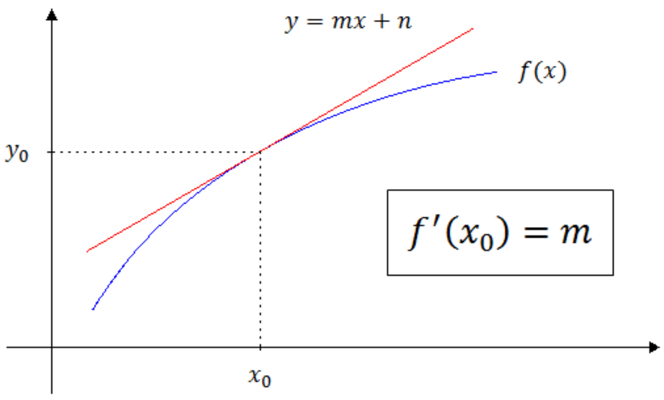
QUADERN d'ESTUDI de RECTES TANGENTS

per a les PAU i 2n de Batxillerat



Autor: Pepe Ródenas Borja
pepe.rodenas.borja@gmail.com
http://manifoldo.weebly.com

Descripció del material: Aquest quadern consisteix en un recull de 31 problemes de 2n de Batxillerat de derivades aplicades a l'estudi de rectes tangents, organitzats en tres sèries A, B i C (*principals*, *de repàs* i *d'ampliació*).

Les indicacions sobre continguts i nivell que acompanyen als problemes faciliten que aquests puguin ser emprats en tres modalitats d'estudi diferents: per a una primera introducció al tema, per al seu repàs, o també com a ampliació i preparació de les PAU.

L'últim de la sèrie A és un problema real de les PAU de 2013, i ha servit com a guia per a graduar la dificultat dels problemes de tota la sèrie. Prèviament als enunciats, hi ha quatre fitxes amb uns petits resums de teoria que l'alumne/a pot consultar, si ho necessita. Al final estan les solucions detallades dels problemes de les tres sèries.

Indicacions per a l'ús dels problemes

Com ja hem dit, hi ha tres maneres diferents d'acostar-se a l'ús d'aquesta col·lecció de problemes: com a *introducció*, com a *repàs* i com a *ampliació*. A grans trets podríem dir que les dues primeres modalitats es basen en l'ús de la sèrie A amb el recolzament de la sèrie B, i que la modalitat d'*ampliació* (o preparació de les PAU, també) està més lligada a la sèrie C.

Cal donar, però, alguns detalls més sobre les característiques de cada sèrie per a poder explicar adientment com es planificaria l'estudi en cada cas.

· **Sèrie A**: els sis "principals", avancen progressivament des d'un problema introductori (A1) fins a un de l'examen de Matemàtiques de les PAU de 2013 (A6). En la capçalera dels seus enunciats s'indica:

- Continguts i nivell [*bàsic - aprofundiment*].
- Fitxes de teoria a consultar.
- Problemes per a pràctica/repàs dels mateixos continguts (sèrie B).

· **Sèrie B**: els quinze oferits com a "pràctica/repàs" d'allò que s'ha treballat en la sèrie A. N'hi ha dos com a mínim per cadascun de tipus A, i quasi tots tenen una estructura molt semblant al tipus A corresponent. No s'ofereixen indicacions sobre continguts temàtics o fitxes de teoria, i les solucions es donen amb una mica menys de detall que els de la sèrie A.

· **Sèrie C**: els deu "d'ampliació". Alguns tracten continguts que estrictament no apareixen al problema A6 (el de les PAU), com ara la recta normal. També n'hi trobarem alguns amb un nivell una mica més elevat que els de la sèrie A. Els quatre últims segueixen un esquema inspirat en l'A6, però inclouen alguns altres conceptes propis de l'estudi de funcions, com ara la simetria o les asímptotes obliqües i horitzontals.

Així doncs, la modalitat *d'introducció* passaria, idealment, per fer en ordre tots els de tipus A, amb la possibilitat d'anar —cada vegada que se n'acabi un— als indicats de la sèrie B per a practicar i assentar les idees. Aquesta modalitat potser sigui la més adient si els problemes es fan al mateix temps que s'està veient a classe (2n de Bat.) el tema de derivades i estudi de funcions. La modalitat de *repàs* és semblant, però es poden saltar tants problemes de tipus A (i els seus B associats) com es consideri convenient. Finalment, la modalitat d'*ampliació* (i preparació de les PAU) seria igual que la de repàs, però incloent també els problemes de tipus C, i sense que tingui gaire importància l'ordre en què es fan els problemes.

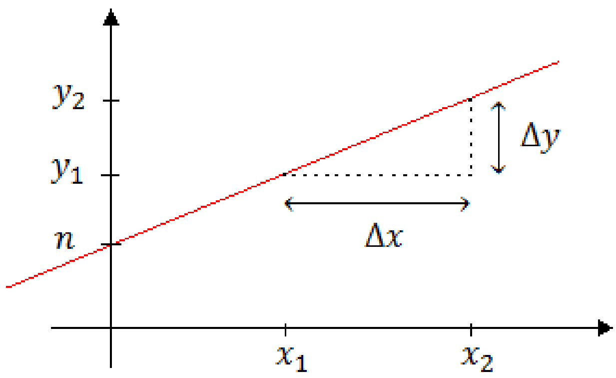
Índex de continguts

- Fitxes (resums de teoria) p.3
- Enunciats sèrie A p.5
- Enunciats sèrie B p.7
- Enunciats sèrie C p.9
- Solucions p.11

RESUMS de TEORIA

FITXA (I) "Equació d'una recta": $\boxed{y = mx + n}$

Queda determinada pels seus dos paràmetres $\left\{ \begin{array}{l} \text{pendent } m: \quad \text{“el que pugem dividit el que avancem”.} \\ \text{ordenada en l'origen } n: \quad x = 0 \ \Rightarrow \ y = n \end{array} \right.$

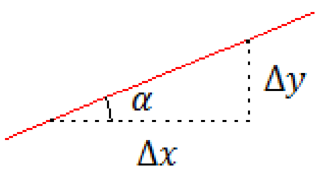


$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

FITXA (II) "Angle d'una recta amb eix X": $\boxed{\alpha = \text{arctg}\,(m)}$

(sent-hi m el pendent de la recta).

Demostració: només cal identificar el triangle rectangle que formem amb la definició del pendent:



α : angle amb eix X

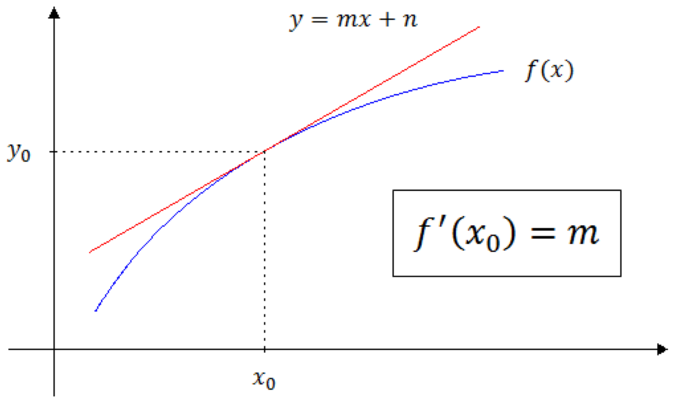
Δx : "el que avancem", és el CC del triangle

Δy : "el que pugem", és el CO del triangle

$$\Rightarrow \ \text{tg}\,\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m \quad \blacksquare$$

FITXA (III) "Significat geomètric de la derivada"

La derivada de la funció $f(x)$ en $x = x_0$, que escriurem com $f'(x_0)$, s'interpreta geomètricament com «el **pendent** de la recta **tangent** a la gràfica d' $f(x)$ en el punt d'abscissa x_0»

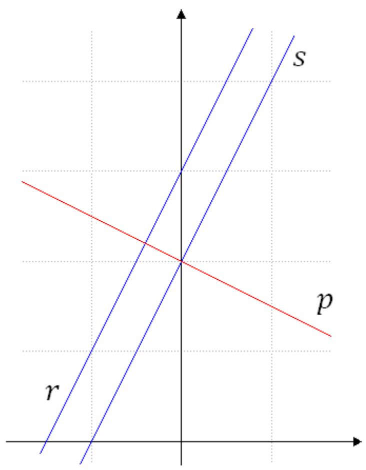


El punt comú a la gràfica d' $f(x)$ i a la recta tangent, de coordenades (x_0, y_0) , rep el nom de "punt de tangència".

FITXA (IV) "Pendents de rectes paral·leles i rectes perpendiculars"

«Dues rectes diferents en el pla, r i s, són **paral·leles** si, i només si, tenen el **mateix pendent**».

Per exemple: $\left.\begin{aligned} r:&\quad y = 2x+3 \\ s:&\quad y = 2x+2 \end{aligned}\right\}$ són paral·leles (doncs el pendent val $m = 2$ per a ambdues).



Si tinguéssim una tercera recta

$$p: \quad y = Mx + N$$

seria **perpendicular** a qualsevol altra recta de pendent m si, i només si,

$$\boxed{M = -\frac{1}{m}}\,.$$

Per exemple, a la gràfica hem representat

$$p: \quad y = -\tfrac{1}{2}x + 2,$$

perpendicular a r i s, i amb ordenada en l'origen $N = 2$.

Enunciats dels «PROBLEMES de TIPUS A»

A1

Continguts: "R. TANGENT a f(x) → pendent i angle amb eix X" (*bàsic*)
FITXES: **I**, **II**, **III**
Pràctiques i repàs: B1, B2

► Sigui la funció $f(x) = x^2$.

a) Troba el pendent de la recta tangent a la seva gràfica en el punt d'abscissa $x = 1$.

b) Quin angle forma aquesta tangent amb l'eix X?

A2

Continguts: "R. TAN. a f(x) → pendent i angle amb eix X" (*aprofundiment*)
FITXES: **II**, **III**
Pràctiques i repàs: B3, B4

► Sigui la corba $f(x) = x^2 - 5x + 2$.

En quin punt la seva recta tangent fa un angle de 45º amb l'eix X?.

A3

Continguts: "R. TAN. a f(x) → trobar la seva equació" (*bàsic*)
FITXES: **I**, **III**
Pràctiques i repàs: B5, B6, B7, B8, B9 (*Nota: B9 inclou també conceptes de l'A1*)

► Sigui la corba $f(x) = 4x^2 + 2$.

Troba l'equació de la seva recta tangent en $x = 1$.

A4

Continguts: "R. TAN. a f(x) → trobar la seva equació" (*aprofundiment*)
FITXES: **I**, **II**, **III**
Pràctiques i repàs: B10, B11

► Sigui la funció $f(x) = x^3$.

