propietat.

Observació: Intuïtivament, hom podria tendir a pensar que $(A \cdot B)^t$ ha de ser igual a $A^t \cdot B^t$. Raonant en termes de les dimensions de les matrius, però, veiem que això no pot ser veritat: pensem en les dimensions les A i B del nostre cas, 3x2 i 2x2 respectivament. Les dimensions de les seves transposades són, per tant, respectivament 2x3 i 2x2, i aquestes matrius no "s'endollen" bé en l'ordre $A^t \cdot B^t$. (Contràriament, sí que s'endollen bé en l'ordre $B^t \cdot A^t$).

S.A3 El resultat és el mateix als dos costats de l'igual, $\begin{pmatrix} -75 & -1 \\ -23 & 1 \end{pmatrix}$. Per tant, comprovem la propietat.

S.A4 **a)** esquerra: dóna $\begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ als dos costats.

b) esquerra: dóna $\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$ als dos costats.

Per tant, comprovem la propietat. Observació: amb aquest exercici també comprovem que el producte de matrius no és, en general, commutatiu.

S.A5 $(A + 2 \cdot I)^2 = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 9 & 26 \end{pmatrix}$

S.B1 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$. Els dos productes indicats donen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, la matriu identitat. Per tant, comprovem que, efectivament, la matriu que hem trobat és la inversa de A.

S.B2 $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

S.B3 $C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

S.B4 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -2 \\ 0{,}5 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}D = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -2 \\ 0{,}5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

S.C1, **S.C2** i **S.C3**: Atès que el resultat de triangular una mateixa matriu no és únic, no oferim solucions per a aquests tres exercicis. Sí que indicarem, però, que totes les matrius proposades tenen el que hom coneix com a "rang màxim", la qual cosa vol dir que en el resultat de la triangulació és impossible que quedi cap fila que només tingui zeros. Això pot servir, doncs, per a fer una comprovació parcial.

S.D1 **a)** Només és possible efectuar $B \cdot A$, doncs les matrius han d' "endollar-se" bé per a que es puguin multiplicar, és a dir: el nombre de columnes de la primera ha de ser igual al nombre de files de la segona. Resultat: $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 20 \end{pmatrix}$.

b) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & -31 \\ 0 & 125 \end{pmatrix}$.

S.D2 **a)** $X = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

S.D3 **a)** B tindrà tres files, doncs és l'única manera en què podrà "endollar-se" bé amb A (el producte de dues matrius només està definit quan el nombre de columnes de la primera és igual al nombre de files de la segona).

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3{,}5 \\ 2 & 1{,}5 \end{pmatrix}$

S.D4 $X = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Gemma
Bosch
Martínez

MATRIUS: TASCA PERSONAL

A1.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 64 \\ -17 & -28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$* \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot(-1)+1\cdot 0+3\cdot 1 & 4\cdot 0+1\cdot 1+3\cdot 8 \\ 3\cdot(-1)+1\cdot 0+0\cdot 1 & 3\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 25 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 25 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 64 \\ -17 & -28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -39 \\ 14 & 29 \end{pmatrix}$$

$$* \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -9 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & -9 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\cdot(-1)+4\cdot 2+(-9)\cdot 2 & (-3)\cdot 4+4\cdot 0+(-9)\cdot 3 \\ 2\cdot(-1)+1\cdot 2+7\cdot 2 & 2\cdot 4+1\cdot 0+7\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -39 \\ 14 & 29 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & -39 \\ 14 & 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -39 \\ 14 & 29 \end{pmatrix}$$

R\\ Després de fer totes les operacions, trobem la mateixa matriu als dos costats, per tant, llequació és certa.

A2.

