RELATIVITAT i ESPAI-TEMPS

1. Guió esquemàtic de la classe

► **QUÈ ÉS LA RELATIVITAT?** —> és una teoria sobre la descripció del moviment.

- Conceptes **teòrics** fonamentals
  - el **temps propi**
  - **equivalència** entre **massa** i **energia**
  - **equacions de camp** d'Einstein
- Fenòmens **experimentals** fonamentals:
  Les **PARADOXES DELS BESSONS**
  - la *inercial*
  - la *gravitatòria*

► **COM ES DESCRIU el MOVIMENT en RELATIVITAT?**

- punt de vista **experimental**: els **SRI** en Relativitat (*Sistemes de Referència Inercials*)
- punt de vista **matemàtic**: **L'ESPAI-TEMPS**

► **LA "RELATIVITAT GENERAL"** —> la gravitació vista com a curvatura de l'espai-temps.

2. El temps propi. Els SRI de la RE. Les dilatacions temporals

► El **temps propi**, en Relativitat[1], és la magnitud física més important, i a partir de la qual podem entendre totes les diferències bàsiques entre la teoria de Newton i la teoria d'Einstein[2].

El **temps propi** associat a una partícula es pot veure com el temps que mesura el rellotge d'un observador que viatja sempre al costat d'aquesta partícula. Hi ha diferents maneres equivalents d'entendre el temps propi: podem associar-lo al ritme de marxa d'un rellotge, com hem dit, o també al ritme de desintegració d'un conjunt de nuclis radioactius, o al ritme al que envelleix una persona, o al ritme al que li creix la barba a un home. Sempre es tracta de fenòmens físics amb entitat pròpia i que no admeten més que un significat: per això, al temps propi se li diu també, de vegades, "**temps físic**".

---

[1] Amb "RE" voldrem dir "Relativitat Especial"; "RG" vol dir "Relativitat General".

[2] Tret del que respecta a l'equivalència entre massa i energia, que Einstein va introduir com un postulat addicional, basant-se en certs arguments de plausibilitat. Nosaltres, de moment, deixarem de banda aquesta equivalència i els seus arguments.

Per una altra banda, pel que fa a les equacions de camp, que ens diuen la manera matemàtica concreta amb que la gravitació deforma l'espai-temps, és veritat que també s'han d'introduir en la teoria com a hipòtesi addicional, però igualment és veritat que la seva forma concreta no altera essencialment les característiques de la Relativitat que la fan diferent de la teoria newtoniana. Per això, i deguda la seva elevada complexitat matemàtica, tampoc no hi entrarem.

Habitualment, el **temps propi** es representa amb la lletra grega tau, τ.

Existeix un altre tipus de temps en Relativitat: el **temps coordenat**, que es representa amb la lletra t llatina. Aquest temps no es correspon necessariament amb el temps propi de cap partícula o observador. Per això, no és té una fàcil interpretació en termes d'un fet físic clar i indubtable, com ara el ritme al que es desintegra una mostra radioactiva o al que creix una barba. En realitat, **el temps coordenat és un artifici matemàtic** que fem servir per tal de descriure el moviment d'una partícula des del punt de vista d'un **SRI**.

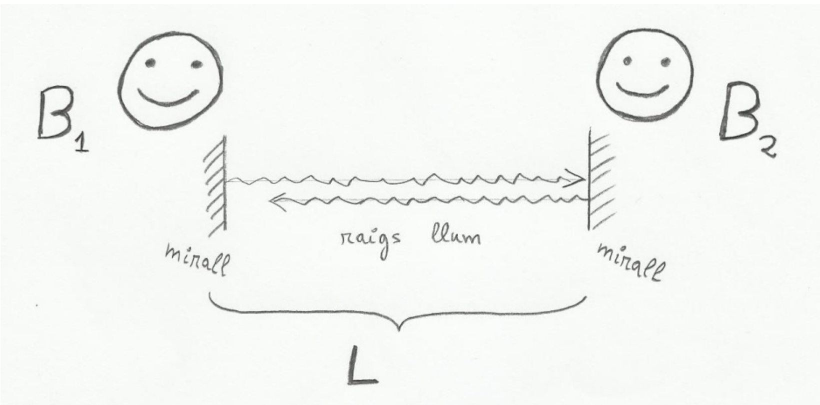
El motiu d'haver de precisar les diferències entre tots aquests tipus de temps és que en Relativitat, i al contrari del que ocorre en la teoria de Newton, la marxa dels temps propis de partícules diferents no té per què estar sincronitzada, ni tampoc amb la marxa del temps coordenat. Per això es diu, sovint, que **el concepte** newtonià **de "temps absolut" s'ha d'abandonar** quan acceptem la Relativitat.

► Siguin dos observadors, B_1 i B_2 , sobre els que suposarem que no actua cap força, ni tan sols la gravitatòria. Això vol dir que es tracta de **dos observadors** "**inercials**" de la Relativitat Especial[3].

B_1 i B_2 fan servir uns miralls per intercanviar constantment un raig de llum que va i torna de l'un a l'altre, de manera que ambdós observadors comproven, emprant els seus rellotges, que entre la sortida del raig i la següent recepció transcorre sempre el mateix interval de temps, *T*. Per això poden saber que la distància *L* que els separa roman fixa. Aquesta distància val

$$L = \frac{1}{2} \cdot cT$$

on $c = 300\,000$ km/s és la velocitat de la llum. Direm, llavors, que B_1 i B_2 es troben en repòs relatiu.

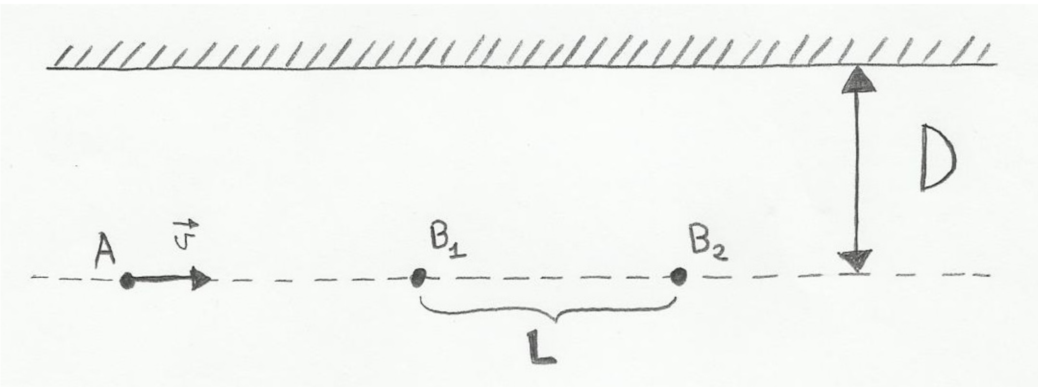


[3] La teoria de la Relativitat se sol separar en dos parts: la Relativitat Especial i la Relativitat General. La primera consisteix en la descripció relativista del moviment en absència de gravitació, i la segona ens diu com descriure el moviment quan hi ha present un camp gravitatori. En conseqüència, en realitat la Relativitat General inclou l'Especial com a cas particular.

Fent servir els raigs que intercanvien, B_1 i B_2 **poden posar en sincronia els seus rellotges**: per exemple B_1 pot emetre un raig blau en un moment donat, alhora que fica el seu rellotge a zero, i B_2 ja sap que el seu rellotge ha de indicar un temps igual a $T/2$ quan rebi aquest raig blau. D'aquesta manera, ambdós rellotges estaran adientment sincronitzats per poder començar l'experiment que descriurem una mica més avall.

► Per fer l'experiment, imaginarem que hi ha un **gran mirall paral·lel** a la recta que uneix les posicions que ocupen els observadors B_1 i B_2 , i que aquest mirall està a una distància *D* de qualsevol dels dos. Evidentment, la manera en que B_1 i B_2 han mesurat aquesta distància, així com la tècnica que usen per controlar que romangui constant al llarg del temps, consisteix en llançar de tant en tant raigs de llum contra el gran mirall, i cronometrar el temps que triguen en ser reflectits i tornar. Si aquest temps sempre és el mateix, el mirall estarà a distància constant. Aquesta distància és la meitat de la velocitat de la llum multiplicada pel temps d'anada i tornada.

Suposem també que un tercer observador, A , s'acosta a velocitat constant cap a B_1 per l'esquerra, tot seguint la recta que uneix a B_1 i B_2 .



Arribats aquí, cal fer-hi un parell de precisions: quan diem que A va "a velocitant constat", s'hi ha d'afegir quelcom: a velocitat constant si referim el seu moviment al SRI format per B_1 i B_2 .

En realitat, per parlar amb més rigor hauríem de dir: "si referim el seu moviment al **SRI del qual formen part B_1 i B_2**".

Per què? Perquè per poder observar el moviment de A , que té lloc al llarg de la recta que uneix B_1 i B_2 , i garantir que, efectivament, aquest moviment té lloc a velocitat constant, en realitat hauríem d'haver omplert prèviament tota aquesta recta amb un munt d'observadors semblants als nostres B_1 i B_2 , tots ells en repòs relatiu els uns amb els altres, i que anessin intercanviant constantment raigs de llum amb els seus veïns immediats, per tal de poder garantir que les distàncies entre ells no s'han anat modificat. Tots aquests observadors tindrien sincronitzats els seus rellotges amb el mateix mètode que abans hem dit que empraven B_1 i B_2 , i així podrien certificar que A va a velocitat constant. Cada parella d'observadors veïns, a distància δ , mesuraria el temps Δt que triga A en anar de l'un a l'altre, i dividiria δ entre Δt , veient que aquesta divisió dóna sempre el mateix.

Direm que tots aquests observadors en repòs relatiu respecte de B_1 i B_2 són **els *operaris* d'un SRI**, al qual B_1 i B_2 pertanyen. (B_1 i B_2 també són operaris d'aquest SRI). Podríem veure, doncs, aquest **SRI com una empresa**, en la qual treballen un munt d'operaris que estan en repòs entre sí, i estan constantment intercanviant raigs de llum per controlar que les seves distàncies relatives es mantinguin constants i que els seus rellotges estiguin ben sincronitzats.