Escriu l'equació de la recta tangent a la gràfica d'$f(x)$ en el punt d'abscissa positiva on aquesta tangent fa un angle de 35º amb l'eix X.

A5

Continguts: "R. TANGENT a f(x) → trobar la tangent que sigui paral·lela a una altra recta donada" (*bàsic*)
FITXES: **I**, **III**, **IV**
Pràctiques i repàs: B12, B13

► Troba l'equació de la recta tangent a $f(x) = -x^2 + x - 3$ que sigui paral·lela a la recta $r\colon\ y = -x + 9$.

A6

Continguts: "R. TANGENT a f(x) → trobar la tangent que sigui paral·lela a una altra recta donada" (*aprofundiment*)
FITXES: **III**, **IV**
Pràctiques i repàs: B14, B15

► [*Problema real de les PAU de 2013*]

Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Sabemos que la gráfica de esta función es tangente a la recta $r\colon\ y = x + 3$ en el punto de abscisa $x = -1$ y que en el punto de abscisa $x = 1$ la recta tangente es paralela a la recta *r*.

Calcule el valor de los parámetros *a*, *b* y *c*.

Enunciats dels «PROBLEMES de TIPUS B»

B1.- Sigui la corba $f(x) = x^3$.

- **a)** Troba el pendent de la seva recta tangent en $x = -1$.
- **b)** Quin angle forma aquesta tangent amb l'eix X?

B2.- Sigui la corba $f(x) = 3x^2 - 5$.

- **a)** Troba el pendent de la seva recta tangent en $x = -2$.
- **b)** Quin angle forma aquesta tangent amb l'eix X?

B3.- Sigui la corba $f(x) = -6x^2 + 13$.

En quin punt la seva recta tangent fa un angle de 70º amb l'eix X?

B4.- Sigui la corba $f(x) = 24x^6$.

En quin punt la seva recta tangent fa un angle de 0º amb l'eix X?

B5.- Sigui la corba $f(x) = x\sqrt{x}$.

Troba l'equació de la seva recta tangent en $x = 4$.

B6.- Sigui la corba $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$.

Troba l'equació de la seva recta tangent en $x = 0$.

B7.- Siguin les funcions

- **a)** $f(x) = 3x - 2$
- **b)** $f(x) = 2x^3 + 1$
- **c)** $f(x) = 2/x$

Troba les equacions de les rectes tangents a les seves gràfiques en els punts $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

B8.- Sigui la funció $y = x^3 - 2x + 3$.

Troba l'equació de la recta tangent a la seva gràfica en el punt d'abscissa $x = -1$.

B9.- Sigui la funció $y = 3x^2 - 5x + 1$.

- **a)** Troba l'equació de la seva recta tangent en $x = 2$.
- **b)** Troba l'angle que aquesta tangent fa amb l'eix X.

B10.- Sigui $f(x) = -1/x^2$.

a) Troba tots els punts on la tangent faci $45°$ amb l'eix X.
b) Escriu les equacions de les rectes tangents a *f* en tals punts.

B11.- Sigui $f(x) = 3/x$.

a) Troba tots els punts on la tangent faci $-45°$ amb l'eix X.
b) Escriu les equacions de les rectes tangents a *f* en tals punts.

B12.- Troba l'equació de la recta tangent a $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ que sigui paral·lela a la recta $r\colon\ y = 12$.

B13.- Troba l'equació de la recta tangent a $f(x) = \sqrt{x} + 2$ que sigui paral·lela a la recta $r\colon\ y = 3x - 7$.

B14.- Sigui $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$. Sabem que la gràfica d'aquesta funció és tangent a la recta $r\colon\ y = -2x + 5$ en el punt d'abscissa $x = 1$, i que en el punt d'abscissa $x = 2$ la recta tangent és paral·lela a la recta *r*.

Calcula el valor dels paràmetres *a*, *b* i *c*.

B15.- La funció $f(x) = x^4 + bx^2 + c$ és tangent a l'eix X en l'origen, i en els punts d'abscissa $x = -1$ i $x = 1$ les rectes tangents són paral·leles a aquest eix.

Troba *b* i *c*.

Enunciats dels «PROBLEMES de TIPUS C»

C1.- Sigui la corba $y = x^2 - 6x + 5$. Calcula el punt on es tallen les seves rectes tangents en $x = 3$ i $x = 5$.

C2.- Sigui la corba $y = 3\frac{x}{5-x}$. Calcula el punt on es tallen les seves rectes tangents en $x = 0$ i $x = 2$.

C3.- Sigui la corba $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$. Troba les equacions de les seves rectes tangent i normal en el punt d'abscissa $x = 1$ i ordenada negativa.

C4.- Sigui la corba $x^2 + y^2 = 1$. Troba:

- **a)** l'equació de la seva tangent traçada des del punt $A(3,0)$.
- **b)** l'equació d'una tangent seva que sigui paral·lela a la recta $s\colon\ 4x - 3y + 2 = 0$.

C5.- Troba l'equació de la recta tangent a la corba $2x^2 + y^2 = 1$ que sigui perpendicular a la recta $r\colon\ 4x - 3y + 2 = 0$.

C6.- Escriu l'equació de la recta tangent a la corba $y^2 + 2x^2 = 1$ que forma un angle de 30º amb l'eix X.

C7.- Sigui la funció $f(x) = ae^x + be^{-x}$, sent-hi *a* i *b* diferents de zero.

- **a)** Troba quins valors d'*a* i *b* fan a *f* parell.
- **b)** Troba quins valors d'*a* i *b* fan a *f* senar.
- **c)** Troba quins valors d'*a* i *b* fan que en $x = 1$ la recta tangent a la gràfica d' $f(x)$ sigui paral·lela a $r\colon\ y = x + 2$.

C8.- La funció $f(x) = \frac{A}{e^x + e^{-x}}$ (sent-hi $A \neq 0$) té a la recta *r* com a asímptota quan $x \to \infty$. Troba:

- **a)** L'equació de la recta *r*.
- **b)** ¿Quina és l'abscissa x_0 de l'únic punt de la gràfica d' $f(x)$ on la tangent és paral·lela a *r* ?
- **c)** Calcula el valor d'*A* per a que aquesta tangent talli l'eix X en $y = 1$.

C9.- Sabem que la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ és senar, i en el punt d'abscissa $x = 0$ té l'eix Y com a recta normal a la seva gràfica.

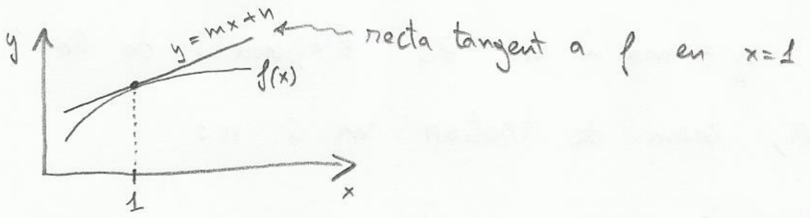
Troba *a* i *b*.

C10.- Sigui la funció $f(x) = \frac{mx^2+xe^{-x}}{x-2e^{-x}}$, que té dues asímptotes obliqües. Troba el valor d'*m* per a que aquestes asímptotes siguin perpendiculars entre sí.

SOLUCIONS

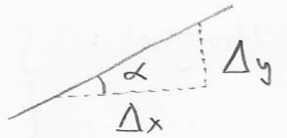
A1

a/ El pendent m de la recta tangent a f en $x=1$ és $m = f'(1)$. Com que $f(x) = x^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f'(x) = 2x$, aleshores: $\boxed{m = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2}$.



b/ L'angle que forma una recta de pendent m amb l'eix X és $\alpha = \operatorname{arctg}(m)$. En el nostre cas,

$$\boxed{\alpha = \operatorname{arctg}(2) = 63{,}43^\circ}$$



$$tg\,\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m.$$

A2

Sigui x_0 l'abscissa del punt on la recta tangent a f fa $\alpha = 45^\circ$ amb l'eix X.

- Si m és el pendent d'aquesta tangent, $m = f'(x_0)$. Com que $f(x) = x^2 - 5x + 2 \Rightarrow f'(x) = 2x - 5$, i per tant: $\boxed{m = 2x_0 - 5}$ (1)
- Per una altra banda, $\alpha = \operatorname{arctg}(m) \Rightarrow$

$$\boxed{m = tg\,\alpha = tg\,45^\circ = 1} \quad (2)$$

[1] i [2] $\Rightarrow 2x_0 - 5 = 1 \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{6}{2} = 3}$.

Calculem l'ordenada del punt:

$$\boxed{y = f(x_0) = (3)^2 - 5\cdot 3 + 2 = 9 - 15 + 2 = \boxed{-4}}.$$

Per tant, concloem que « en el punt $\boxed{(3,-4)}$ la recta tangent a la gràfica d'f fa 45° amb l'eix X ».

$\boxed{A3}$

Si $y = mx + n$ és l'equació de la recta tangent, hem de trobar m i n:

- m (pendent): $\left.\begin{array}{l} f'(1) = m \\ f'(x) = 4\cdot 2x + 0 = 8x \end{array}\right\} \Rightarrow m = 8\cdot 1 \Rightarrow \boxed{m = 8}$

- n (ordenada en l'origen): $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ f(1) = 4\cdot 1^2 + 2 = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ el punt $(1,6)$ és comú a $f(x)$ i a la recta tangent (doncs és el "punt de tangència"), per tant ha de satisfer l'equació $y = mx + n \Rightarrow$
$\Rightarrow 6 = 8\cdot 1 + n \Rightarrow \boxed{n = -2}$.

Per tant, $\boxed{y = 8x - 2}$ és l'equació de la recta tangent.

$\boxed{A4}$

Si $y = mx + n$ és l'equació de la recta tangent, hem de trobar m i n:

- m: $\boxed{m = tg\,\alpha = \boxed{tg\, 35^\circ}} = 0{,}7002$

- n: necessitem les coordenades (x_0, y_0) del punt on la recta és tangent a $f(x)$, per a substituir en $y = mx + n$ i aïllar n.

Utilitzem que $f'(x_0) = m = tg\,35°$; com que

$f'(x) = 3x^2$, llavors: $3x_0^2 = tg\,35° \Longrightarrow x_0 = \pm\sqrt{\dfrac{tg\,35°}{3}}$,

i triem el signe ⊕ perquè l'enunciat ens diu que el punt ha de tenir l'abscissa positiva: $\boxed{x_0 = \sqrt{\dfrac{tg\,35°}{3}} = 0{,}4831}$

$$\Longrightarrow \boxed{y_0 = f(x_0) = (x_0)^3 = \left(\frac{tg\,35°}{3}\right)^{3/2} = 0{,}1128}.$$

Portem els valors que hem trobat per a m, x_0 i y_0 a $y = mx + n$:

$$\left(\frac{tg\,35°}{3}\right)^{3/2} = (tg\,35°)\cdot\left(\frac{tg\,35°}{3}\right)^{1/2} + n \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{n = \frac{(tg\,35°)^{3/2}}{\sqrt{3}}\underbrace{\left(\frac{1}{3} - 1\right)}_{= -\frac{2}{3}} = -2\left(\frac{tg\,35°}{3}\right)^{3/2}} = -0{,}2256$$

Tot plegat, l'equació de la recta tangent que busquem s'escriu:

$$\boxed{y = 0{,}700 \cdot x - 0{,}226}$$

//

A5

Si l'equació de la recta tangent t que busquem té la forma $t: y = mx + n$, llavors

$\underline{m}$: per ser t paral·lela a r, tindran el mateix pendent: $\boxed{m = -1}$.

