[3-VI-2013; dll]

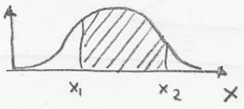
WJW87

i / x

PROBLEMES de GAUSSIANES

▶ MÈTODE PER A CALCULAR PROBABILITATS amb la TAULA.

1.- Hem d'esbrinar quina àrea hem de calcular a la campana sense tipificar



2.- Hem de convertir aquesta àrea en una àrea sota la campana tipificada:

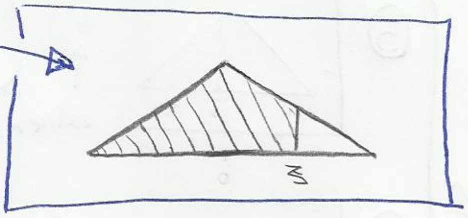
$$\boxed{z = \frac{x-\mu}{\sigma}}$$

3.- Hem de calcular aquesta àrea fent servir:

- la taula
- si és necessari, alguna de les tres tècniques de transformació

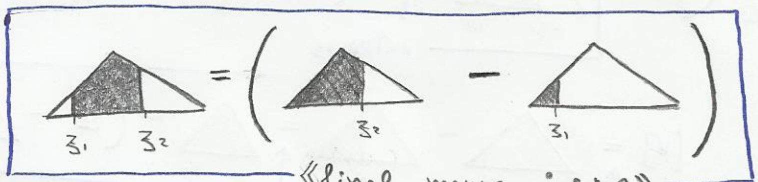
▶ LES TRES TRANSFORMACIONS per usar la TAULA

⊛ Amb la taula només sabem calcular àrees de tipus $Z \leq z$, on $z > 0$



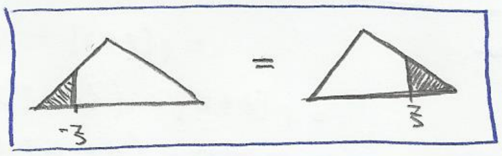
⊛ Per a un altre tipus d'àrees, apliquem una o vàries de les següents 3 tècniques i el problema queda reduït a calcular àrees de les que sí sabem amb la taula:

- "ÀREA ENTRE 2 EXTREMS":

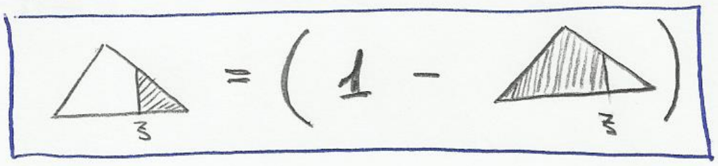


«final menys inicial»

- "SIMETRIA":



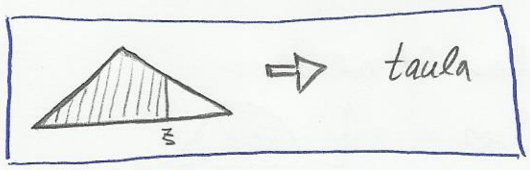
- "1 menys COMPLEMENT":



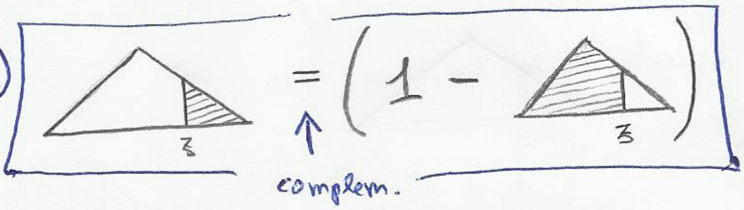
ALGUNS EXEMPLES:

ESQUEMA: ... *exemple numèric:*

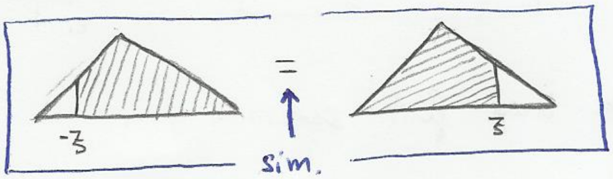
NOMÉS UN EXTREM

(1)