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right]^t = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}^t$$

$$* \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 6+2\cdot 1 & (-1)\cdot(-1)+2\cdot(-3) \\ 3\cdot 6+1\cdot 1 & 3\cdot(-1)+1\cdot(-3) \\ (-5)\cdot 6+0\cdot 1 & (-5)\cdot(-1)+0\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 19 & -6 \\ -30 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{t} \begin{pmatrix} -4 & 19 & -30 \\ -5 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$* \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}^t$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cdot(-1)+1\cdot 2 & 6\cdot 3+1\cdot 1 & 6\cdot(-5)+1\cdot 0 \\ (-1)\cdot(-1)+(-3)\cdot 2 & (-1)\cdot 3+(-3)\cdot 1 & (-1)\cdot(-5)+(-3)\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 19 & -30 \\ -5 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

R\\ Arribem al mateix resultat, per tant, comprovem la següent propietat: $(A\cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

A3. Propietat associativa $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

* $(A \cdot B) \cdot C \longrightarrow \left[\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 19 & 0 \\ 14 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -75 & -1 \\ -23 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-1) & (-1) \cdot 1 & 4 \cdot 5 + (-1) \cdot 5 \\ 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 & 3 \cdot 5 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 15 \\ -3 & 1 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 15 \\ -3 & 1 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 & 0 \\ 14 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4) \cdot 19 + (-1) \cdot 14 + 15 \cdot 1 & (-1) \cdot 1 \\ (-3) \cdot 19 + 1 \cdot 14 + 20 \cdot 1 & 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -75 & -1 \\ -23 & 1 \end{pmatrix}$$

* $A \cdot (B \cdot C) \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 & 0 \\ 14 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -75 & -1 \\ -23 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 & 0 \\ 14 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 19 + 5 \cdot 1 & 0 \\ 1 \cdot 14 + 5 \cdot 1 & 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 19 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 19 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-14) + (-1) \cdot 19 & (-1) \cdot 1 \\ 3 \cdot (-14) + 1 \cdot 19 & 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -75 & -1 \\ -23 & 1 \end{pmatrix}$$

R// El resultat és el mateix, per tant, hem pogut comprovar la propietat associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

A4. a) per l'esquerra

* $A \cdot (B + C) \longrightarrow \begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3) \cdot 1 + (-8 \cdot 1) & 0 \\ 1 \cdot 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* $A \cdot B + A \cdot C \longrightarrow \begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A \cdot B) \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3) \cdot (-1) & (-8) \cdot 1 \\ 0 & 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot C) \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3) \cdot 2 + (-8) \cdot 1 & (-8) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC \quad \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

R// Dóna el mateix resultat, per tant, comprovem la propietat distributiva.

Gemma

b) Per la dreta

* $(B+C)\cdot A \longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-3) & 1\cdot(-8) \\ 1\cdot(-3) & 1\cdot(-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$

* $B\cdot A + C\cdot A \longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$

$$B\cdot A \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot(-3) & (-1)\cdot(-8) \\ 0 & 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C\cdot A \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-3) & 2\cdot(-8) \\ 1\cdot(-3) & 1\cdot(-8)+(-1)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -16 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$BA+CA \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -16 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$

R\\ Trobem el mateix resultat, per tant, comprovem la propietat distributiva.

A5. Calcula $(A+2\cdot I)^2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 4 + 1\cdot 1 & 4\cdot 1 + 1\cdot 5 \\ 1\cdot 4 + 5\cdot 1 & 1\cdot 1 + 5\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 9 & 26 \end{pmatrix}$$

R\\ $(A+2\cdot I)^2 = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 9 & 26 \end{pmatrix}$

B1. $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\Delta = (6 \cdot (-4)) - (5 \cdot (-5)) = 1$

$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad \boxed{A^{-1}} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

* $A \cdot A^{-1}$

$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot (-4) + (-5) \cdot (-5) & 6 \cdot 5 + (-5) \cdot 6 \\ 5 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-5) & 5 \cdot 5 + (-4) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

m. identitat.

* $A^{-1} \cdot A$

$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4) \cdot 6 + 5 \cdot 5 & (-4) \cdot (-5) + 5 \cdot (-4) \\ (-5) \cdot 6 + 6 \cdot 5 & (-5) \cdot (-5) + 6 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

m. identitat

R\\ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

Els dos productes $(A \cdot A^{-1}$ i $A^{-1} \cdot A)$ donen com a resultat la matriu identitat, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per tant, comprovem que la matriu inversa de A que hem trobat, és correcta.

B2. Matriu inversa de $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\Delta = (0 \cdot 0) - (1 \cdot (-1)) = 1$

$B^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

R\\ La matriu inversa de B és $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = B^{-1}$.