$\underline{n}$: necessitem les coordenades (x_0, y_0) del punt on t és tangent a $f(x)$. Utilitzem que $f'(x_0) = m = -1$, i com que $f'(x) = -2x + 1$, llavors:

$$-2x_0 + 1 = -1 \Longrightarrow \boxed{x_0 = \frac{-2}{-2} = 1}$$

$\Rightarrow \boxed{y_0 = f(x_0) = -(1)^2 + 1 - 3 = -3}$

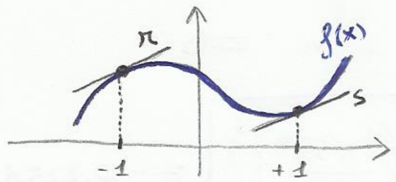
Portem els valors que hem trobat per a m, x_0 i y_0 a $y = mx + n$:

$-3 = -1 \cdot 1 + n \Rightarrow \boxed{n = -2}$, i per tant la recta que busquem té per equació:

$$\boxed{y = -x - 2}$$

A6

Imaginem que la corba següent és la gràfica de la nostra funció:



... on hem anomenat s a la recta tangent en $x = 1$, i l'hem dibuixada paral·lela a la recta r, com diu l'enunciat.

Com que hem de determinar el valor de tres paràmetres a, b i c, necessitarem un sistema de tres equacions.

1.- Trobarem la 1a eq. relacionant el valor de la derivada d' $f(x)$ en $x = -1$ amb el pendent de la seva tangent en aquest punt, r: $f'(-1) = 1$.

Com que $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, llavors:

$3 \cdot (-1)^2 + 2a \cdot (-1) + b = 1 \Rightarrow \boxed{2 - 2a + b = 0}$ eq. (1)

2.- Trobem la 2a eq. fent el mateix en $x = 1$. L'enunciat no ens dóna l'eq. de la tangent en aquest punt, s, però ens diu que és paral·lela a r. Per tant, tenen el mateix pendent:

$f'(1) = 1 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 1 \Rightarrow \boxed{2 + 2a + b = 0}$ eq. (2)

Observem que amb eqs. [1] i [2] ja podem determinar a i b:

$$[1] + [2] \Longrightarrow 4 + 2b = 0 \Longrightarrow \boxed{b = -2}$$

$$\xrightarrow{\text{eq. } [2]} 2 + 2a - 2 = 0 \Longrightarrow \boxed{a = 0}$$

3.- La tercera equació la trobarem exigint que les coordenades del punt de tangència d'r i f satisfacin $y_0 = f(x_0)$. Podem saber aquestes coordenades perquè l'enunciat ens dóna l'equació d'r:

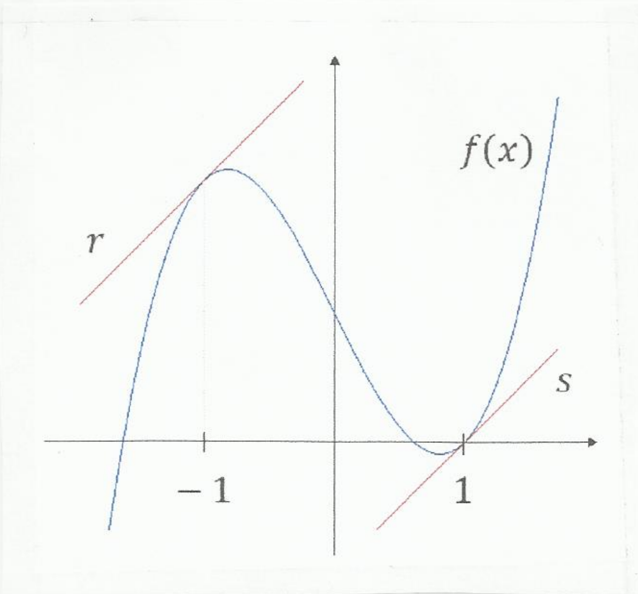
$$\left. y_0 = x_0 + 3 \underset{x_0 = -1}{=} -1 + 3 = 2 \right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2 = f(-1) \underset{a=0,\ b=-2}{=} (-1)^3 + 0 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + c = (*)$$

$$[*] = -1 + 2 + c$$

$$\Longrightarrow \boxed{c = 1}.$$

En conseqüència, hem trobat que $\boxed{f(x) = x^3 - 2x + 1}$.



B1

a/ $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow \boxed{m = f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 = 3}$ ■

b/ $\alpha = \text{arctg}(m) \Rightarrow \boxed{\alpha = \text{arctg}\, 3 = 71{,}57°}$ ■

B2

a/ $f'(x) = 6x \Rightarrow \boxed{m = f'(-2) = 6\cdot(-2) = -12}$ ■

b/ $\alpha = \text{arctg}(m) \Rightarrow \boxed{\alpha = \text{arctg}(-12) = -85{,}24°}$ ■

B3

Signi x_0 l'abscissa del punt que ens demanen, i m el pendent de la tangent, $m = f'(x_0)$.

Com que $f'(x) = -12x \Rightarrow \boxed{m = -12x_0}$

A més a més, $\boxed{m = \text{tg}\,\alpha = \text{tg}\, 70°} = 2{,}75$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow -12x_0 = \text{tg}\, 70° \Rightarrow \boxed{x_0 = -\frac{\text{tg}\, 70°}{12}} = -0{,}229$;

en calculem l'ordenada: $f(x_0) = -6\cdot\left(-\frac{\text{tg}\, 70°}{12}\right)^2 + 13 = 12{,}7$,

d'on $\boxed{(-0'229,\ 12'7)}$ són les coordenades del punt demanat.

B4

$m = f'(x_0)$; $f'(x) = 144x^5 \Rightarrow \boxed{m = 144x_0^5}$;

$m = \text{tg}\, 0° = 0 \Rightarrow 0 = 144x_0^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x_0 = \sqrt[5]{0} = 0}$; l'ordenada val: $f(x_0) = 24x_0^6 = 24\cdot 0^6 = 0$,

d'on $\boxed{(0,0)}$ són les coordenades del punt demanat.

B5

$y = mx + n$

$\underline{\underline{m}}: \left\{ \begin{array}{l} f'(4) = m \\ f'(x) = (x \cdot x^{1/2})' = (x^{3/2})' = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{2}\sqrt{4} = m$

$\Rightarrow \boxed{m = 3}$

$\underline{\underline{n}}: \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ f(4) = 4 \cdot \sqrt{4} = 4 \cdot 2 = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow$ substituint les coordenades del punt de tangència, i el valor d'm que hem trobat, en l'eq. de la recta:

$8 = 3 \cdot 4 + n \Rightarrow \boxed{n = -4}$

En conseqüència, $\boxed{y = 3x - 4}$

B6

$y = mx + n$

[multipliquem per $\frac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}$]

$\underline{\underline{m}}: \left\{ \begin{array}{l} f'(0) = m \\ f'(x) = \dfrac{2x\sqrt{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot x^2}{(\sqrt{x+1})^2} = \dfrac{4x(x+1) - x^2}{2\sqrt{x+1} \cdot (x+1)} = \end{array} \right.$

$= \dfrac{4x^2 + 4x - x^2}{2(x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot (x+1)} = \dfrac{3x^2 + 4x}{2(x+1)^{3/2}} = \dfrac{(3x+4)x}{2(x+1)^{3/2}}$

$\Rightarrow \dfrac{(3 \cdot 0 + 4) \cdot 0}{2(0+1)^{3/2}} = m \Rightarrow \boxed{m = \dfrac{0}{2 \cdot 1^{3/2}} = 0}$

$\underline{\underline{n}}: \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ f(0) = \dfrac{0^2}{\sqrt{0+1}} = \dfrac{0}{1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$ substituint en eq. de la recta:

$0 = 0 \cdot 0 + n \Rightarrow \boxed{n = 0}$

En conseqüència, $\boxed{y = 0}$ és la recta tangent.

B7

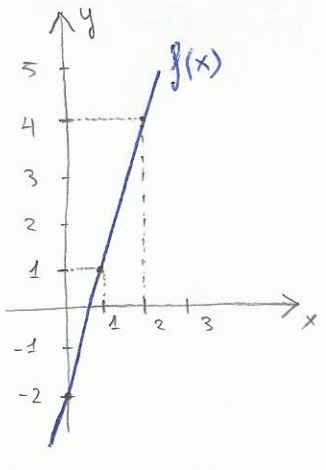
NOTA PRÈVIA: Aquest problema segueix exactament el mateix esquema que A3, B5 i B6, però en aquells ens demanen trobar només una equació de recta tangent i ara ho hem de fer $3 \cdot 5 = 15$ vegades. Per això, serà convenient sistematitzar el procediment que ja coneixem amb l'ús d'una taula, on només ficarem els resultats dels càlculs — que anirem fent apart, en un paper d'esborrany —.