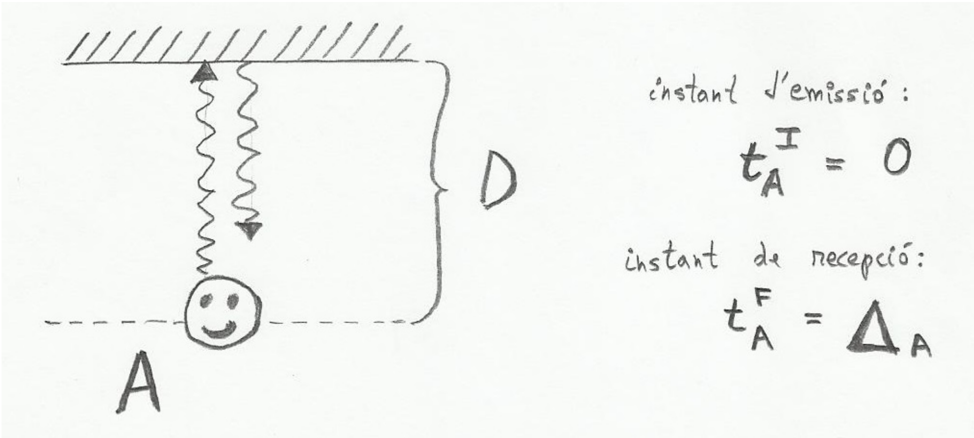
Aquesta gran quantitat d'operaris serà imprescindible per a l'observació de moviments complicats, però nosaltres ara, per simplicitat, només ens fixarem en el nostres dos observadors originals B_1 i B_2 per estudiar l'experiment que anem a proposar, i ja donarem per sobreentès que hem fet les comprovacions experimentals pertinents per tal de poder garantir que A va a velocitat constant respecte del SRI de B_1 i B_2. La qual cosa ens diu, per cert, que A pertany a un altre SRI diferent.

La **segona precisió** que hem de fer és sobre la distància *D* a la que es troba el gran mirall paral·lel. Tot seguit anem a posar de manifest que la invariància de la velocitat de la llum, que ve dictada pel segon postulat de la Relativitat Especial (o també: que es comprova empíricament amb l'experiment de Michelson i Morley), té com a conseqüència un efecte anomenat la "dilatació temporal", que no és altra cosa que la diferència en les percepcions del pas del temps que tenen diferents observadors. Amb raonaments anàlegs, però una mica més complicats, es poden demostrar diferències en la percepció de les longituds —el que se'n diu "contracció de longituds"—, com és ben sabut per tots aquells que hagin llegit algun text de divulgació. Per tant, ens podríem preguntar si la distància *D* a la qual, segons B_1 i B_2, es troba el gran mirall paral·lel, és també la que percep l'observador A , el qual no pertany al mateix SRI.

La resposta aquesta pregunta és que, efectivament, tant A com els dos B_1 i B_2 veuen el mirall a la mateixa distància. Per a entendre per què, no cal emprar les equacions de la Relativitat, sinó que només cal un senzill argument de simetria. Segons el primer postulat de la Relativitat Especial, tan cert és dir que el SRI format per B_1 i B_2 està en repòs i que A es mou respecte d'ell —a velocitat constant i cap a la dreta—, com dir que és A qui està en repòs, i que són B_1 i B_2 qui es mouen respecte del seu SRI —cap a l'esquerra i a velocitat constant—. Com que això de dreta i esquerra és totalment arbitrari —per canviar-ho, només hem de canviar l'orientació dels nostres eixos de referència—, i com que ambdós SRI han de ser indistingibles amb experiments físics ("mecànics o electromagnètics", diu el primer postulat de la R.E.), aleshores hem de concloure que $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B_1}$ **i** $\boldsymbol{B_2}$ **han de percerbre**, necessàriament, que **el gran mirall** paral·lel està **a la mateixa distància, *D***.

► Passem ara a descriure el nostre **experiment**. Anem a imaginar que, en el moment en que A i B_1 es junten, els seu respectius rellotges indiquen un temps "inicial" igual a zero. És a dir: $t_A^I = 0$, segons el rellotge d' A , i: $t_B^I = 0$, segons el rellotge de B_1 .

Suposem també que, en el precís instant en que estan superposats, A i B_1 emeten un pols de llum, que es propaga en totes les direccions, i els seus raigs formen fronts d'ona esfèrics. L'observador A veu com un d'aquests raigs es reflecteix en el gran mirall paral·lel, i després torna a ell:

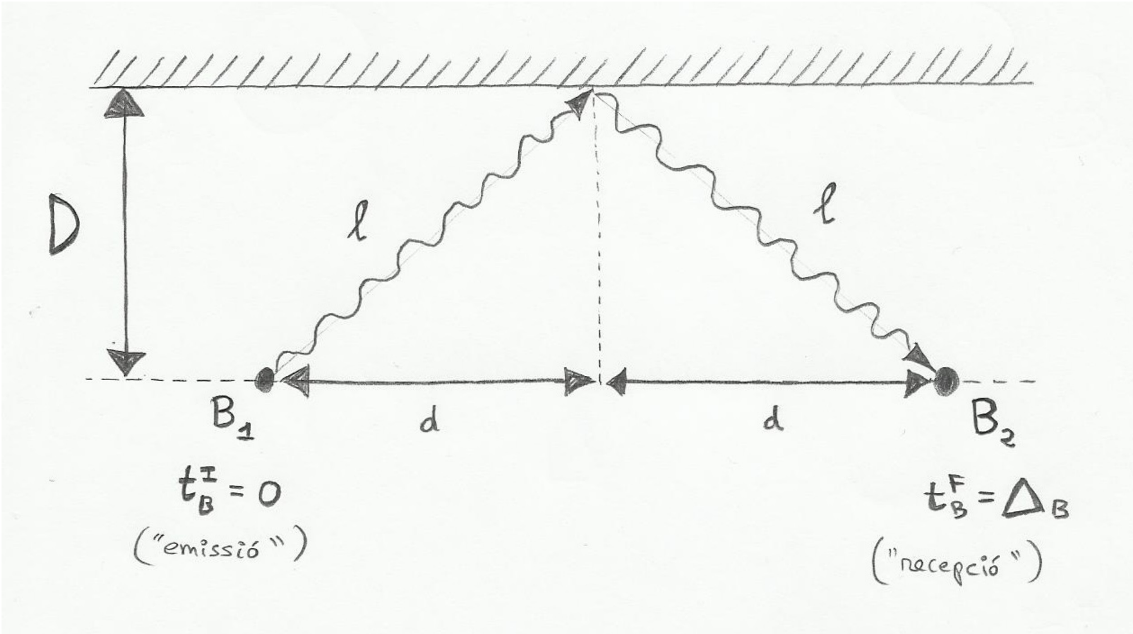


Al temps "final" que marca el rellotge d' A quan detecta la tornada del raig reflectit li direm $t_A^F = \Delta_A$. Així, per calcular la velocitat del raig de llum segons ho percep A només hem de fer la divisió

$$v_A = \frac{2D}{\Delta_A}$$

Però recordem que B_2 està veient com A s'acosta cap a ell. Suposarem que la distància L a la que B_1 i B_2 es troben és tal que A arriba a B_2 en el precís instant en què rep el raig reflectit (per tant, també és el moment en què B_2 el rep). Al temps ("final") que indica el rellotge de B_2 en tal instant li direm $t_B^F = \Delta_B$.

Anem a representar amb l'esquema següent quina és la trajectòria que ha seguit aquest raig, des que és emès per B_1 (i A , conjuntament) fins que és rebut per B_2 (i A , conjuntament).



(Nota: hem definit d com la meitat de L , $d = L/2$)

La velocitat que s'observa per a aquest raig de llum des del punt de vista del SRI al que B_1 i B_2 pertanyen es calcula, doncs, dividint

$$v_B = \frac{2l}{\Delta_B}$$

Però podem emprar el teorema de Pitàgores per escriure: $l = \sqrt{d^2 + D^2}$, i per tant tindrem que

$$v_B = \frac{2\sqrt{d^2 + D^2}}{\Delta_B}$$

► Apliquem ara el **segon postulat de la RE**, segons el qual diferents observadors inercials sempre veuen la mateixa velocitat *c* per a un raig de llum, independentment de la velocitat relativa d'aquests observadors, i de la velocitat de la font d'emissió.

És a dir: tindrem que, necessàriament, $v_A = v_B = c$.

Substituint aquí amb les expressions per a v_A i v_B que acabem de trobar, arribem a la igualtat

$$\frac{2D}{\Delta_A} = \frac{2\sqrt{d^2 + D^2}}{\Delta_B} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{D^2}{{\Delta_A}^2} = \frac{d^2 + D^2}{{\Delta_B}^2}}$$

on hem dividit tota l'equació entre 2 i després l'hem elevada al quadrat.

Com que sabem que $d \neq 0$ per hipòtesi (és a dir, els observadors B_1 i B_2 no estàn tocant-se), a partir de la darrera equació és fàcil concloure, amb un raonament de tipus "reducció a l'absurd", que necessàriament ha de donar-se que

$$\boxed{\Delta_A < \Delta_B}$$

la qual cosa es coneix com la "**dilatació temporal**" relativista[4].

Aquesta desigualtat relaciona un interval de "temps propi" Δ_A (el de l'observador A) amb un interval de "**temps coordenat**" Δ_B . Notem que aquest temps coordenat Δ_B és el temps amb què es descriu la durada del moviment de A vist des del SRI al que B_1 i B_2 pertanyen.

► Abans d'interpretar amb una mica de cura el significat d'aquesta dilatació, ens cal entendre millor la **part experimental de la descripció del moviment** en Relativitat. És a dir, ens cal entendre una mica més què és un Sistema de Referència Inercial de la RE, i per què cal construir-los de la manera en què es fa (manera què, en principi, sembla una mica artificiosa).