B3. Matriu inversa de $C = \begin{pmatrix} 0'5 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

$\Delta = (0'5 \cdot 1/3) - (0 \cdot 0) = 0'1\widehat{6}$

$C^{-1} = \frac{1}{0'1\widehat{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 0'5 \end{pmatrix}$ $\quad C^{-1} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 0'5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 1/3 & 6 \cdot 0 \\ 6 \cdot 0 & 6 \cdot 0'5 \end{pmatrix}$

$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

R\\ La matriu inversa de C és $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = C^{-1}$.

Gemma

B4. $\begin{cases} 2x - 4y = -8 \\ x - 3y = -7 \end{cases} \longleftrightarrow \underset{A}{\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}} \underset{X}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \underset{D}{\begin{pmatrix} -8 \\ -7 \end{pmatrix}} \longleftrightarrow \boxed{AX = D}$

* A^{-1}

$$\Delta = (2 \cdot (-3)) - (1 \cdot (-4)) = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -0'5 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0'5 \cdot (-3) & -0'5 \cdot 4 \\ -0'5 \cdot (-1) & -0'5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1'5 & -2 \\ 0'5 & -1 \end{pmatrix}$$

* $X = A^{-1} D$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1'5 & -2 \\ 0'5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1'5 \cdot (-8) + (-2) \cdot (-7) \\ 0'5 \cdot (-8) + (-1) \cdot (-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

R\\\ La matriu inversa de A és $\begin{pmatrix} 1'5 & -2 \\ 0'5 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$.

La solució del sistema és: $x = 2$ i $y = 3$.

C1. Triangula matrius 2x2.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \to f_2 - 4f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rcc} -4f_1: & -4 & -4 \\ f_2: & 4 & 9 \\ \hline & 0 & 5 \end{array}$$

- $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \to f_2 + 4f_1} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rcc} 4f_1: & -8 & 16 \\ f_2: & 8 & -3 \\ \hline & 0 & 13 \end{array}$$

C2. Triangula matrius 3x3.

B

• $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \to f_2 + f_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ ✓

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 + 2f_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$ ✓

$2f_1:\ 6\ \ 2\ \ 0$
$f_3:\ -6\ \ 1\ \ 0$
$\overline{\ \ 0\ \ 3\ \ 0\ \ }$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 - 1'5 f_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4'5 \end{pmatrix}$$ ✓

$-1'5 f_2:\ 0\ \ -3\ \ 4'5$
$f_3:\ 0\ \ 3\ \ 0$
$\overline{\ \ 0\ \ 0\ \ 4'5\ \ }$

1 error.

• $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -3 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -3 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \to f_2 - 3f_1} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 0 & -23 & 9 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ ✓ ✓

$-3f_1:\ -3\ -24\ \ 9$
$f_2:\ 3\ \ 1\ \ 0$
$\overline{\ \ 0\ -23\ \ 9\ \ }$

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 0 & -23 & 9 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 - 5f_1} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 0 & -23 & 9 \\ 0 & -39 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_2 - f_3} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 0 & -23 & 9 \\ 0 & 16 & -6 \end{pmatrix}$$ ✓ ✓

$-5f_1:\ -5\ -40\ \ 15$
$f_3:\ 5\ \ 1\ \ 0$
$\overline{\ \ 0\ -39\ \ 15\ \ }$

$+4f_2:\ 0\ \ -16\ \ 6'24$
$f_3:\ 0\ \ 16\ \ -6$
$\overline{\ \ 0\ \ 0\ \ 0\cancel{'24}\ \ }$

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 0 & -23 & 9 \\ 0 & 16 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 = \frac{f_2}{5'75}} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 0 & -4 & 1'56 \\ 0 & 16 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 + 4f_2} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 0 & -4 & 1'56 \\ 0 & 0 & \cancel{12'24}\ 0'24 \end{pmatrix}$$ ✓

6

Gemma

C3. Triangula matrius 2x3.