- Designarem com a (x_0, y_0) les coordenades del punt on, cada cop, volem trobar la tangent (o "punt de tangència").

a/ $f(x) = 3x - 2 \Rightarrow f'(x) = 3$

DADA: abscissa del punt de tangència x_0	pendent de la recta tangent $m = f'(x_0)$	ordenada del punt de tangència $y_0 = f(x_0)$	ordenada en l'origen de la recta tangent $n = y_0 - m x_0$	RESULTAT: eq. de la recta tangent $\boxed{y = mx + n}$
$x_0 = -2$	$m = 3$	$y_0 = 3\cdot(-2)-2 = -8$	$n = -8 + 3\cdot 2 = -2$	$\boxed{y = 3x - 2}$
-1	3	-5	-2	$y = 3x - 2$
0	3	-2	-2	$y = 3x - 2$
1	3	1	-2	$y = 3x - 2$
2	3	4	-2	$y = 3x - 2$

- La primera fila de la taula (per a $x_0 = -2$) l'hem feta en detall com a exemple.
- Totes les tangents tenen la mateixa equació, que és també la de la funció original. Això és perquè es tractava d'una recta, i en qualsevol punt la tangent a una recta és ella mateixa.



b/

$$f(x) = 2x^3 + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2$$

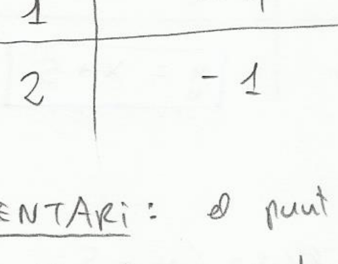
x_0	$m = f'(x_0)$	$y_0 = f(x_0)$	$n = y_0 - m x_0$	$\boxed{y = mx + n}$
-2	24	-15	33	$y = 24 + 33$
-1	6	-1	5	$y = 6x + 5$
0	0	1	1	$y = 1$
1	6	3	-3	$y = 6x - 3$
2	24	17	-31	$y = 24x - 31$

c/

$$f(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{4}{x^2}$$

x_0	$m = f'(x_0)$	$y_0 = f(x_0)$	$n = y_0 - m x_0$	$\boxed{y = mx + n}$
-2	-1	-1	-3	$y = -x - 3$
-1	-4	-2	-6	$y = -4x - 6$
0	$\nexists m \ (\to \mp\infty)$	$\nexists y_0 \ (\to \pm\infty)$	$\nexists n$	$\nexists$ recta tangent, però sí A.V.
1	-4	$+2$	6	$y = -4x + 6$
2	-1	1	3	$y = -x + 3$

COMENTARI: el punt $x_0 = 0$ no pertany al domini de la funció, donçs produeix una anul·lació de denominador. Això provoca que existeixi una asímptota vertical $\boxed{x = 0}$:



Podem veure les asímptotes com una generalització de les rectes tangents: serien "rectes tangents a la funció tals que el punt de tangència es troba a l'infinit". En la nostra $f(x) = \frac{2}{x}$, podríem imaginar que l'asímptota vertical $x = 0$ és com una mena de "tangent a la gràfica d'f en els punts $(0, +\infty)$ i $(0, -\infty)$". (Hem de recordar, però, que $(0, +\infty)$ i $(0, -\infty)$ no són estrictament punts del pla, i el que estem dient és només un enfocament intuitiu del significat de les asímptotes).

Anàlogament, la nostra funció —que és una hipèrbola equilàtera— té una asímptota horitzontal en $y = 0$. Aquesta A.H. la podríem veure com una "tangent a f en els punts $(+\infty, 0)$ i $(-\infty, 0)$.

Aquesta interpretació de les asímptotes com a "rectes tangents en l'infinit" tornarà a sortir als problemes $\boxed{C8}$ i $\boxed{C10}$.

B8

Direm (x_0, y_0) al punt de tangència i farem una taula com les de B7:

$$f(x) = x^3 - 2x + 3 \implies f'(x) = 3x^2 - 2$$

x_0	$m = f'(x_0)$	$y_0 = f(x_0)$	$n = y_0 - m x_0$	$y = mx + n$
-1	$3\cdot(-1)^2 - 2 = 1$	$(-1)^3 + 2\cdot 1 + 3 = 4$	$4 + 1\cdot 1 = 5$	$\boxed{y = x + 5}$

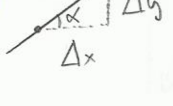
B9

a/ Fem com en B8:

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 1 \implies f'(x) = 6x - 5$$

x_0	$m = f'(x_0)$	$y_0 = f(x_0)$	$n = y_0 - m x_0$	$y = mx + n$
2	$6\cdot 2 - 5 = 7$	$3\cdot 4 - 10 + 1 = 3$	$3 - 7\cdot 2 = -11$	$\boxed{y = 7x - 11}$

b/ $\boxed{\alpha = \text{arctg}\,(m) = \text{arctg}\, 7 = 81{,}87^\circ}$



$\text{tg}\,\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$

(Nota: veure FITXA (II)).

B10

a/ $\boxed{m = f'(x_0) = \boxed{2\,\frac{1}{x_0^3} = tg\,45° = 1}} \Rightarrow 2 = x_0^3$

$f'(x) = -2\,\frac{1}{x^3}$ $\qquad \alpha = 45°$

$\Downarrow$

$\boxed{x_0 = \sqrt[3]{2}} = 1{,}250$

Només existeix un punt, perquè l'equació $2 = x_0^3$ només té una solució. Trobem l'ordenada del punt: $\boxed{y_0 = f(x_0) = -\frac{1}{x_0^2} = -2^{-2/3}} = -0{,}6300$

$\Rightarrow$ «Al punt $\boxed{(1'250\ ,\ -0'6300)}$ la tangent fa 45° amb l'eix X.» ■

b/ $\boxed{n = y_0 - m x_0 = -0{,}6300 - 1 \cdot 1{,}250 = -1{,}880}$

$\Rightarrow$ $\boxed{y = x - 1{,}880}$ equació de la tangent en el punt. ■

B11

a/ $\boxed{m = f'(x) = \boxed{-\frac{6}{x^2} = tg(-45°) = -1}} \Rightarrow 6 = x^2$

$(3/x)' = -6/x^2$ $\qquad \alpha = -45°$

$\Downarrow$

$\boxed{x = \pm\sqrt{6}}$

Existeixen dos punts que satisfacin la condició $\alpha = -45°$. Trobem les ordenades: Els direm (x_0, y_0) i (x_1, y_2).

$\boxed{x_0 = \sqrt{6} = 2{,}449} \Rightarrow \boxed{y_0 = \frac{3}{\sqrt{6}} = 1{,}225} \Rightarrow$

$\Rightarrow n_0 = y_0 - m x_0 = 1{,}225 + 1 \cdot 2{,}449 = 3{,}674$

$\boxed{x_1 = -\sqrt{6} = -2{,}449} \Rightarrow \boxed{y_1 = -\frac{3}{\sqrt{6}} = -1{,}225} \Rightarrow$

$\Rightarrow n_1 = y_1 - m x_1 = -1{,}225 + 1 \cdot (-2{,}449) = -3{,}674$

« La tangent a f farà -45 amb eix X en els punts $\boxed{P_0\,(2'449\ ,\ 1'225)}$ i $\boxed{P_1\,(-2'449\ ,\ -1'225)}$ » ■

Hem calculat també les ordenades en l'origen de cadascuna de les rectes tangents, n_0 i n_1, perquè sabem que les necessitarem en l'apartat següent:

b/ Equacions de les tangents:

$$\begin{cases} \text{en } P_0: & \boxed{y = -x + 3{,}674} \\ \text{en } P_1: & \boxed{y = -x - 3{,}674} \end{cases}$$

B12

A la recta tangent que busquem li direm t, d'equació $t: \; y = mx + n$.

$\underline{\underline{m}}$: t i r són paral·leles $\Rightarrow$ tenen el mateix pendent: $\boxed{m = 0}$.

$\underline{\underline{n}}$: trobem punt (x_0, y_0) on t és tangent a f:

$$m = f'(x_0) = 0 \Rightarrow 6x_0^2 - 6 = 0 \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{\frac{6}{6}} = \pm 1$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6$$

Hem trobat dos punts on la tangent és paral·lela a r.

Anem a anomenar-los: $P_1(x_1, y_1)$, el corresponent a $x = +1$, i $P_2(x_2, y_2)$, el corresponent a $x = -1$ (prescidirem, doncs, de la notació "sub-zero" x_0, y_0 per al punt de tangència). Calculem per cadascun:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 + 1 = -3 \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \boxed{n_1 = y_1 - m x_1 = -3 - 0 \cdot 1 = -3} \\ x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = f(x_2) = 2 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot 1 + 1 = 5 \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \boxed{n_2 = y_2 - m x_2 = 5 + 0 \cdot 1 = 5} \end{cases}$$

« Per tant, $\left\{ \boxed{y_1 = -3}, \; \boxed{y_2 = 5} \right\}$ són les dues tangents a f que són, a més, paral·leles a r »

Punts de tangència: $\begin{cases} P_1(1, -3) \\ P_2(-1, 5) \end{cases}$.

B13 Sigui $t: y = mx + n$ la recta tangent que busquem. Llavors:

$\underline{m}$: per ser t i r paral·leles, tindran el mateix pendent: $\boxed{m = 3}$

$\underline{n}$: trobem el punt (x_0, y_0) on t és tangent a f:

$$m = f'(x_0) = 3 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = 3 \Rightarrow \boxed{x_0 = \left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)^2 = \frac{1}{36}} = 0{,}02\overline{7}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y_0 = f(x_0) = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2} + 2 = \frac{1}{6} + 2 = 13/6}$$

$$\Rightarrow \boxed{n = y_0 - mx_0 = \frac{13}{6} - 3\,\frac{1}{36} = \frac{26-1}{12} = \frac{25}{12}} = 2{,}08\overline{3}.$$

En conseqüència, $\boxed{t:\ y = 3x + \frac{25}{12}}$

B14 Com que hem de determinar tres paràmetres, buscarem tres equacions per a fer un sistema.

1.- En $x = 1$ f i r són tangents $\Rightarrow f'(1) = -2$

Com que $\boxed{f'(x) = 6x^2 + 2ax + b}$, llavors

$$6\cdot 1^2 + 2a\cdot 1 + b = -2 \Rightarrow \boxed{8 + 2a + b = 0} \quad \text{eq. (1)}$$

2.- En $x = 2$ la tangent és paral·lela a $r \Rightarrow f'(2) = -2$, i per tant: $6\cdot 2^2 + 2a\cdot 2 + b = -2 \Rightarrow \boxed{26 + 4a + b = 0}$ eq. (2)

Restem les dues equacions: $[2] - [1] \Rightarrow 18 + 2a = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{a = -9} \underset{\text{eq. [1]}}{\Rightarrow} 8 - 2\cdot 9 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 10}.$$

3.- Per a determinar c, calculem la coordenada y_0 del punt de tangència entre r i f en $x_0 = 1$, i exigim que $y_0 = f(x_0)$:

$$y_0 = -2x_0 + 5 = -2\cdot 1 + 5 = \boxed{3}$$

$$= f(x_0) = \underbrace{2\cdot 1^3 + (-9)\cdot 1^2 + 10\cdot 1}_{2 - 9 + 10 = 3} + c = \boxed{3 + c}$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 0}$$

(usem els valors d'a i b que ja hem trobat).

Concloem que $\boxed{f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 10}$ //

B15 La corba $f(x)$ és tangent a l'eix X en l'origen, i això ja ens està dient que $f(x)$ passa per l'origen, $f(0) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0}$.

Analitzem ara la seva derivada, $\boxed{f'(x) = 4x^3 + 2bx}$.