Si prenem perspectiva sobre el que acabem de fer, veurem que el procediment per observar i prendre nota del moviment d'una partícula en RE comença omplint amb els operaris del nostre Sistema de Referència tota la regió de l'espai on la partícula es mou. Cadascun d'aquests operaris estarà proveït d'un rellotge i uns miralls. Tots els operaris estan intercanviant constantment raigs de llum amb els seus veïns, i cronometrant els temps d'anada i tornada de cada raig, doncs només així poden garantir que les seves posicions relatives siguin fixes. A més a més, també han fet servir aquestes mesures per establir un criteri de sincronia entre els seus rellotges[5].

Durant l'experiment, cadascun dels operaris observa el que ocorre a prop d'ell, i quan veu la partícula que s'està estudiant, apunta a la seva llibreta el temps que indica el seu rellotge. Cada operari està ocupant una certa posició que queda descrita per la

---

[4] Nosaltres hem demostrat una desigualtat entre percepcions temporals, sense quantificar exactament quina és la diferència entre tals percepcions. Un raonament més acurat permet trobar la coneguda fórmula de la dilatació temporal de la RE, que és la que s'aplica als muons que travessen l'atmosfera.

De fet, seguint un camí anàleg, hom pot arribar a deduir la forma matemàtica de les transformacions de Lorentz, a partir de les quals es poden demostrar tots els efectes de tipus "dilatacions temporals" i "contraccions de longituds". Nosaltres, però, hem evitat el raonament amb aquestes transformacions, sota el convenciment que enfosqueixen innecessariament els fets físics que s'amaguen darrere de les matemàtiques.

[5] Si aconseguim organitzar tot aquest conjunt d'operaris de manera que se satisfaci sempre l'esmentat criteri experimental de sincronia i repòs relatiu, i la relació entre els temps coordenats i els temps propis experimentals de qualsevol partícula que s'observi són les que es calculen aplicant un cert procediment integral a les transformacions de Lorentz, aleshores podrem garantir que el nostre Sistema de Referència és "Inercial". Els criteris de sincronia que hem definit, però, no són absoluts: el mateix efecte que hem vist de "dilatació temporal" relativista ja ens permet entendre amb facilitat que els rellotges dels operaris d'un SRI no estaran ben sincronitzats quan els miren els operaris d'un altre SRI. Per això parlem d'una *sincronia relativa*: relativa un cert Sistema de Referència, evidentment.

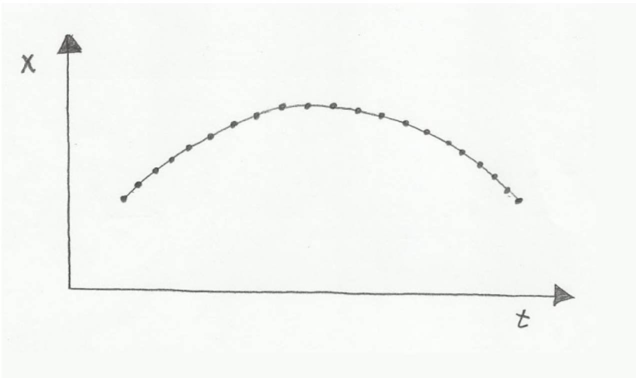
A més a més, que en absència de gravitació els Sistemes de Referència Inercials existeixin podria veure's com un "postulat ocult" de la teoria de la Relativitat. En presència de camp gravitatori, malauradament, ja no podem garantir la seva existència, i per tant els rellotges no podran mantenir la seva sincronia, ni tan sols en el sentit de sincronia relativa a un determinat Sistema de Referència.

En Relativitat General ens veurem obligats, per tant, a fer servir el concepte de "Sistema de Referència Localment Inercial", **S.R.L.I.**, que físicament estarà associat a un conjunt d'observadors locals en "caiguda lliure".

corresponent coordenada espacial x (en realitat, si observem un moviment en 3D, hauríem de parlar de les tres coordenades espacials x, y, i z, però nosaltres anem a simplificar, de moment, i parlar d'un moviment 1D). Per tant, al final de l'experiment podrem reconstruir el moviment de la partícula en forma de taula recopilant les successives parelles de dades temporals i espacials (t, x) que es corresponen a cada observació experimental:

t	x
t_1	x_1
t_2	x_2
t_3	x_3
$\vdots$	$\vdots$

Per continuar amb la descripció del moviment, el que es fa és dibuixar uns eixos cartesians, i assignar a les abscisses els temps i a les ordenades les posicions. Després, representem un punt per cada parella de dades experimentals, i finalment unim tots els punts amb una corba de la manera més suau que sigui possible:



Amb aquesta gràfica hem aconseguit recollir tota la informació que tenim, a partir de les observacions dels operaris del nostre SRI, sobre el moviment de la partícula.

Fem una primera observació sobre aquesta descripció experimental del moviment: Realment feia falta emprar tants operaris, i tot allò dels raigs de llum per sincronitzar els rellotges?

Per a entendre per què sí que feia falta, hem de pensar en les dificultats pràctiques de la mesura de distàncies. El problema consisteix en que no podem mesurar distàncies sense emprar mètodes indirectes, pel senzill motiu que **no podem estar en dos llocs alhora**. Això no es nota gaire quan es tracta de fer mesures curtes sobre objectes quiets, mesures que podem fer amb un regle o una cinta mètrica, però si es tracta de distàncies més grans —i el cas extrem el constitueixen les distàncies interestel·lars o intergalàctiques— ja no resulta tan fàcil. I la percepció de les distàncies, a més a més, varia segons la velocitat de qui fa les mesures (com es veu amb el fenomen de "contracció de longituds", encara que nosaltres aquí no el tractarem), així com la percepció dels instants en què es fan les mesures (això sí que ho hem vist, amb les dilatacions temporals). De manera que tot aquest tema de les mesures de les distàncies i dels temps en Relativitat es torna molt confús si no anem amb cura. Per vorejar la dificultat, precisament, recorrem a l'única cosa que hi ha d'absolut en la teoria: la velocitat de la llum. Com que aquesta és invariant entre tots els SRI, utilitzem els raigs de llum per establir i supervisar la sincronia de rellotges, per controlar que les distàncies no variïn, i, en realitat, també per definir aquestes distàncies.

La segona observació consisteix en veure que cadascun dels temps que formen cada parella de valors experimentals (t, x) ha estat mesurada per un rellotge diferent: els rellotges dels successius operaris que van prenent nota del moviment. Per això, **aquests temps no es poden interpretar com** el **temps propi** de cap partícula: evidentment, no són temps propis de la partícula observada (doncs aquests s'han de mesurar amb un rellotge que acompanyi sempre a la partícula), però tampoc no són el temps propi de cap dels operaris, sinó que —diguem-ne— estan fets amb "trossets" dels temps propis de cadascun d'ells. Utilitzem, doncs, aquest "puzle" de temps de diferents operaris com a eina per descriure el moviment de la partícula, i poder dibuixar l'anterior gràfica. En aquest sentit, **cada parella** de valors (t, x) **ens identifica el punt** que dibuixem sobre la gràfica, **de la mateixa manera que les coordenades** de longitud i latitud ens indiquen la posició d'un vaixell **sobre un mapa**. És per això que aquest temps rep el nom de "**temps coordenat**".

► Mirem d'**interpretar** amb una mica de cura què vol dir exactament la **dilatació temporal** que abans hem trobat. Matemàticament, consisteix en una desigualtat entre dos intervals de temps: el Δ_A , que sempre serà més petit, i el Δ_B , que sempre serà més gran. Ambdós intervals es corresponen a la diferència entre l'instant en que es rep el raig de llum que hem estudiat i l'instant en que va ser emès. Equivalentment, es corresponen amb la diferència entre l'instant en què A arriba a B_2 i l'instant en que estava encara al costat de B_1 .

Hi ha, però, una diferència conceptual molt gran entre el significat físic d'aquests dos intervals de temps: mentre que el "petit", Δ_A , ha estat mesurat sempre amb el mateix rellotge, que és el que tenia l'observador A "a la butxaca" mentre efectuava el seu desplaçament —i per tant és el seu **temps propi**, o "temps de creixement de barba"—, l'interval "gran", Δ_B, està mesurat amb dos rellotges diferents: el de l'observador B_1 , primerament, i el de l'observador B_2 , darrerament.

És a dir: la mesura temporal Δ_B ens permet descriure la durada temporal del moviment de A des del SRI del qual B_1 i B_2 són operaris, però **no és el temps propi de ningú**. És el que hem acabem de denominar un "**temps coordenat**".

Conseqüentment, podem fer la següent **relectura** de la desigualtat $\Delta_A < \Delta_B$ de la **dilatació temporal**: «L'interval de temps coordenat, Δ_B , què un SRI percep entre dos punts de la trajectòria d'una certa partícula en moviment, és sempre major que l'interval de temps propi, Δ_A , que aquesta partícula percep entre els mateixos dos punts».

La darrera frase capta tot el **significat físic** de les **dilatacions temporals** de la Relativitat[6].

3. La paradoxa dels bessons. L'espai-temps

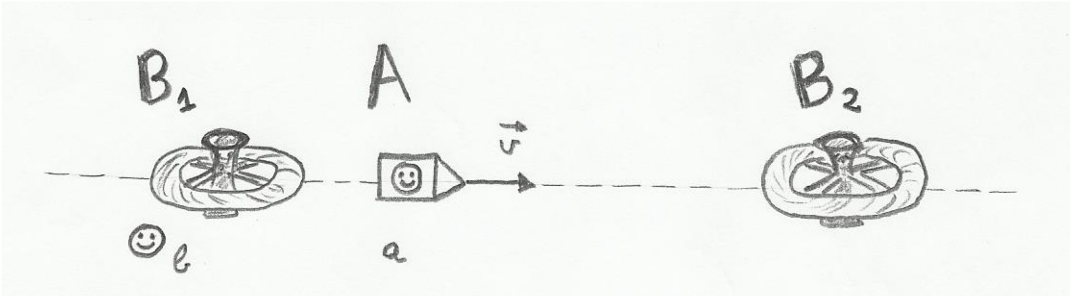
► Fins ara hem justificat la fórmula de la dilatació temporal de la RE a partir de la constància de la velocitat de la llum —ho hem fet de manera només qualitativa, com a desigualtat—, i hem fet un tast sobre per què els dos tipus de temps que relaciona la desigualtat són de natura física diferent: el "petit" és un temps propi, i el "gran" és un temps coordenat. Pel camí, hem discutit la manera rigorosa de fer una descripció experimental del moviment en RE, la qual cosa ens ha dut a parlar dels SRI i els seus operaris, i de la mesura de distàncies i sincronització de rellotges emprant raigs de llum.