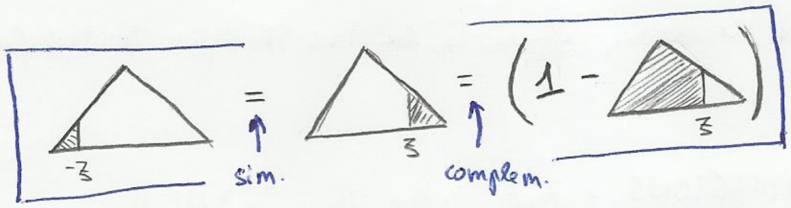
$\rightarrow p[Z \leq 2] = 0{,}9772$ //

(2)


$\rightarrow p[Z \geq 2] = 1 - p[Z \leq 2] =$
$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$ //

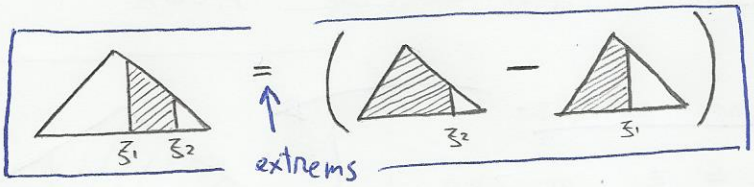
(3)


$\rightarrow p[Z \geq -2] = p[Z \leq 2] = 0{,}9772$ //

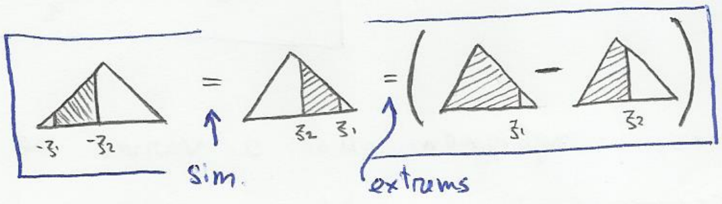
(4)


$\rightarrow p[Z \leq -2] = p[Z \geq 2] =$
$= 1 - p[Z \leq 2] =$
$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$ //

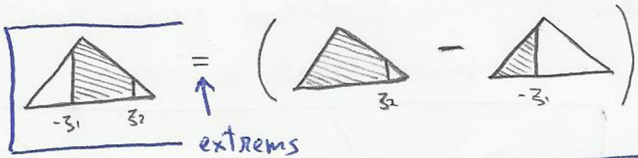
DOS EXTREMS

(5)


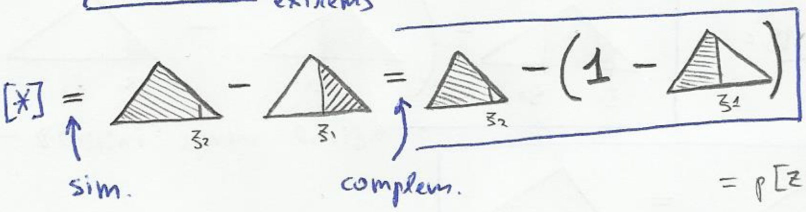
$\rightarrow p[1 \leq Z \leq 2] =$
$= p[Z \leq 2] - p[Z \leq 1] =$
$= 0{,}9772 - 0{,}8413 = 0{,}1359$ //

(6)


$\rightarrow p[-2 \leq Z \leq -1] =$
$= p[1 \leq Z \leq 2] = p[Z \leq 2] - p[Z \leq 1] =$
$= 0{,}9772 - 0{,}8413 = 0{,}1359$ //

(7)


= (*)



$\rightarrow p[-1 \leq Z \leq 2] =$
$= p[Z \leq 2] - p[Z \leq -1] =$
$= p[Z \leq 2] - p[Z \geq 1] =$
$= p[Z \leq 2] - (1 - p[Z \leq 1]) =$
$= 0{,}9772 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}8185$ //

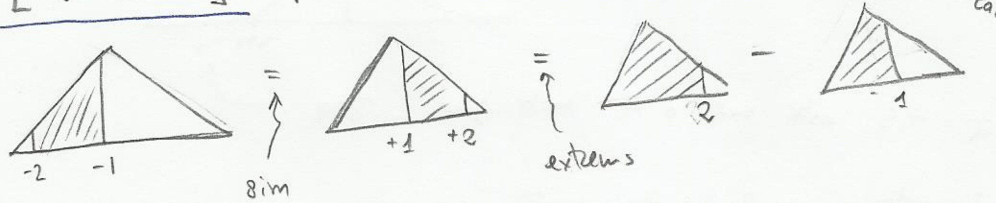
PROBLEMES de GAUSSIANES

▶ **EXERCICI PREVI**: és recomanable dibuixar esquemàticament per sota cada pas, i només quan l'esquema estigui clar escriure-ho amb notació "$p[x_1 \leq Z \leq x_2]$".