Com que la recta tangent a f en $x = 1$ és paral·lela a l'eix X (que és una recta d'equació $y = 0$), llavors el seu pendent és $m = 0$. Per tant,

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 4\cdot 1^3 + 2b\cdot 1 = 0 \Rightarrow \boxed{b = -\frac{4}{2} = -2}$$

En conseqüència, hem trobat que $\boxed{f(x) = x^4 - 2x}$ ■

NOTA: si usem l'altra condició, $f'(-1) = 0 \Rightarrow -4 - 2b = 0$, és a dir: trobem una equació equivalent a la trobada en $x = 1$ (per tant, ambdues maneres de resoldre el problema són vàlides i condueixen al mateix resultat). En canvi, si haguéssim tractat d'emprar la corresponent condició en l'origen, $f'(0) = 0 \Rightarrow 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$; és a dir: hauríem trobat una equació que no ens ajuda gaire, i necessitaríem continuar buscant més equacions (anant a $x = -1$ ó a $x = 1$). //

C1

Trobem les equacions de les dues tangents amb el procediment de la taula (veure B7):

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow f'(x) = 2x - 6$$

x_0	$m = f'(x_0)$	$y_0 = f(x_0)$	$n = y_0 - mx_0$	$y = mx + n$
3	$2\cdot 3 - 6 = 0$	$(3)^2 - 6\cdot 3 + 5 = -4$	$-4 - 0 = -4$	$\boxed{y = -4}$
5	$2\cdot 5 - 6 = 4$	$(5)^2 - 6\cdot 5 + 5 = 0$	$0 - 4\cdot 5 = -20$	$\boxed{y = 4x - 20}$

El punt de tall ès comú a ambdues rectes tangents, i per tant les seves coordenades (x, y) seran solució del sistema format per les respectives equacions (que acabem de trobar):

$$\begin{cases} y = -4 \\ y = 4x - 20 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = -4} \qquad \Rightarrow -4 = 4x - 20 \xrightarrow{\boxed{:4}} -1 = x - 5 \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

Per tant, «les dues tangents es tallen en el punt $(4, -4)$» //

C2

$$\boxed{f(x) = 3\,\frac{x}{5-x}} \Rightarrow f'(x) = 3\,\frac{1\cdot(5-x) + 1\cdot x}{(5-x)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{15}{(5-x)^2}}$$

x_0	$m = f'(x_0)$	$y_0 = f(x_0)$	$n = y_0 - mx_0$	$y = mx + n$
0	$\frac{15}{(5-0)^2} = \frac{3\cdot 5}{5\cdot 5} = \frac{3}{5}$	$3\cdot\frac{0}{5-0} = 0$	$0 - \frac{3}{5}\cdot 0 = 0$	$\boxed{y = \frac{3}{5}x}$
2	$\frac{15}{(5-2)^2} = \frac{3\cdot 5}{3\cdot 3} = \frac{5}{3}$	$3\,\frac{2}{(5-2)} = \frac{\cancel{3}\cdot 2}{\cancel{3}} = 2$	$2 - \frac{5}{3}\cdot 2 = -\frac{4}{3}$	$\boxed{y = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}}$

Intersecció de les tangents:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{5}x \quad (*) \\ y = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{5}x = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3} \xrightarrow{\otimes\, 5\cdot 3} 9x = 25x - 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20 = 16x \Rightarrow \boxed{x = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}}$$

Calculem l'ordenada amb [*]: $y = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \Longrightarrow$

$$\boxed{\text{Les dues tangents es tallen en el punt } \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right).}$$

//

C3

Hem d'aïllar y en l'equació que ens dóna l'enunciat per a deixar-la expressada en funció d'x:

$$y^2 = 2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \Longrightarrow y = \pm\sqrt{2 - \frac{x^2}{2}}$$

En principi, podria ser vàlid qualsevol dels dos signes, però l'enunciat ens diu que ens interessa un punt d'ordenada negativa. Per tant, rebutgem el ⊕ i fem:

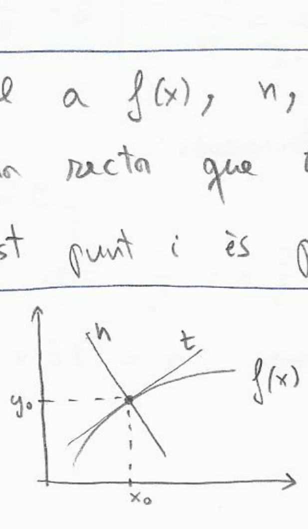
$$\boxed{f(x) = -\sqrt{2 - \frac{x^2}{2}}} \Longrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{\cancel{-}1}{2\sqrt{2 - \frac{x^2}{2}}}\left(\cancel{-}\frac{1}{\cancel{2}}\right)\cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{8 - 2x^2}}}$$

• Trobem la tangent, t (li direm "b" a la seva ordenada en l'origen — per a no confondre'ns amb la lletra amb que designarem la normal —):

x_0	$m = f'(x_0)$	$y_0 = f'(x_0)$	$b = y_0 - mx_0$	$y = mx + b$
1	$\frac{1}{\sqrt{8-2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\sqrt{2 - \frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{6}} = -\frac{\sqrt{9}+1}{\sqrt{6}} = \frac{-4}{\sqrt{6}}$	$y = \frac{x}{\sqrt{6}} - \frac{4}{\sqrt{6}} \Longrightarrow \boxed{y = 0{,}4082x - 1{,}633}$

• Trobem la normal, n:

La recta normal a $f(x)$, n, en un punt (x_0, y_0) és una recta que talla a la gràfica d'$f(x)$ en aquest punt i és perpendicular a la tangent.



Com que nosaltres ja hem trobat l'equació de la tangent t en $(x_0, y_0) = \left(1, -\sqrt{3/2}\right)$, sabem que el seu pendent és $m = 1/\sqrt{6}$ i podríem aplicar directament l'equació de la FITXA IV : $\boxed{M = -\frac{1}{m} = -\sqrt{6} = -2{,}449}$,

sent-hi M el pendent de la recta normal que busquem, $\boxed{n:\quad y = Mx + B}$. Llavors, trobaríem l'ordenada en l'origen B exigint que (x_0, y_0) sigui solució de l'equació d'n:

$$-\sqrt{\frac{3}{2}} = -\underbrace{\sqrt{6}}_{\sqrt{3}\sqrt{2}} \cdot 1 + B \Rightarrow B = \sqrt{3}\left(\underbrace{\sqrt{2}}_{\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{3}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}225}$$

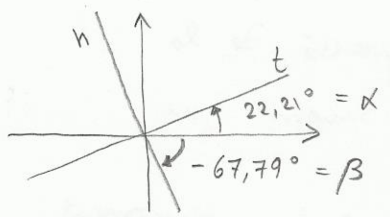
En conclusió, podem dir que la tangent t i la normal n a la corba en el punt $\left(1, -\sqrt{3/2}\right)$ tenen per equacions:

$$\boxed{\begin{cases} t: \quad y = \frac{1}{\sqrt{6}}(x - 4) \\ n: \quad y = -\sqrt{6}\,x + \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}} \begin{array}{l} \Rightarrow y = 0{,}4082\,x - 1{,}633 \\ \Rightarrow y = -2{,}449\,x + 1{,}225 \end{array}$$

■

Anem a justificar, però, amb una mica més de detall el valor del pendent d'n que hem calculat amb la fórmula de FITXA IV : l'angle amb l'eix X de la recta t seria $\boxed{\alpha = \text{arctg}(m) = \text{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 22{,}21^\circ}$.

Fent un dibuix podem veure que l'angle β amb l'eix X de la normal n que busquem



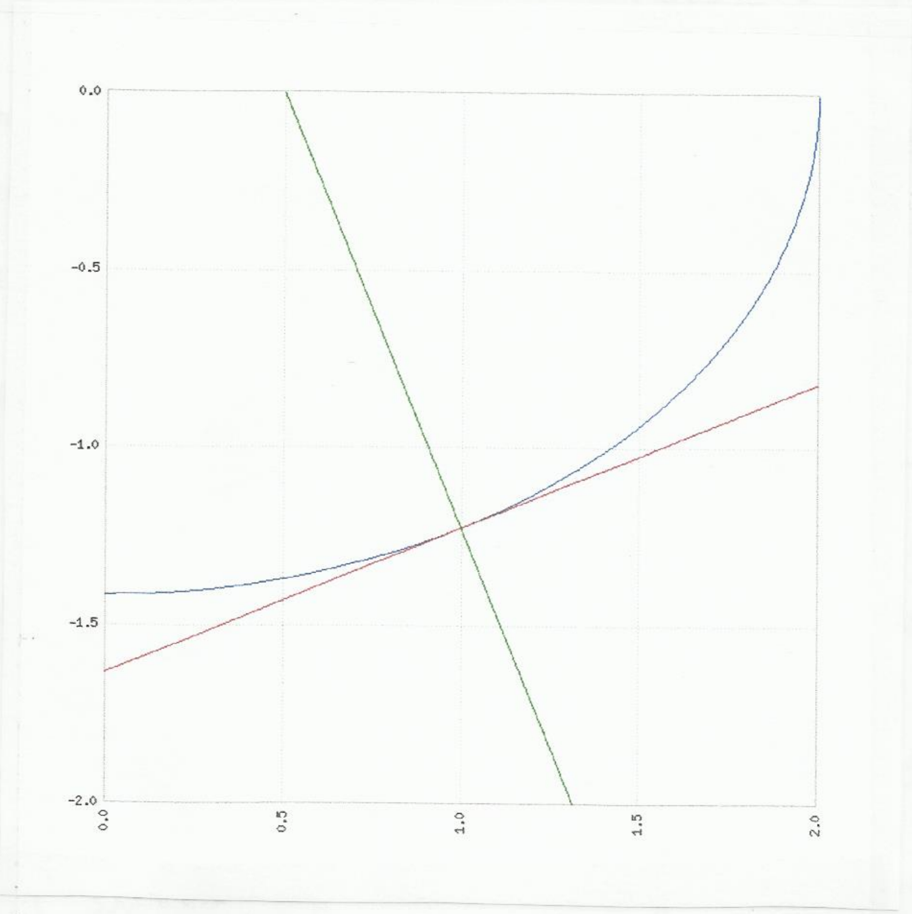
és: $\boxed{\beta = -(90° - \alpha)} =$

$$= -\left(90° - \underbrace{\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{6}}}_{22,21°}\right) = -67,79°$$

Comprovem, doncs, que el pendent que abans hem calculat és consistent amb aquest raonament geomètric:

$$M = tg\,\beta = tg\left[\underbrace{-\left(90° - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{6}}\right)}_{=-67,79°}\right] = -2,449 \quad \blacksquare$$

Presentem a continuació la representació gràfica de la corba f (blau) i les rectes t (vermell) i n (verd):



C4 a/ $x^2+y^2=1 \Rightarrow y^2 = 1-x^2 \Rightarrow \boxed{y = \pm\sqrt{1-x^2}}$

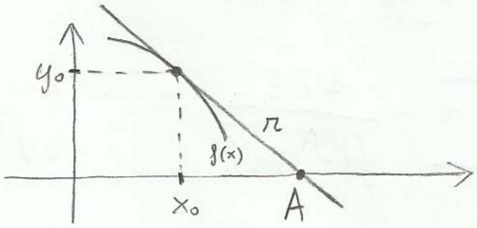
Ambdues funcions $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{1-x^2} \\ g(x) = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right\}$ tenen com a gràfiques corbes tals que tots els seus punts satisfan l'equació que ens dóna l'enunciat.
Ambdues corbes són vàlides, doncs, i amb la informació que tenim no comptem amb cap criteri per triar-ne una, així que nosaltres, arbitràriament, treballarem amb la "branca superior" (la corresponent al signe ⊕), $f(x)$:

$$\boxed{f(x) = \sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} \cdot (-\cancel{2}x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Sigui $r: y = mx+n$ la recta tangent a f que passa per $A(3,0)$, segons ens demana l'enunciat.