Ara voldríem entrar una mica en quina **diferència** hi ha entre les **concepcions** del **temps físic** (o sigui: la visió que té del pas del temps cada partícula al llarg de la seva trajectòria, **o temps propi**) de la teoria de **Newton** i la de la teoria de la **Relativitat**. Per tal de poder fer-ho, anem a recórrer a un fet experimental on només farem comparacions entre temps propis (evitant els temps coordenats, de dubtosa interpretació). Es tracta de la paradoxa dels bessons.

► Tornarem al nostre experiment amb els observadors B_1 i B_2 , els quals ara imaginarem que es corresponen a dues estacions espacials, i que l'observador A és una nau que les comunica a velocitat constant —una mena d'*autobús espacial*—, i permet fer el viatge entre B_1 i B_2 .

Suposarem que a l'estació B_1 hi viuen dos bessons, *a* i *b* , que no mai s'han separat, i per tant tenen la mateixa edat. Quan l'autobús A passa per B_1 , el bessó *a* hi puja, i després d'un trajecte que dura un temps propi Δ_A (com hem vist més amunt), arriba a l'estació B_2 .

[6] Això és així perquè es pot demostrar –amb un procediment integral– que s'aplica també al cas de partícules en moviment no uniforme; i la frase és certa també en el marc de la Relativitat General –és a dir: quan considerem les dilatacions temporals causades per camps gravitatoris–, sense més que substituir els "SRI" pels "SRLI" (els Sistemes de Referència Localment Inercials). Per tal de parlar amb propietat, però, cal fer-hi una precisió: hi ha una evident excepció, i es tracta del cas en què la partícula observada estigui en repòs des del punt de vista del SRI que descriu el seu moviment. En tal cas, els intervals de temps propi i de temps coordenat coincidiran (no hi haurà dilatació temporal). Això és evident si considerem que, en un cas així, el temps propi de la partícula observada sí coincidirà amb el temps del rellotge de l'operari que fa les observacions, que sempre serà el mateix.



Però en el precís instant en què està baixant de l'autobús, el bessó a veu que està a punt de sortir la nau A', que fa el mateix recorregut que l'A però en sentit contrari, i de sobte sent que enyora el seu germà b, i automàticament puja a l'altre autobús per fer el camí de tornada.

Per simetria, és fàcil comprendre que, un altre cop, el temps que dura el trajecte segons el rellotge que duu el bessó a a la butxaca és igual a Δ_A. Per tant, la durada total del viatge d'anada i tornada des de l'estació B_1, mesurada amb aquest rellotge, és

$$\Delta\tau_a = 2\Delta_A$$

Que és, físicament, un **increment de temps propi del bessó *a***, és a dir: ens diu quant ha envellit el bessó a durant tot el trajecte (o, si es vol, quant li ha crescut la barba).

També per simetria, i recordant els resultats que hem trobat més amunt, l'interval de temps que mesura l'operari de l'estació B_1 entre la sortida i la tornada del bessó a és

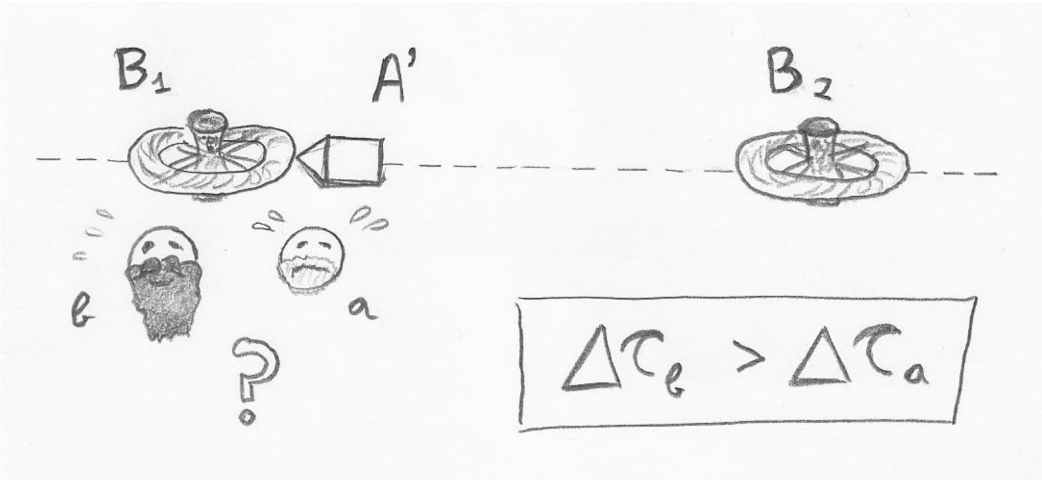
$$\Delta\tau_b = 2\Delta_B$$

Però, notem-ho: com que aquest operari i el bessó b han estat tot el temps junts, aquest interval de temps es correspon amb un **increment de temps propi del bessó *b***, és a dir: ens diu quant ha envellit el bessó b des que el seu germà sortí fins que hi torna.

Ara només ens cal recordar la desigualtat de la dilatació temporal que hem demostrat més amunt: $\Delta_A < \Delta_B$. Automàticament, tenim que

$$\boxed{\Delta\tau_a < \Delta\tau_b}$$

...és a dir: el **bessó que ha viatjat és més jove que el que ha romàs a l'estació** B_1 !



Aquest fenomen rep el nom de “**paradoxa inercial dels bessons**”.

► Fem ara la **interpretació física** de la paradoxa. Podríem raonar de la següent manera: hem considerat que el bessó *b* és qui es queda quiet durant tota l’experiència, però, atès que el moviment és relatiu, no podríem dir que és el bessó *a* qui es queda quiet? I que és *b* qui, segons *a* ho percep, va i torna? Com saber, doncs, qui és el bessó que ha d’envellir més?

La clau està en que les diferències entre el que passa amb cadascun dels bessons no són gens innocents, perquè un dels dos observadors ha deixat de ser “inercial”. Recordem que al principi vam dir que un observador, per ser considerat inercial, havia de no patir els efectes de cap força: és a dir: no podia estar sotmès a acceleracions. En el cas del bessó *b*, efectivament, no tenim motius per pensar que hagi sigut accelerat, però és evident que el bessó *a* ha sigut sotmès a una acceleració quan ha canviat d’autobús. Per tant, podem dir que **el bessó *a* ha deixat de ser** un observador **inercial** al llarg del moviment.

En resum, el que acabem de veure és, ni més ni menys, que «en Relativitat les **acceleracions tenen l’efecte d’alterar** la marxa del **temps propi** de les partícules que han sigut accelerades».

Per precisar una mica més el significat d’això, ens cal introduir el concepte de trajectòries a l’espai-temps.

► La millor manera d’entendre què és l’espai-temps consisteix en tornar a preguntar-nos com fem la descripció del moviment, però ara des del punt de vista estrictament matemàtic (geomètric, concretament).

Quins són els objectes matemàtics que hem fet servir per fer la descripció gràfica del moviment que vam presentar a la pàg. 8?

La pregunta no sembla difícil de contestar: ràpidament, podríem dir que una corba. Afegiríem potser, per intentar no deixar-nos res, els eixos cartesians. Tot i així, ens estaria faltant encara quelcom que veiem, però no ens n'adonem: **el paper on estem dibuixant la corba** que representa el moviment. Aquest paper, vist com a objecte matemàtic, és allò que se'n diu **espai-temps**.

Si volguéssim ser una mica més tècnics, diríem que el conjunt format per tots els punts d'aquest paper representa totes les possibles parelles de temps-posicions que poden formar part, eventualment, de la descripció del moviment d'una partícula qualsevol. Aquests punts reben el nom d'esdeveniments espaciotemporals, i el conjunt de tots ells es un tipus d'objecte geomètric sofisticat que rep el nom de *varietat lorentziana*[7]. La branca de les matemàtiques que estudia aquests objectes rep el nom de **Geometria Diferencial**, i va ser establerta per Gauss i Riemann al llarg del S.XIX, principalment.

Nosaltres prescindirem dels tecnicismes i continuarem veient l'espai temps com el paper on dibuixem les corbes que representen el moviment. Notem que les coordenades (t, x) de cada punt del paper es corresponen amb les mesures que fan els operaris del SRI amb què treballem, i des d'un punt de vista geomètric, com ja hem apuntat més amunt, són semblants a les coordenades de latitud i longitud que ens diuen sobre un mapa on està un vaixell o una illa. Però la manera amb la que es defineixen unes coordenades sobre un mapa no és única: s'hi poden triar dos sistemes de coordenades diferents, i perfectament vàlids els dos, sense més que tornar a dibuixar, arbitràriament, una altra quadrícula sobre el mapa.

Pensem ara una cosa: la descripció que fan dos SRI diferents del mateix esdeveniment no té per què coincidir, ni en coordenades espacials ni en coordenades temporals. Això vol dir que un canvi de SRI és equivalent a una transformació del coordenades en el paper on representem el moviment. (Més tècnicament: un canvi de SRI és equivalent a una transformació de coordenades en l'espai-temps).

[7] També se sol dir, de manera un tant impròpia, que es un "espai de Riemann" o una "varietat riemanniana" (tot i que seria més adequat dir que és un tipus molt concret de varietat pseudo-riemanniana). Sense gravitació –és a dir, en el marc de la Relativitat Especial–, rep senzillament el nom d'*Espai de Minkowski*.