- $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \to f_2+f_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

f_1: $1 \ -2 \ 1$
f_2: $-1 \ 1 \ 7$
$0 \ -1 \ 8$

- $N = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \to f_2-6f_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 0 & 19 & -53 \end{pmatrix}$$

$-6f_1$: $-6 \ 12 \ -54$
f_2: $6 \ 7 \ 1$
$0 \ 19 \ -53$

D1. a) És possible efectuar A · B o B · A? Quan sigui possible, calcula-ho.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

R// Només és possible efectuar B · A, ja que el nombre de columnes de la primera ha de ser igual al nombre de files de la segona.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1 & 1\cdot(-1) & 1\cdot 3 + (-1)\cdot 4 \\ 5\cdot 1 & 0 & 5\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

b) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 & 1\cdot(-1)+(-1)\cdot 5 \\ 0 & 5\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$

$B^3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}_{B^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 & 1\cdot(-1)+(-6)\cdot 5 \\ 0 & 25\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -31 \\ 0 & 125 \end{pmatrix}$

D2. a) Troba la matriu X tal que $A \cdot B + X = C$

$A \cdot B$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot(-1)+1\cdot 1 \\ (-1)\cdot 2+(-1)\cdot(-1) & (-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot 2+2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$AB - C$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

$-X$

$AB - C = -X \longrightarrow X = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $C^3 = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} (-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot 2 & (-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot 1 \\ 2\cdot(-1)+1\cdot 2 & 2\cdot(-1)+1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot(-1) & (-1)\cdot(-1) \\ (-1)\cdot 2 & (-1)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Gemma

03. a) En aquest cas B tindrà tres files, ja que la única manera que es puguin multiplicar A i B és que el nombre de columnes de A sigui igual al nombre de files de B. ✓

Només s'ha comprovat la solució oferida pels enunciats

b) Troba la matriu B. La seva primera fila és (1 0).

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

GEMMA: mira la pàgina següent, t'hi fico com es resol

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

* No se quin és el procediment exacte que s'ha de seguir per trobar una matriu com en aquest cas.

$(-1)\cdot 1 + 1\cdot 4 + 1\cdot 2 = 5$

$(-1)\cdot 0 + 1\cdot(-3'5) + 1\cdot 1'5 = -2$

R// La matriu B és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3'5 \\ 2 & 1'5 \end{pmatrix} = B$

Aquest problema, efectivament, es resol treballant amb aquestes dues equacions matricials com si fossin equacions de números

04. Determina les matrius X i Y tals que $X - 2Y = A$ i $2X - Y = B$.

B. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

només hem d'aïllar X i Y en el sistema! Fem-ho:

$2X - Y = B \rightarrow Y = 2X - B$ (*)

$\rightarrow X = A + 2Y = A + 4X - 2B \rightarrow$

$\rightarrow 2B - A = (4-1)X = 3X$

$\rightarrow \boxed{X = \frac{1}{3}(2B - A)}$

$[*] \rightarrow \boxed{Y = \frac{2}{3}(2B-A) - B =}$

$= \cdots = \boxed{\frac{1}{3}(B - 2A)}$ B

$$X = \frac{1}{3}(2B - A) \longrightarrow 2B - A$$

$$Y = \frac{1}{3}(B - 2A)$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$ ✓

$$\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$ ✓

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$ ✓ → X ✓

B − 2A

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -4 & -16 \end{pmatrix}$$ ✓

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -4 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$$ ✓

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$ ✓

Comprovem:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$ ✓

▶ Resolució del $\boxed{D3}$:

Les nostres incògnites són els 4 llocs que falten de la matriu B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

Fem el producte de matrius $A \cdot B$ amb aquestes incògnites i igualem amb la matriu $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, segons ens diu l'enunciat:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1+x+z & y+w \\ 1+x-z & y-w \end{pmatrix}}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}}$$

... Reescrivim ara aquesta igualtat matricial element a element, i això ens duu al següent sistema d'equacions (4 eqs., 4 incogns.):

$$\begin{cases} -1 + x + z = 5 \\ 1 + x - z = 3 \\ y + w = -2 \\ y - w = -5 \end{cases}$$

sumem les eqs: $2x = 8 \rightarrow \boxed{x = 4}$

$\boxed{z} = 1 + x - 3 = 5 - 3 = \boxed{2}$

sumem les eqs: $2y = -7 \rightarrow \boxed{y} = -\frac{7}{2} = \boxed{-3{,}5}$

$\boxed{w = y + 5} = -3{,}5 + 5 = \boxed{1{,}5}$

... solucionant-lo, trobem els números x, y, z i w que necessitem:

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3{,}5 \\ 2 & 1{,}5 \end{pmatrix}}$$

■