Imaginem que r i f són tangents en un punt de coordenades (x_0, y_0). Aleshores, aquest punt ha de satisfer l'equació d'r:

eq. (1) $\boxed{y_0 = m x_0 + n}$



Per una altra banda,
les coordenades d'A també han de satisfer l'equació d'r:

$\boxed{0 = m \cdot 3 + n}$ eq. (2)

Eliminem n restant [1] - [2]: $y_0 = m x_0 - m \cdot 3$

$\Rightarrow \boxed{m = \frac{y_0}{x_0 - 3}}$ eq. (3)

NOTA: podíem haver arribat a eq. [3] directament aplicant la fórmula per a m de la FITXA Ⓘ: $m = \frac{y_A - y_0}{x_A - x_0} = \frac{-y_0}{3-x_0}$ ▨

Aquesta m, però, sabem que ha de ser igual a $f'(x_0)$:

$$\boxed{m = -\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}} \quad \text{eq. (4)}$$

Amb [3] i [4] tenim un sistema de dues equacions i tres incògnites (m, x_0 i y_0): no són suficients equacions. Usarem que el punt de tangència també ha de satisfer l'equació d'f, $y_0 = f(x_0)$, per a desfer-nos de l'y_0 en eq. [3]:

$$m \underset{[3]}{=} \frac{y_0}{x_0-3} = \frac{f(x_0)}{x_0-3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{m = \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{x_0-3}} \quad \text{eq. (5).}$$

Igualant [4] = [5]: $-\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}} = \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{x_0-3} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \underbrace{-(x_0^2 - 3x_0)}_{= -x_0^2 + 3x_0} = 1 - x_0^2 \Longrightarrow \boxed{x_0 = 1/3} \underset{[4]}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \boxed{m = -\frac{1/3}{\sqrt{1-(1/3)^2}} = -\frac{1}{3\sqrt{1-\frac{1}{9}}} = -\frac{1}{\sqrt{9-1}} = -\frac{1}{\sqrt{8}}}$$

Trobem n portant aquest valor d'm a l'eq. [2]:

$$0 = 3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{8}}\right) + n \Longrightarrow \boxed{n = \frac{3}{\sqrt{8}}}$$

En definitiva, l'equació de la recta r que passa per A i és tangent a $f(x)$ és:

$$\boxed{y = -\frac{1}{\sqrt{8}}x + \frac{3}{\sqrt{8}}} \quad \blacksquare$$

b/ Anem a fer aquest apartat triant el signe ⊖ de l'arrel, al contrari que hem fet abans, de manera que la "branca inferior" de la nostra corba quedarà descrita per la funció

$$\boxed{g(x) = -\sqrt{1-x^2}} \Longrightarrow \boxed{g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

Per una altra banda, hem de ficar l'equació de la recta s en la forma $y = Mx + N$ per tal de poder identificar el seu pendent M:

$$4x - 3y + 2 = 0 \Longrightarrow 3y = 4x + 2 \Longrightarrow \boxed{y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}},$$

d'on veiem que $\boxed{M = 4/3}$. Així doncs, si (x_1, y_1) és el punt de tangència, llavors $g'(x_1) = M \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}} = \frac{4}{3}} \text{ eq.(6)} \xrightarrow[(\dots)^2]{} \frac{x_1^2}{1-x_1^2} = \frac{16}{9} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 9x_1^2 = 16 - 16x_1^2 \Longrightarrow 25x_1^2 = 16 \Longrightarrow \boxed{x_1 = \pm\frac{4}{5}};$$

⊕

aquí ens cal rebutjar ⊖ perquè representa una "falsa solució" que hem introduït quan hem elevat [6] al quadrat (pot veure's que l'únic valor que la satisfà és el corresponent a ⊕); per tant, trobem l'ordenada del punt de tangència:

$$\boxed{y_1 = g(x_1) = -\sqrt{1-x_1^2} = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{25-16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}}.$$

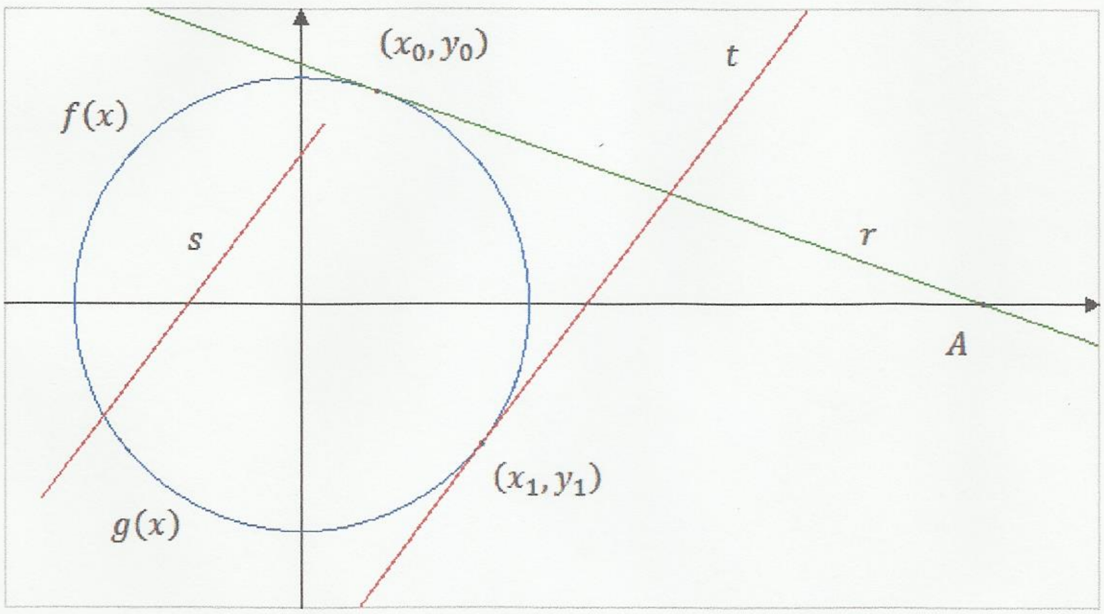
Si designem com a t: $y = Mx + B$ la tangent que volem conèixer, trobem la seva ordenada en l'origen substituint a l'equació els M, x_1 i y_1 que hem trobat:

$$-\frac{3}{5} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} + B \Rightarrow \boxed{B = -\frac{9+16}{3 \cdot 5} = -\frac{25}{3 \cdot 5} = -\frac{5}{3}}$$

En conseqüència, la tangent t paral·lela a s té per equació:

$$\boxed{y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}}$$ ■

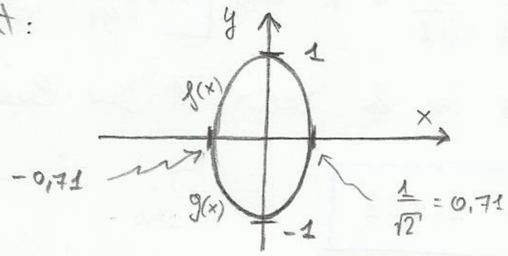
NOTA: la corba del pla definida per l'equació $x^2 + y^2 = 1$ és una circumferència de radi unitat amb centre en l'origen. Les dues funcions $f(x)$ i $g(x)$ que hem trobat, segons triéssim el signe ⊕ ó ⊖ en l'arrel, són les seves semicircumferències superior i inferior, respectivament. Heus aquí la representació gràfica d'aquesta circumferència, les dues tangents r i t, i la recta s:



C5 La corba definida per l'equació

$$2x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-2x^2}$$

és una el·lipse: les funcions $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{1-2x^2} \\ g(x) = -\sqrt{1-2x^2} \end{array} \right\}$, segons triem el signe $\oplus$ ó $\ominus$ de l'arrel, ens descriuen la semiel·lipse que queda per damunt d'abscisses o la que queda per sota, respectivament:



Per tant, existiran dues rectes tangents a aquesta el·lipse (una per dalt i una altra per sota) que siguin perpendiculars a r. Nosaltres anem a buscar només la de dalt, que serà tangent a la funció $\boxed{f(x) = \sqrt{1-2x^2}} \Rightarrow \boxed{f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-2x^2}}}$

Sigui $t: y = mx + n$ la tangent que busquem. Com que t i r són perpendiculars, els seus pendents estaran relacionats així: $m = -\frac{1}{M}$ (sent-hi M el pendent d'r).