En qualsevol cas, no és un senzill espai vectorial, i això té a veure amb dues coses. La primera, que té una estructura addicional que no tenen els espais vectorials: el tensor mètric (vulgarment, "la mètrica"), que permet calcular els temps propis associats al moviment de qualsevol partícula. La segona, que en presència de camps gravitatoris ens cal dibuixar les trajectòries en un *paper* corbat (en un espai-temps corbat), la qual cosa tampoc ocorre amb els espais vectorials.

Una bona manera de visualitzar les diferències geomètriques entre un espai vectorial i l'espai-temps seria pensar en termes de superfícies: un espai vectorial és es semblant a un pla, i l'espai-temps és semblant a la superfície d'una esfera. Aquesta visió, però, és simplista, perquè una superfície és un objecte de dimensió dos, i en canvi l'espai temps sempre és un objecte de dimensió quatre, en correspondència amb l'existència de tres coordenades espacials i una temporal.

► Ara ja estem en condicions d'emprar la paradoxa dels bessons per entendre quines són les diferències més importants, a nivell fonamental, entre la teoria de Newton i la d'Einstein.

La característica comuna a totes aquestes diferències és que sempre es poden entendre en termes d'una **diferent concepció de com passa el temps propi**. Intentarem explicar-ho utilitzant una metàfora.

Anem a comparar la **percepció del pas del temps propi** que té un observador qualsevol amb un **viatge en cotxe**. Posem per cas, per exemple, que sortim d'una ciutat de la costa i arribem a una de muntanya.

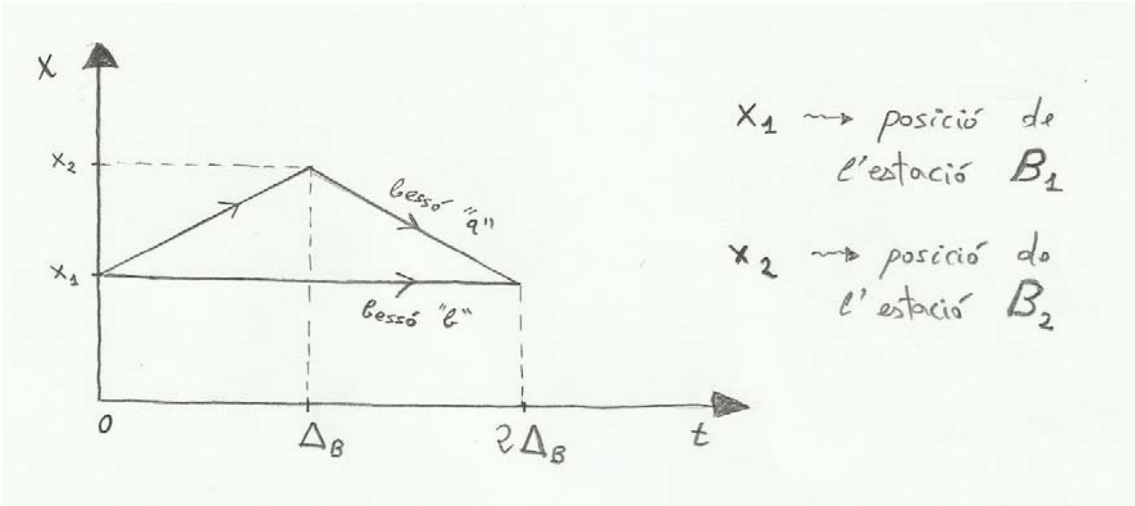
La manera de **Newton** d'entendre el pas del temps és semblant a la diferència d'altituds a les que el cotxe es troba des que surt de la ciutat i fins que arriba al poble. La característica fonamental de **l'increment** que mostrarà l'hipotètic **altímetre** del cotxe és que **no depèn** de la **carretera** seguida, sinó només dels punts inicial i final.

En canvi, la manera d'**Einstein** d'entendre com passa el temps propi és semblant a l'**increment** que marca el **comptaquilòmetres** del cotxe: no només depèn dels punts inicial i final del camí, sinó que també **depèn** de **quina carretera seguim**[8].

El que volem dir amb la metàfora, per tant, és què allò de rellevant de la teoria de la Relativitat, i que la diferencia dràsticament de la visió newtoniana, és que «**els increments** de **temps propi** que percep una partícula durant el seu moviment no **depenen** només de quins són els punts de l'espai-temps on comença i acaba el moviment, sinó també de quin **camí** hem **seguit** per anar de l'un a l'altre».

Vegem, com a exemple, la representació gràfica les trajectòries espaciotemporals dels bessons *a* i *b* de la paradoxa:

[8] Aquesta metàfora del comptaquilòmetres té una virtut, i és desfer la dubtosa idea intuïtiva que hom pot crear a partir de l'afirmació "les acceleracions alteren la marxa del temps propi". Dit així, podria semblar que els efectes de la Relativitat tenen a veure amb distorsions en el mecanisme dels rellotges amb els que mesurem el temps. En realitat, això no és cert: els rellotges continuen funcionant perfectament, com els comptaquilòmetres, i l'única diferència és que hem triat un camí en l'espai-temps que és *més llarg*, pel que fa al temps que cal emprar en recórrer-lo. El rellotge només ens diu la llargària temporal del nostre camí. El motiu que ens ha dut a dir abans que les acceleracions alteren la marxa del temps propi és que encara no teníem clar què era l'espai-temps. Ara, però, hauríem de canviar la frase per una com aquesta: "les acceleracions ens porten per un camí de l'espai-temps tal que ens cal emprar menys temps propi per arribar al final del moviment" (una mena de drecera, vaja).



Efectivament, els punts de l'espai-temps (o "esdeveniments") on comencen i acaben els moviments d'ambdós bessons *a* i *b* són els mateixos, però no així la resta de les trajectòries, i aquí rau la diferència d'envelliment que presenten els bessons al final.

Existeix també una altra metàfora prou popular per contraposar les diferents visions del temps en les teories newtoniana i de la Relativitat. Newton parlava del **temps absolut**, i això ho podem veure com si el temps fos un mateix **riu universal**, que flueix alhora per tot arreu, i al mateix ritme per tothom. En canvi, segons la Relativitat, el **temps propi** és com una mena de **riu personal** que cadascú portem dins, i la quantitat d'aigua que haurà fluït en el riu de cada persona dependrà del camí que hagi seguit aquesta persona.

4. Gravitació i Relativitat. Principi d'Equivalència. Curvatura

Fins ara hem parlat de com Einstein modificà les idees de Newton sobre la descripció del moviment.

Cal, vertaderament, modificar també les seves idees sobre gravitació?

Existeixen molts arguments, tant teòrics com pràctics, per justificar la necessitat d'una nova teoria de la gravitació. Nosaltres en donarem un molt senzill, que ja va ser capaç de veure, de fet, el mateix Newton.

La **Gravitació Universal** newtoniana és una teoria d'**acció a distància instantània**. Això vol dir que, per exemple, si ara mateix el Sol esclatés i es dividís en dos trossos, i cadascun dels dos sortís "volant" en dues direccions oposades, nosaltres, a la Terra, sentiríem la consegüent modificació del camp gravitatori del Sol de manera **immediata**. Newton afirmava que això era absurd, que seria més raonable que els efectes de les interaccions triguessin un cert temps en "viatjar" per l'espai, com si es tractes d'un missatge, des de l'objecte que causa la interacció fins l'objecte que la sent. Però també admetia que ell no havia sigut capaç de trobar la solució del problema, i que, malgrat tot, la seva Gravitació Universal semblava funcionar bé. Així que va deixar escrit que la tasca de resoldre el problema conceptual de l'acció a distància instantània quedava per a les futures generacions.

Amb l'arribada d'Einstein i la Relativitat Especial, quedava clar que no podia haver-hi res que anés a una velocitat més alta que la llum. I això també aplica per a la transmissió de la interacció gravitatòria. Per tant, es tornava a obrir la vella qüestió que ja havia preocupat a Newton. Einstein tractà de trobar una altra teoria per a la gravitació que fos consistent amb la Relativitat, però va veure que això no semblava possible si continuava pensant en la gravetat com una força entre masses que s'atrauen.

Els motius profunds que van impedir a Einstein construir aquesta nova teoria de forces gravitatòries tenen un caràcter eminentment matemàtic, i nosaltres no els examinarem.

Això però, sí que podem donar un senzill argument que permet apuntar cap a la solució que Einstein trobà per al problema. Arran de l'equivalència entre massa i energia que ell mateix havia proposat, els raigs de llum, que transporten energia, haurien de sentir també el camp gravitatori, i per tant desviar-se quan passen a prop d'un estel[9]. Però si construïm la teoria gravitatòria com una teoria de forces atractives entre masses, aquests raigs, que no tenen massa, no sentiran cap força, i per tant no es desviaran mai.

Ara hem de reflexionar una mica sobre què vol dir, exactament, això que entenem per "desviar-se". Si treballem sobre un pla, no hi ha dubte: una línia recta és la línia que "no es desvia".

Què passa si treballem sobre una superfície no plana, és a dir, amb curvatura?

Pensem en el cas de la superfície esfèrica.

Per molt que ens esforcem, no mai podrem dibuixar un camí sobre una esfera que sigui una línia recta. **Les línies rectes no existeixen al sí d'una superfície esfèrica**. Tanmateix, sí que té sentit el concepte de "desviar-se" o "no desviar-se" quan caminem per aquest tipus de superfície.

Vegem-ho situant-nos, concretament, en el cas de la superfície terrestre.