Trobem M: $4x - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = \underbrace{\frac{4}{3}}_{M}x + \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{m = -\frac{3}{4}}$. Si (x_0, y_0) és el punt on t i $f(x)$ són tangents, $f'(x_0) = m$, d'on:

$$\boxed{-\frac{2x_0}{\sqrt{1-2x_0^2}} = -\frac{3}{4}} \ (*) \xRightarrow[(\ldots)^2]{} \frac{4x_0^2}{1-2x_0^2} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{64}{9}x_0^2 = 1 - 2x_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{64+18}{9}x_0^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x_0 = \pm\sqrt{\frac{9}{82}} = \boxed{\pm\frac{3}{\sqrt{82}}}} = \pm 0{,}3313,$$

$\oplus$

on hem rebutjat el signe ⊖ perquè si anem a l'equació original [*], d'abans d'elevar al quadrat, veiem que només amb el ⊕ se satisfà. Per tant,

$$\boxed{y_0 = f(x_0) = \sqrt{1-2x_0^2} = \sqrt{1-2\frac{9}{82}} = \sqrt{\frac{64}{82}} = \sqrt{\frac{32}{41}}} = 0{,}8835.$$

Trobem n posant els valors trobats per a m, x_0 i y_0 a l'equació de t:

$$\sqrt{\frac{32}{41}} = -\frac{3}{4}\frac{3}{\sqrt{82}} + n \Rightarrow \boxed{n = \sqrt{\frac{32}{41}} + \frac{9}{4\sqrt{82}} = 1{,}132}.$$

En conclusió, l'equació de la recta t que buscàvem és:

$$\boxed{y = -\frac{3}{4}x + 1{,}132}$$

C6

$$x^2 + 2y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-x^2)}$$

La nostra corba és una el·lipse, i els signes ⊕, ⊖ es corresponen amb les seves meitats superior i inferior, respectivament. Nosaltres anem a treballar només amb la superior, i per tant amb la funció

$$\boxed{f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(1-x^2)}} \Rightarrow \boxed{f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2(1-x^2)}}}$$

Sigui $t:\ y = mx+n$ la recta tangent que busquem i (x_0, y_0) el punt de tangència. Trobem m a partir de l'angle de t amb l'eix X,

$$\boxed{m = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}30^\circ = 1/\sqrt{3}}.$$

Sabem, a més a més, que $f'(x_0) = m$, d'on

$$\boxed{-\frac{x_0}{\sqrt{2(1-x_0^2)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}} \overset{(*)}{\underset{(\dots)^2}{\Longrightarrow}} \frac{x_0^2}{2(1-x_0^2)} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x_0^2 = 2(1-x_0^2) = 2-2x_0^2 \Rightarrow 5x_0^2 = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{x_0 = \pm\sqrt{2/5}}$, i portant això a [*] comprovem que només se satisfà amb $-$ (l'altra "falsa solució", que hem de rebutjar, l'hem introduïda en elevar al quadrat). Calculem

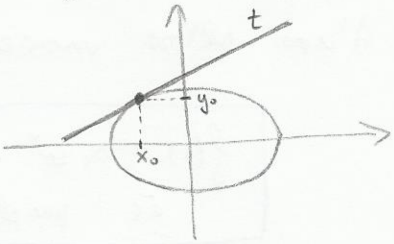
$$\boxed{y_0 = f(x_0) = \sqrt{\frac{1}{2}(1-x_0^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{5}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3}{10}}}$$

Substituïm m i aquest (x_0, y_0) en l'equació de t:

$$\sqrt{\frac{3}{10}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}} + n \Rightarrow \boxed{n = \sqrt{\frac{3}{10}} + \sqrt{\frac{2}{15}} = 0,9129}$$

En conclusió, heus aquí l'equació de la tangent que buscàvem:

$$\boxed{y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 0,9129}$$



C7

a/

$$\left.\begin{aligned} f(-x) &= ae^{-x} + be^{x} \\ f(x) &= ae^{x} + be^{-x} \end{aligned}\right\} (*)$$

Exigim $\boxed{f(-x) = f(x)}^{(*,*)}$ per a que sigui parell:

$$ae^{-x} + be^{x} = ae^{x} + be^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-b)e^{-x} = (a-b)e^{x} \Rightarrow \boxed{(a-b) = (a-b)e^{2x}} \text{ eq. (1)}$$

dividim l'equació entre e^{-x}, la qual cosa és totalment general perquè e^{-x} no val zero per a cap $x \in \mathbb{R}$.

Analitzem amb cura l'equació [1]. La condició que estem imposant per a exigir que f sigui par —és a dir, l'equació [*, *]— ha de verificar-se per a qualsevol valor d'x (si es verifiqués només per a alguns valors, f no seria parell). En concret, també per a $x=0$. Fem $x=0$ en eq. [1]:

$$(a-b) = (a-b)\underbrace{e^0}_{=1} \Rightarrow \cancel{\ell}a = \cancel{\ell}b \Rightarrow \boxed{a=b}.$$

Hem demostrat que si f és parell, llavors $a=b$ (és a dir: $a=b$ és una "condició necessària"). És evident que si $a=b \Rightarrow f(x) = a(e^x + e^{-x}) = f(-x)$, o sigui "$f$ és parell". Per tant, la condició $a=b$ és necessària i suficient per a que f sigui parell; dit d'una altra manera:

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) = a\,e^x + b\,e^{-x} \\ \text{és parell} \end{array}} \underset{\text{"si, i només si"}}{\Longleftrightarrow} \boxed{a=b}$$

<ins>Nota</ins>: aquest és un exemple de <ins>problemes en què</ins> l'enunciat ens pregunta pels valors d'uns paràmetres i <ins>la resposta no consisteix en uns únics valors</ins> concrets de tals paràmetres, <ins>sinó en un conjunt</ins>. De fet, en el nostre cas hi ha un conjunt infinit de valors d'a i b que satisfan el que demana l'enunciat (que f sigui parell): 1 i 1, $\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$, -6 i -6, π i π, 10^{17} i 10^{17}...

b/ Exigim $\boxed{f(-x) = -f(x)}^{(*,*,*)}$ per a tot x del domini d'f: amb això i [*] veiem que

$$a e^{-x} + b e^{x} = -a e^{x} - b e^{-x} \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad (a+b)\,e^{-x} = -(a+b)\,e^{x} \Longrightarrow \boxed{(a+b) = -(a+b)\,e^{2x}} \quad \text{eq.}(2)$$

$\div\, e^{-x}$ tota l'eq. sense perdre generalitat (doncs $e^{-x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$)

Com que $[*, *, *]$ s'han de verificar $\forall x \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ és el domini d'una suma de funcions de tipus exponencial), igualment eq. $[2]$ ha de ser vàlida $\forall x \in \mathbb{R}$, i en concret per a $x=0$.

Fent $x=0$ en $[2]$: $\quad (a+b) = -(a+b)\underbrace{e^{0}}_{=1} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \quad 2a = -2b \Longrightarrow \boxed{a=-b}$, condició necessària per a f senar.

Com que si $a=-b$ es verifica tenim que automàticament f és senar, la condició també és suficient, i automàticament:

$$\boxed{f(x) = a e^{x} + b e^{-x} \text{ és senar}} \quad \overset{\text{"si, i només si"}}{\Longleftrightarrow} \quad \boxed{a=-b} \quad ■$$

Veiem que tenim, de bell nou, una quantitat infinita de solucions del nostre problema.

c/ $\quad m = \boxed{1 = f'(1) = a e - b e^{-1}} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \quad a e = 1 + \frac{b}{e} \Longleftrightarrow \boxed{a = \frac{1}{e} + \frac{b}{e^2}},$$

és a dir: π la tangent a $f(x) = a e^{x} + b e^{-x}$ en $x=1$ serà paral·lela a $r: y = x+2$ si, i només si, a i b satisfan l'equació $a = \frac{1}{e} + \frac{b}{e^2}$ ■

Anem a representar gràficament el cas particular d'a i b que satisfà simultàniament les condicions de l'apartat (a) i el (c) del problema:

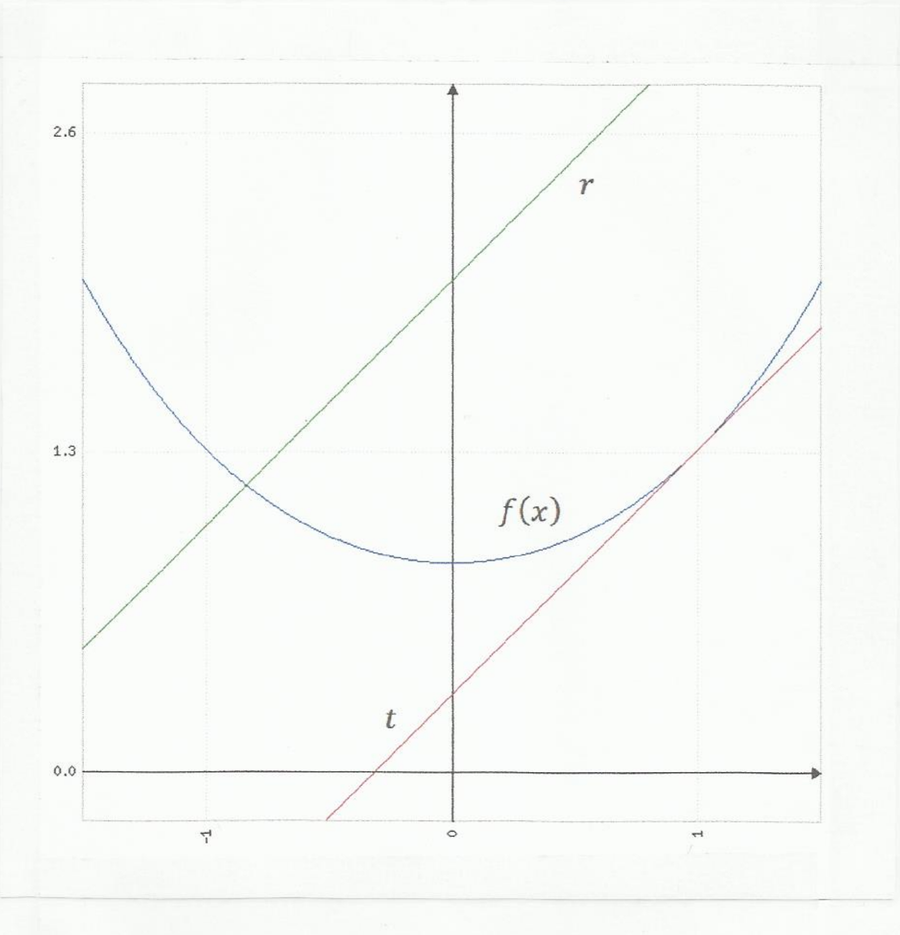
$$\begin{cases} \boxed{a = b} \\ a = \dfrac{1}{e} + \dfrac{b}{e^2} = \dfrac{1}{e} + \dfrac{a}{e^2} \end{cases} \Longrightarrow \left(1 - \dfrac{1}{e^2}\right) a = \dfrac{1}{e} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(e - \dfrac{1}{e}\right) a = 1 \Longrightarrow \boxed{a = \left(\dfrac{e^2-1}{e}\right)^{-1} = \dfrac{e}{e^2-1}}$$

Si (x_0, y_0) és el punt de tangència i $t: y = mx + n$ la tangent, llavors $\boxed{y_0 = f(x_0) = \dfrac{e}{e^2-1}\left(e^1 + e^{-1}\right) =}$

$$\boxed{= \dfrac{e^2+1}{e^2-1}} \Longrightarrow \boxed{n = y_0 - m x_0 = \dfrac{e^2+1}{e^2-1} - 1 \cdot 1 = \dfrac{e^2+1-e^2+1}{e^2-1} = \dfrac{2}{e^2-1}},$$

d'on: « $\boxed{t: \; y = x + \dfrac{2}{e^2-1}}$ és paral·lela a $r: y = x + 2$ i tangent a $\boxed{f(x) = \dfrac{e}{e^2-1}\left(e^x + e^{-x}\right)}$ en $\boxed{(x_0, y_0) = \left(1, \dfrac{e^2+1}{e^2-1}\right)}$ »:



//

C8 a/ Si r és asímptota quan $x \to \infty$, pot ser horitzontal o obliqua. Comencem per analitzar el primer cas:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{A}{e^{x}+e^{-x}} = \frac{A}{e^{\infty}+\frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{A}{\infty+\frac{1}{\infty}} = \frac{A}{\infty+0} = \frac{A}{\infty} = 0}$$

A és una constant

L'existència d'aquest límit i el seu valor finit ens informen que la recta $y=0$ (l'eix X, vaja) és asímptota horitzontal d'f per la dreta. Anàlogament es comprova que també ho és per l'esquerra. Així doncs, $\boxed{r:\ y=0}$ ■

b/ $$\underbrace{m}_{0 \text{ per ser paral·lela a } r} = f'(x_0) = \frac{A}{(e^{x_0}+e^{-x_0})^2}\cdot(e^{x_0}-e^{-x_0}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = e^{x_0}-e^{-x_0} \Rightarrow e^{x_0} = e^{-x_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2x_0} = 1 \Rightarrow 2x_0 = \ln 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = 0}$$ ■

$\div\, e^{-x_0}$ sense perdre generalitat, doncs $e^{-x_0} \neq 0\ \forall x_0$

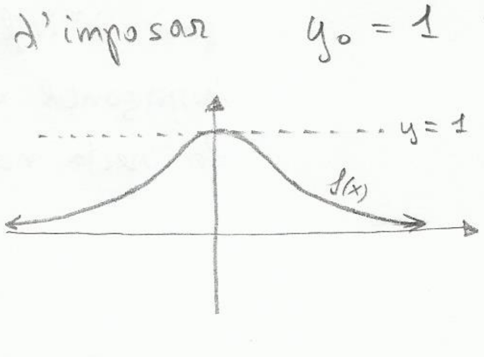
prenem logaritmes als dos membres de l'equació

c/ El punt de tangència és $\boxed{(x_0, y_0) = \left(0, \frac{A}{2}\right)}$

$$y_0 = f(x_0) = f(0) = \frac{A}{e^0+e^0} = \frac{A}{2}$$

Com que aquest punt pertany tan a la gràfica d'f com a la recta r, $y_0 = \frac{A}{2}$ és l'ordenada en l'origen d'r, i per tant hem d'imposar $y_0 = 1 \Rightarrow 1 = \frac{A}{2}$

$\Rightarrow \boxed{A = 2}$ ■



$\boxed{C9}$

$$\left.\begin{array}{l} f(-x) = -x^3 + ax^2 - bx \\ -f(x) = -x^3 - ax^2 - bx \end{array}\right\} \xRightarrow{f(-x)=-f(x)} \cancel{-x^3} + ax^2 - \cancel{bx} = \cancel{-x^3} - ax^2 - \cancel{bx} \Rightarrow$$

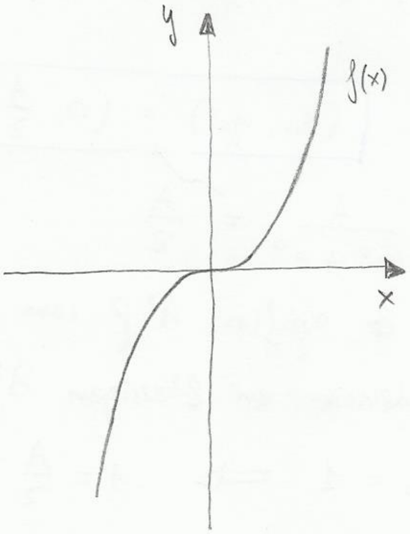
$\Rightarrow 2ax^2 = 0 \Rightarrow \boxed{ax^2 = 0}^{(*)}$. Hem trobat aquesta equació imposant la definició de funció senar, $f(-x) = -f(x)$, però això ha de ser veritat no per a un x concret, sinó per a tot x en el domini d'f (que és $\mathbb{R}$, com tota funció polinòmica). En concret, també per a $x=1$. Portant això a $[*]$ deduïm que $a \cdot 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a=0}$.

Per una altra banda, si l'eix Y és la recta normal (en el punt d'abscissa $x=0$) a la gràfica d'f, llavors la tangent en el mateix punt ha de ser perpendicular a l'eix $Y \Rightarrow$ la tangent te pendent igual a zero $\Rightarrow$

$$\boxed{0 = f'(0) \underset{\uparrow}{=} 3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b = b}.$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

En conclusió la funció f tè la forma $\boxed{f(x) = x^3}$ ▨



Fent la representació gràfica d'aquesta $f(x)$ podem veure que, efectivament, la corba tē simetria respecte l'origen (o ès "antisimètrica respecte ordenades", equivalentment), i que en $x=0$ hi ha un punt d'inflexió amb tangent horitzontal $\Rightarrow$ l'eix Y ès la recta normal a f en aquest punt. //

C10 El pendent de l'asímptota obliqua cap a la dreta es calcula amb el límit següent:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{mx+e^{-x}}{x-2e^{-x}} \underset{\uparrow}{=} \boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{mx}{x} = m}$$

(mx i x van a $\pm\infty$ quan $x\to\infty$, però $e^{-x} \to e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$)

El pendent de l'asímptota obliqua cap a l'esquerra, al seu torn, seria:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{mx+e^{-x}}{x-2e^{-x}} = \boxed{\pm\frac{\infty}{\infty} \quad \text{INDETERMINACIÓ.}} \ (*)$$

Si sabem que $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}$ és un "infinit d'ordre superior" a $\lim_{x\to-\infty} mx$, $\lim_{x\to-\infty} x$ (és a dir: que l'infinit de l'exponencial "guanya" sempre al de l'x), el resultat del límit anterior és evident: $\lim_{x\to-\infty}\frac{mx+e^{-x}}{x-2e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{-2e^{-x}} = -\frac{1}{2}$.

Anem a fer com si no coneguéssim aquest resultat i actuarem sobre [*] emprant la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{mx+e^{-x}}{x-2e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(mx+e^{-x})'}{(x-2e^{-x})'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{m-e^{-x}}{1+2e^{-x}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{e^{-x}}{2e^{-x}}\right) = \boxed{-\frac{1}{2} = M}$$

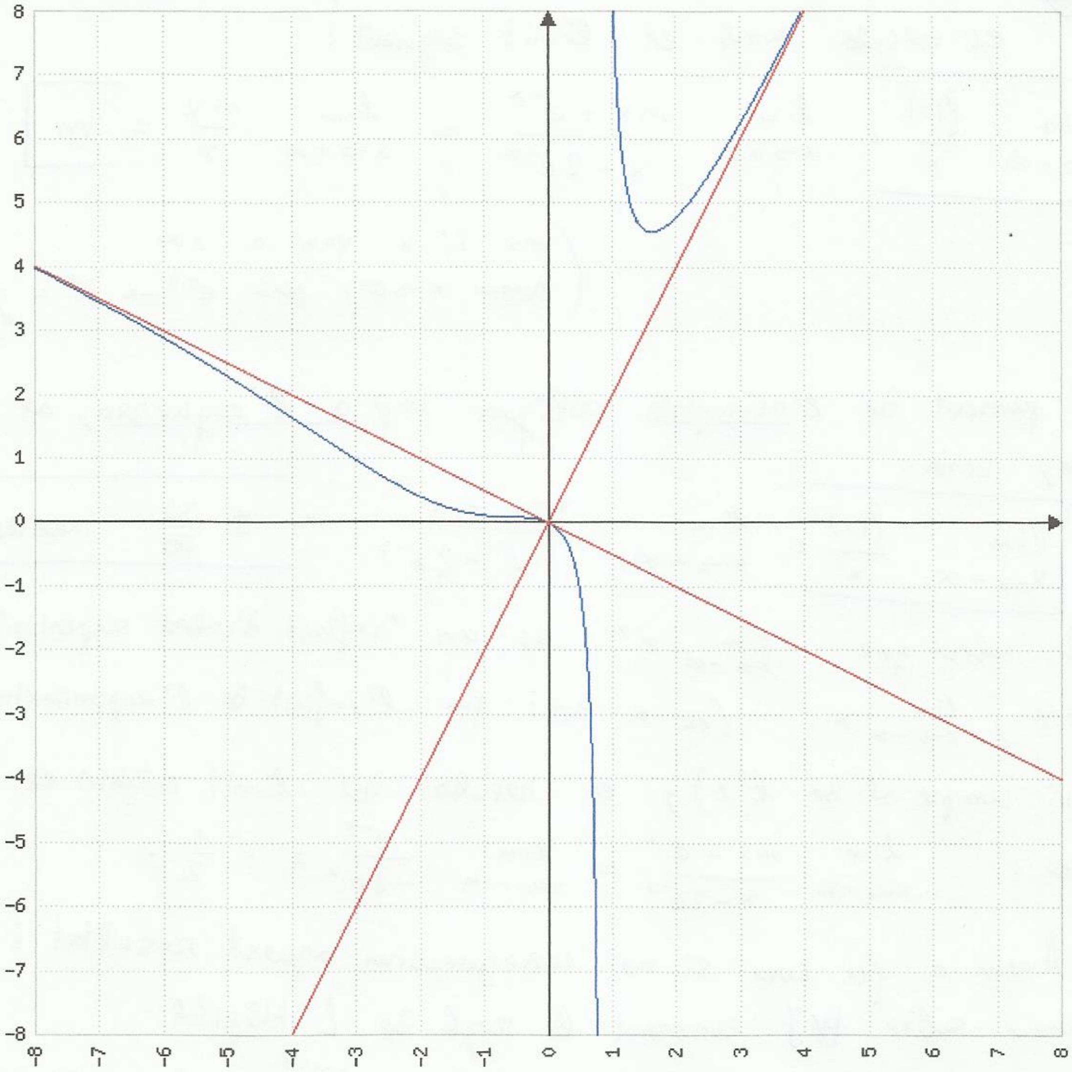
li direm M al pendent de l'asímptota per l'esquerra.

Com que ambdues asímptotes han de ser perpendiculars, els seus pendents han de satisfer (veure FITXA IV):

$$\boxed{m = -\frac{1}{M} = -\frac{1}{-1/2} = 2}.$$ Així doncs, la funció que busquem té la forma

$$\boxed{f(x) = \frac{2x^2+xe^{-x}}{x-2e^{-x}}} \ \blacksquare$$

(veure'n gràfica i comentari en pàg. següent)



Comentari: estrictament, aquest problema queda una mica a fora del tema de les rectes tangents a les gràfiques de funcions. Això però, podem veure les asímptotes com una mena de generalització de les tangents, si les entenem com a rectes que toquen la gràfica de la funció en un punt de tangència el qual "es troba en l'infinit". (Veure'n un comentari a l'apartat (c) del problema B7).