Suposem que estem a la punta meridional de Sud-àfrica, per exemple, i imaginem que caminem cap al nord, intentant no desviar-nos i a la dreta ni a l'esquerra. Després de molts dies de caminar travessant tota l'Àfrica, haurem arribat a la costa mediterrània de Líbia, i podríem creure que hem "caminat sempre en línia recta". En realitat, sabem que la trajectòria que hem descrit és un arc d'una gran circumferència que té el radi i també el centre de la Terra. És a dir: és un "arc de cercle màxim" —de fet, seria un meridià—. Aquest tipus de trajectòria sobre una superfície esfèrica rep el nom de "corba geodèsica", i té la propietat de ser la que menys és desvia. En termes de kilòmetres recorreguts, seria la trajectòria més curta que uneix la

[9] De fet, des de principis del S.XX ja sabem que, experimentalment, els raigs de llum que passen a prop d'un estel sí es desvien –és a dir: no són indiferents a l'atracció gravitatòria–.

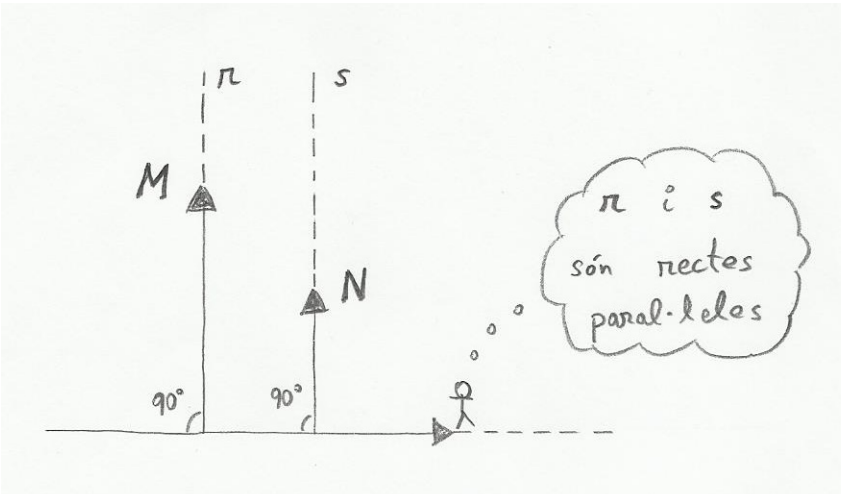
punta de Sud-àfrica amb la costa de Líbia. Tot i no ser recta, els habitants de la superfície esfèrica podríem tenir la falsa impressió que és una recta.

De manera semblant, per a totes les superfícies podem definir quines són les trajectòries equivalents a “intentar **caminar sense desviar-se**”, i reben també el nom de “**geodèsiques**”. Matemàticament, es poden definir fent servir un concepte anàleg a això dels kilòmetres recorreguts, és a dir: serien **les corbes que connecten** els seus **punts seguint el camí més curt** possible[10].

Tornant a l’esfera terrestre i les seves geodèsiques, ens fem ara la següent pregunta: com podríem distingir una geodèsica d’una recta? Dit d’una altra manera: com podem saber que vivim a una Terra rodona i no plana (cosa que va preocupar sovint als antics)?

Una manera de fer-ho seria emprant els angles de 90º. La idea és la següent: Caminem sense desviar-nos sobre una superfície *recta* (és a dir, plana). En un moment donat, enviem un missatger *M* cap a l’esquerra, a noranta graus del nostre sentit de marxa, i li demanem que camini, també ell, sense desviar-se. Nosaltres continuem la nostra marxa i, passat un cert temps, tornem a enviar cap a l’esquerra a 90º a un segon missatger, *N*, que també caminarà sense desviar-se.

Evidentment, no podrem esperar que els camins que descriuen *M* i *N* es tallin mai, per molt que caminen, perquè estaran seguint rectes paral·leles.

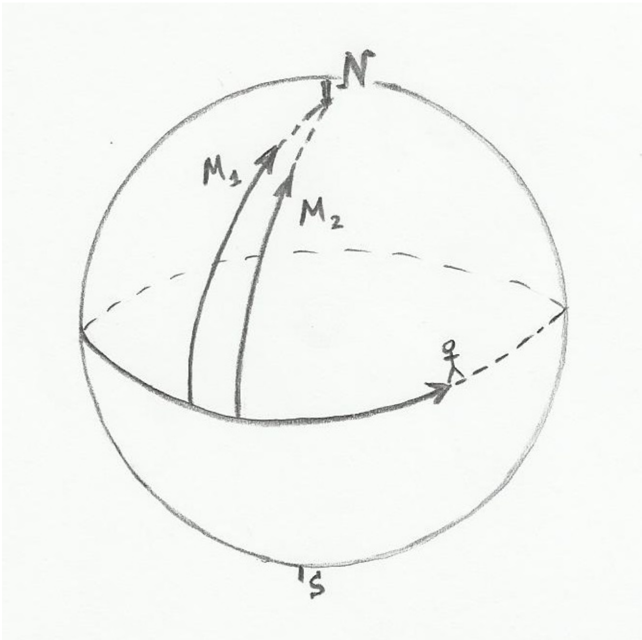


Pensem ara en el que ocorre a la Terra. Posem per cas que avancem cap a l’est seguint l’equador, és a dir, sense desviar-nos, perquè l’equador és un cercle màxim i, per tant, avancem seguint una geodèsica. En un moment donat enviem un missatger, M_1 , cap a l’esquerra, a 90º del nostre sentit de marxa. Aquest missatger anirà directe cap al nord, és a dir, caminarà seguint un meridià, també arc de cercle màxim, i per tant geodèsica. Conseqüentment, el nostre missatger avançarà “sense

[10] No cal ni dir que les geodèsiques del pla són les rectes.

desviar-se". Més tard, després d'haver recorregut algunes desenes de metres, tornem a enviar-ne un altre, M_2 , cap al nord.

Si suposéssim que vivim a un mon pla, aquests dos missatgers no tornarien mai a trobar-se. Però la realitat, com ja sabem, és que la Terra és rodona, i de fet els camins dels dos missatgers es tallen al Pol Nord (on es tallen tots els meridians).



Si visquéssim dominats pel prejudici de "el món és pla", quan M_1 i M_2 es trobessin al Pol Nord podríem dir: "ai, resulta que no han anat rectes: s'han desviat; ¡*les paral·leles no poden tallar-se*!". Quan la veritat és que ells han anat *el més rectes possible* —és ha dir, han seguit camins geodèsics—, i la culpa de que es tornen a trobar la té la curvatura intrínseca de la superfície per on caminen.

La **idea principal** a conservar dels efectes de la curvatura sobre les trajectòries geodèsiques és que, encara que dos objectes segueixin **dues** trajectòries aparentment **paral·leles** i sense desviar-se , a la llarga aquestes trajectòries **es poden tallar**.

Aquesta mateixa idea és la que Einstein va voler aplicar a això dels raigs de llum, però suposant que és tot l'espai-temps, i no només l'espai, el que està corbat (és a dir: un objecte quatre-dimensional), i ho està a causa de la gravitació.

El raonament que li va fer concebre aquesta idea es basa en el que es coneix com Principi d'Equivalència, que ja havia descobert Galileu.

El **Principi d'Equivalència de Galileu** diu que la **massa inercial** i la **massa gravitatòria** són **iguals**. La inèrcia al moviment d'un cos ve quantificada per la magnitud anomenada "massa inercial", m_i , que és la que entra en la segona llei de

Newton, $F = m_i\, a$. La magnitud reponsable de la interacció gravitatòria és la massa gravitatòria, m_g, i és la que entra en la llei de la Gravitació Universal de Newton[11],

$$F = G\frac{M_g m_g}{r^2}$$

Per exemple, quan dues partícules de masses diferents m_i i m'_i es trobin molt a prop l'una de l'altra, i molt lluny del centre de la Terra, les respectives forces gravitatòries F i F' que sentiran estaran descrites, aproximadament, per les següents expressions:

$$F = G\frac{M_g m_g}{r^2} \qquad \text{i} \qquad F' = G\frac{M_g m'_g}{r^2}$$

L'aproximació està en considerar que les distàncies r al centre de la Terra són aproximadament la mateixa per a ambdues (podíem haver emprat una altra lletra, com ara r' , per a la distància al centre de la Terra de la segona partícula, però suposem que $r \cong r'$). Pel que fa a la direcció de les forces, sabem que estrictament apunten cap al centre de la Terra, però a distàncies tan grans ens semblarà que siguin forces en direccions paral·leles (de la mateixa manera que quan llancem dos objectes des del balcó ens sembla que avancin l'un al costat de l'altre seguint trajectòries paral·leles).

Per calcular la acceleració a què està sotmesa cada massa emprarem la segona llei de Newton, la qual cosa ens duu a escriure que:

$$a = G\frac{M_g}{r^2}\cdot\frac{m_g}{m_i} \qquad \text{i} \qquad a' = G\frac{M_g}{r^2}\cdot\frac{m'_g}{m'_i}$$

(I el mateix que hem dit sobre les direccions de les forces, val també per les acceleracions).

Arribats a aquest punt, apliquem el Principi d'Equivalència de Galileu. Si no es donés la igualtat entre masses inercial i gravitatòria[12], no podríem fer la simplificació

$$\frac{m_g}{m_i} = 1 = \frac{m'_g}{m'_i}$$

que automàticament ens condueix a que les dues acceleracions són iguals:

$$a = G\frac{M_g}{r^2} = a'$$

(Aquesta quantitat és la que val $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ quan r és el radi de la Terra, i rep el nom, precisament, d'acceleració de la gravetat).

[11] Anem a escriure les equacions corresponents només al mòdul de les forces i acceleracions, per simplificar la notació. Quan sigui necessari ja considerarem, de paraula, les direccions.

[12] Equivalència, assenyalem-ho, que no tindria per què donar-se, doncs es tracta de dos magnituds conceptualment ben diferents. Per tant, en l'època de Newton i Galileu, s'havia de prendre com un resultat experimental sense una explicació teòrica consistent al darrere; una igualtat numèrica entre dues dades aparentment casual, vaja.

La conseqüència directa de la igualtat de les acceleracions és que si un conjunt de partícules es deixen caure totes alhora sota el camp gravitatori terrestre, de manera que se satisfan les hipòtesis que hem dit (que les partícules estan unes a prop de les altres i totes molt lluny del centre de la Terra), totes sentiran la mateixa acceleració, i per tant la seva caiguda serà tal que entre elles estaran en repòs relatiu.

Això vol dir, pensem-ho, que si aquestes **partícules** estan **tancades en un ascensor** sense finestres al que se li ha tallat el fil, i és per això que han començat la seva caiguda, **durant** tal "**caiguda lliure**" no seran capaces de trobar cap efecte gravitatori a dins de l'ascensor: per a elles serà **com si la gravetat no existís**[13].

Notem que això només ocorre amb les forces gravitatòries. Imaginem per un moment que, en comptes de la gravetat de la Terra, tinguéssim en l'anterior raonament una força elèctrica de tipus "Llei de Coulomb", que és molt semblant a la de la Gravitació Universal:

$$F = k\frac{Qq}{r^2} \quad \text{i} \quad F' = k\frac{Qq'}{r^2}$$

Ara, en calcular les acceleracions, tindríem que

$$a = k\frac{Q}{r^2}\cdot\frac{q}{m_i} \quad \text{i} \quad a' = k\frac{Q}{r^2}\cdot\frac{q'}{m'_i}$$

però la no equivalència entre la càrrega elèctrica i la massa inercial ens impedeix eliminar les fraccions q/m_i i q'/m'_i , i per tant les acceleracions serien diferents i les partícules no estarien en repòs relatiu.

Una altra observació sobre això de l'anul·lació aparent de la gravitació a dins de l'ascensor en caiguda lliure: si la caiguda es prolongués molt, acabaria notant-se que en realitat les forces són cap al centre de la Terra, i les partícules deixarien d'estar en repòs respectiu: sentirien, finalment, un petit efecte gravitatori, consistent en que cada parella de partícules s'acostarien una mica entre sí[14].

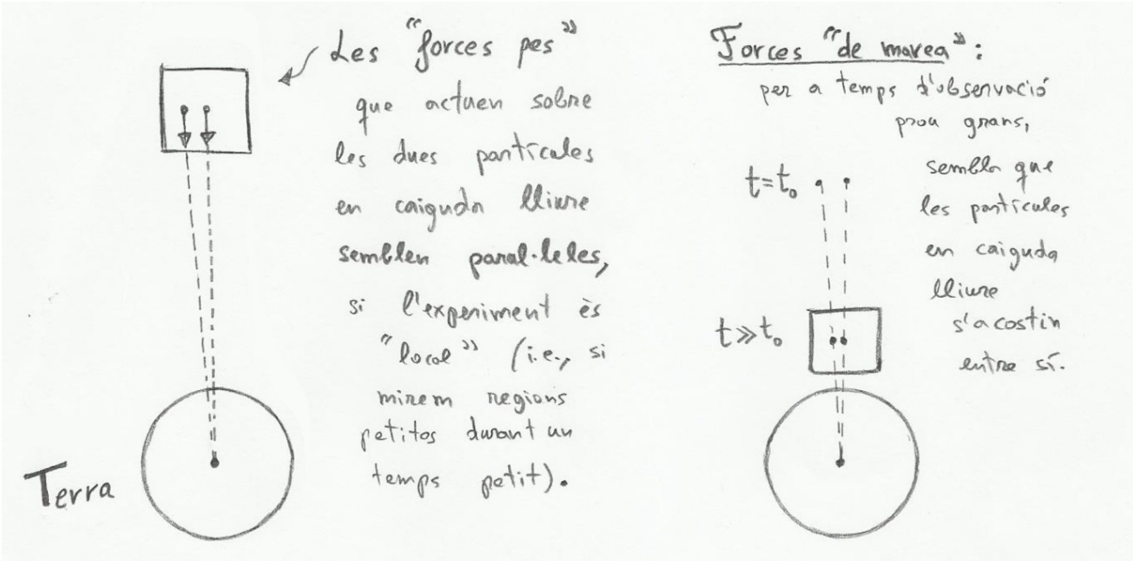
[13] Si en comptes de partícules parléssim d'una persona a dins de l'ascensor en caiguda lliure, ¿en què es traduiria l'efecte d' "anul·lació local de la gravetat" que acabem de descriure? Podem comprendre fàcilment que, efectivament, la persona de dins de l'ascensor tindria una sensació aparent d'ingravidesa. Pensem que el Principi d'Equivalència s'aplicaria per cadascun dels seus ossos, dels seus teixits, dels membres i la roba, de manera que no notaria, diguem-ne, que cap part concreta del seu cos "estira cap avall", així com tampoc, en general, qualsevol dels efectes que associem a que una força està actuat sobre nosaltres.

Per veure experiments d'ingravidesa amb avions en caiguda lliure:

http://www.youtube.com/watch?v=gTqLQO3L4Ko

http://en.wikipedia.org/wiki/Reduced_gravity_aircraft

[14] D'això se'n diu les "forces de marea".



Einstein va fer la següent lectura de totes aquestes observacions. Per un costat, a causa del Principi d'Equivalència **els camps gravitatoris són tals** que els **observadors en caiguda lliure no els noten**, sempre que no observin durant molt de temps (perquè apareixen les forces de marea), i que no observin regions molt grans de l'espai (això no ho hem tractat abans, però és automàtic veure, per exemple, que deixaria de donar-se la igualtat aproximada de les r). Per un altre, ell havia vist que insistir en el concepte de **gravitació com a força** entre masses **no era fructífer** des del punt de vista matemàtic, i per això havia decidit que miraria de construir una teoria de la gravitació on aquesta no fos una força, sinó *una altra cosa*. Però si la gravitació no és una força, què és el que *sí* és? Einstein va reflexionar sobre totes les característiques de la gravitació segons la teoria de Newton, i va arribar a la conclusió que el que la feia especial respecte de les altres forces conegudes era el que acabem de dir sobre el Principi d'Equivalència; per això, va creure que un bon camí per intentar esbrinar *què sí era la gravitació* consistia en agarrar-se a aquest principi.

Per tant, va proposar: «la gravitació, sense ser una força, ha de ser quelcom que tingui un cert efecte sobre les trajectòries de les partícules, de manera tal que aquest efecte no pugui ser percebut per observadors en moviment lliure[15], sempre que es considerin temps i espais no massa grans (és a dir: no ha de ser percebut *localment*)»

La darrera *recepta* rep el nom de "**Principi d'Equivalència d'Einstein**".

Podríem expressar-lo en termes una mica més tècnics dient: «la descripció dels fenòmens físics que fa un observador local en caiguda lliure és tal que, amb molt bona aproximació, no es percep cap efecte gravitatori, i per tant totes les equacions es poden escriure amb la mateixa forma que tenen en un SRI de la RE».

Tal nova versió del **Principi d'Equivalència** fou la guia que Einstein va usar sistemàticament per reformular tota la Relativitat en presència de gravitació.

[15] Ara lliure vol dir "només sotmesos a la gravitació", és a dir: lliure de forces –ja que la gravitació ja no és una força–. Per tant, en el cas més general, vol dir "en caiguda lliure".

Així, Einstein va connectar tot el que acabem d'esmentar amb el que abans hem dit de les **geodèsiques** en superfícies: **són trajectòries "lliures"** (és a dir: evitant tot agent que les desviï del camí més curt per unir punts), que només **són diferents de la recta a causa de la curvatura intrínseca de la superfície** on "viuen", i que localment poden semblar paral·leles però, a la llarga, poden tallar-se com a conseqüència de la curvatura. Com que això és molt semblant al que hem dit, quan parlàvem del Principi d'Equivalència, de **les trajectòries dels objectes en caiguda lliure**, a Einstein se li va acudir que potser aquestes trajectòries **no eren una altra cosa que geodèsiques a l'espai-temps**. I si, en geometria de superfícies, allò que fa que dues geodèsiques aparentment paral·leles es puguin tallar a la llarga és la curvatura de la superfície, aleshores, en Relativitat, les trajectòries de dos objectes que comencen una caiguda lliure aparentment paral·lela acabaran tallant-se a causa de la curvatura de l'espai-temps.

És a dir: **l'efecte de la gravitació és donar curvatura a l'espai-temps**.

Això és la resposta a la pregunta que ens havíem fet: si la gravitació no és una força, què és? La gravitació és una deformació de l'estructura geomètrica de l'espai-temps. L'alteració de les trajectòries de les partícules per causa de la gravitació ja no s'entén com una acció directa sobre les partícules, sinó una alteració de les propietats geomètriques del lloc per on aquestes partícules han de passar —aquest "lloc" és l'espai-temps—. Aquesta idea, vegem-ho, resol el problema que teníem amb els raigs de llum, que senten la gravitació sense tenir massa: el raig passa a prop d'una estrella, la qual deforma notablement l'espai-temps, i per això la trajectòria que segueix el raig no és la que esperaríem si no hi hagués l'estrella (en llenguatge planer, "l'estrella *desvia* el raig de llum"). Que el raig de llum no tingui massa no presenta cap problema en tot aquest raonament. Senzillament hem de suposar que el raig també està "en caiguda lliure", i per tant la seva trajectòria espàcio-temporal també serà una geodèsica, la forma concreta de la qual depèn de la curvatura en la regió de l'espai-temps que el raig està travessant.

Un aclariment: el que estem afirmant és que tota la teoria que hem dit per a superfícies cal aplicar-la a l'espai-temps, que és on es representen les corbes que descriuen el moviment. L'espai-temps, però, és un objecte geomètric de dimensió quatre, en comptes d'una superfície. La matemàtica necessària per fer aquesta generalització, tanmateix, ja va estar desenvolupada per Riemann al S.XIX.

En resum: en Relativitat General identifiquem les corbes geodèsiques de l'espai-temps com les que descriurien el camí seguit per partícules en caiguda lliure, i els efectes de la gravitació deixen d'entendre's en termes de forces per a passar a significar deformacions en l'estructura geomètrica d'aquest espai-temps. És a dir, alteracions en la seva curvatura, la qual causa, al seu torn, que les trajectòries geodèsiques siguin d'una manera o d'una altra[16].

No hem d'oblidar, però, que el fet que la teoria hagi sigut construïda d'aquesta manera geomètrica no es pot justificar únicament amb els arguments que hem presentat. L'última paraula sobre la consistència lògica de la teoria, evidentment, la tenen les matemàtiques. El fet és que quan Einstein es va ficar a reescriure la Relativitat seguint aquest patró per incloure la gravetat, era capaç de fer unes equacions consistents, que reproduïen els resultats bàsics newtonians, i que evitaven tots els problemes anteriors, com ara la transmissió instantània a distància de la interacció gravitatòria. De fet, cal dir que les equacions de la Geometria Riemanniana s'adaptaven de manera sorprenent a les equacions de la Relativitat.

A més a més, la teoria incloïa nous efectes addicionals que la teoria de Newton no predeia. El més important és el que constitueix la base de la **paradoxa gravitatòria dels bessons**, i consisteix en que si hi ha una regió on el camp gravitatori és molt intens (equivalentment, on la curvatura de l'espai-temps és molt pronunciada), el temps propi de les partícules que travessen aquesta regió es veu fortament afectat.

Per què estem donant tota l'estona tanta importància al temps propi i a les dues paradoxes dels bessons?

Per contestar-ho, cal tornar al principi. Què és la Relativitat? Una teoria sobre la descripció del moviment. Aquesta descripció es fa, òbviament, en termes de distàncies i intervals de temps. Però ocorre que, per un costat, ens trobem amb que els rellotges que deixen d'estar l'un al costat de l'altre poden haver-se desincronitzat quan es tornen a trobar. I, per un altre, la mesura de llargues distàncies no les pot fer una mateixa persona, sinó que s'ha de recórrer a mètodes indirectes, com ara la col·laboració d'un company, amb el qual s'ha de definir un cert criteri de sincronia de rellotges a distància, i així poder saber en quin moment s'han fet les mesures. I tal criteri de sincronia, a més a més, acaba per no ser absolut. Així, acabem havent de recórrer als raigs de llum, i a comptar el temps d'anada i tornada de polsos lumínics que enviem als nostres col·laboradors. Per tant, les nostres percepcions de distàncies espacials estan al final associades, necessàriament, a les mesures temporals dels nostres rellotges. **Per això** concloem que **el temps propi és tant important**. Cal afegir que, de fet, els fenòmens cridaners típics dels textos de divulgació (dilatacions temporals i contraccions de longituds, sobre tot) només es deixen entendre amb profunditat atenent a una anàlisi acurada de què passa amb els temps propis dels rellotges involucrats.

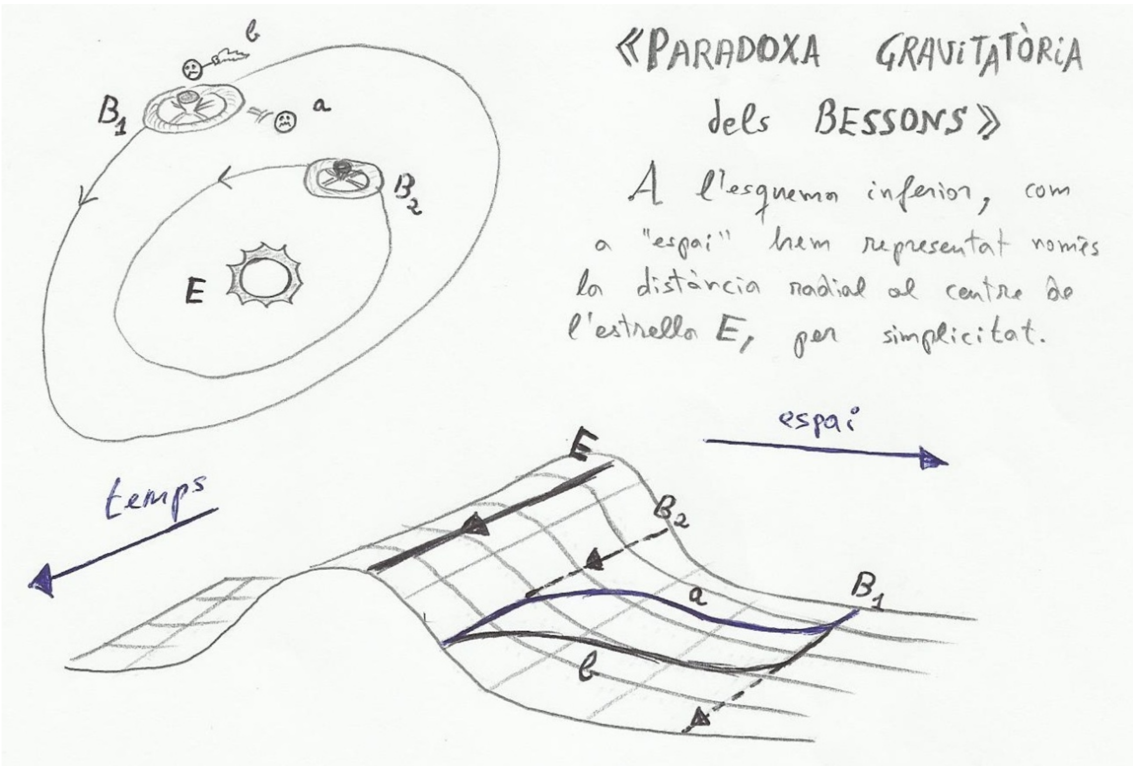
---

[16] Cal dir aquí que el concepte de geodèsica en l'espai-temps, com a corba que "no es desvia", també es pot definir en termes matemàtics demanant que sigui la corba que uneix tots els seus punts seguint el camí més curt. Però la definició acurada de "camí més curt" en aquest context no és gens trivial. El seu significat físic, però, sí que es fàcil d'entendre: el camí més curt per unir dos punts de l'espai-temps és aquell tal que, si aquest camí representa la trajectòria d'una partícula, aquesta utilitza el **menor temps propi** possible en dur a terme el moviment.

Tornem ara a preguntar-nos què és l'espai-temps, al final de tota l'explicació. És un objecte geomètric auxiliar que construïm per representar matemàticament el resultat de les nostres mesures, fetes per un gran equip d'operaris d'un Sistema de Referència[17]. El veiem com un paper sobre el que dibuixem corbes que representen el moviment de cada partícula. **El temps propi que una partícula necessita per anar d'un punt a un altre** d'aquest espai-temps **depèn del camí** seguit; en concret, vam veure al principi que depèn **de si ha estat accelerada**, i ara veiem que també depèn de la intensitat del camp gravitatori de les regions que travessa, intensitat que s'expressa i s'entén en termes **de com de corbat està l'espai-temps** ("el paper").

Podem dir, doncs, que existeixen **dos tipus de dilatacions temporals**: una la deguda les acceleracions a les que està sotmesa la partícula, o **inercial**, i una altra deguda a la curvatura de l'espai temps, o **gravitatòria**.

Tenint tot això al cap, podem fer una representació gràfica de la **versió gravitatòria** de la **paradoxa dels bessons** amb l'esquema següent:



on hem representat la trajectòria d'un bessó *a* que viatja a prop d'una estrella, on el camp gravitatori és intens i la curvatura és forta[18], mentre l'altre passa més temps

[17] En Relativitat General, és a dir, amb gravitació, ja no podrà ser "inercial", però igualment fem les mesures amb la mateixa tècnica de tenir molts operaris, cadascun amb el seu rellotge, que van apuntant per on passa la partícula. El problema és que no serà ja possible sincronitzar bé els rellotges entre ells, ni definir les distàncies de manera fixa amb els mètodes dels raigs de llum, així que s'han d'emprar tècniques matemàtiques una mica més sofisticades per organitzar i entendre la informació experimental.
[18] Assenyalem que el darrer dibuix de l'espai-temps tan sols és orientatiu, sense cap rigor matemàtic.

allunyat de l'estrella (podem entendre-ho en termes d'estacions que orbiten al voltant de l'estrella, a diferents altures, i els dos germans es deixen caure de l'exterior a la interior, però un dels dos triga una mica més en "saltar").

Quan els dos germans tornen a veure's, **el bessó que ha passat més temps sotmès a camps gravitatoris més intensos és més jove** (doncs aquest és l'efecte de la gravitació sobre el temps propi, en la Relativitat General).

Aquest efecte dels camps gravitatoris sobre la marxa del temps té, actualment, una aplicació pràctica molt important en els GPS. La diferència de la intensitat del camp gravitatori terrestre sobre la superfície i la seva intensitat a les òrbites dels satèl·lits és prou gran com per que s'hagin de considerar les correccions que ens diu la Relativitat General en els càlculs dels temps. Amb el GPS trobem, per tant, no només una comprovació experimental de la teoria de la Relativitat General, sinó que també, a hores d'ara, la seva única aplicació tecnològica.

Nota final: hem parlat tota l'estona de la curvatura de l'espai-temps, com a objecte abstracte de quatre dimensions, i que cal tractar amb les eines de la Geometria de Riemann. L'espai 3D, en el sentit habitual, té també una curvatura? Efectivament, una de les conseqüències de la curvatura de l'espai-temps és que l'espai pròpiament dit també resulta ser corb, i també pot ser tractat i analitzat en termes d'aquesta curvatura utilitzant les tècniques de la Geometria de Riemann. El que ocorre és que les equacions del moviment de la Relativitat, així com les equacions del camp gravitatori, necessiten ser escrites considerant totes quatre dimensions: en el marc de l'espai-temps. Això però, en alguns contextos, com ara els específics de Cosmologia, sí que se parla de les propietats geomètriques de l'espai 3D, entenent que considerem només una "secció" o "subvarietat" de l'espai-temps, *congelant* la coordenada temporal[19]. La famosa curvatura de la que és parla en les teories sobre origen i final de l'Univers és una curvatura purament espacial, i està associada a aquestes "seccions espacials" de l'espai-temps.

[19] Això, de tota manera, només té sentit fer-ho a partir d'una certa hipòtesi cosmològica, el "Principi Cosmològic", i un Sistema de Referència molt específic, la coordenada temporal del qual rep el nom de "temps cosmològic".