Per exemple, anem a refer així el ⑥ de pàg. anterior:

$$\boxed{p[-2 \leq Z \leq -1]} = p[1 \leq Z \leq 2] = p[Z \leq 2] - p[Z \leq 1] = 0{,}9772 - 0{,}8413 = \boxed{= 0{,}1359}$$

taula



18 pàg. 363

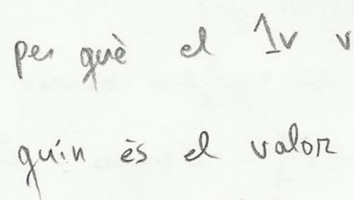
A partir de la taula de la distribució normal reduïda,

a) per què el 1r valor és 0,5 ?

b) quin és el valor de $p[Z \leq 4{,}5]$? I el valor de $p[Z \leq -5]$?

a/ El primer valor es correspon amb $z = 0{,}00$

⇒ és l'àrea sota la campana de Gauss tipificada per a $Z \leq 0$. Com que la campana és simètrica, això representa la meitat de l'àrea total sota la corba:



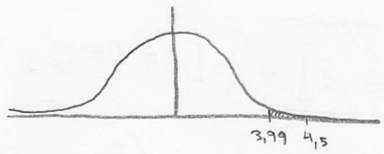
Com que sabem que l'àrea total és igual a la unitat, concloem que el primer valor de la taula ha de ser $1/2 = 0{,}5$.

b/ Nota: com que la meva taula només arriba al valor $z = 3{,}99$, vaig a considerar $\boxed{P[Z \leq 2{,}5] \;\; i \;\; P[Z \leq -3]}$

Primerament, però, examinaré com utilitzar la taula quan ens han donat un z massa gran en valor absolut:

El z més gran de la meva taula és $z = 3{,}99 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad P[Z \leq 3{,}99] = 1{,}0000$

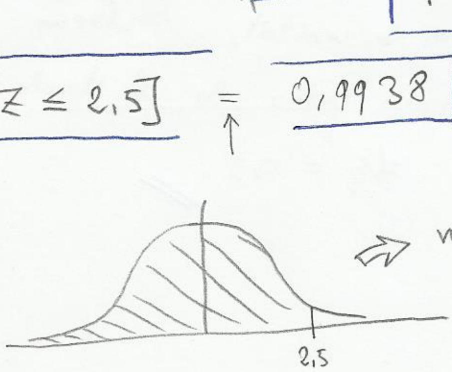


Com que $z = 4{,}5$ està més a la dreta que $3{,}99$

l'àrea de què estem parlant és més gran encara que la corresponent a $P[Z \leq 3{,}99]$. En principi, tant $P[Z \leq 3{,}99]$ com $P[Z \leq 4{,}5]$ són menors que 1, però la diferència és tan petita que si aproximem a deumil·lèsima (o signi: si agafem només quatre decimals), ens surt $P[Z \leq 3{,}99] = 1{,}0000$. El valor més petit compatible amb això que $P[Z \leq 3{,}99]$ podria tenir si consideréssim cinc decimals seria $0{,}99995$. Però la taula no té tanta precisió.

Aleshores, l'única cosa que podem dir de $P[Z \leq 4{,}5]$ amb aquesta taula és que és un nombre més gran que $0{,}99995$ i més petit que 1. El més sensat és fer de bell nou l'aproximació a quatre decimals i dir que $\boxed{P[Z \leq 4{,}5] = 1{,}0000}$.

- $\boxed{P[Z \leq 2{,}5]} = \boxed{0{,}9938}$ //



$\Rightarrow$ només hem d'anar a la fila 2,5 i la columna 0 de la taula

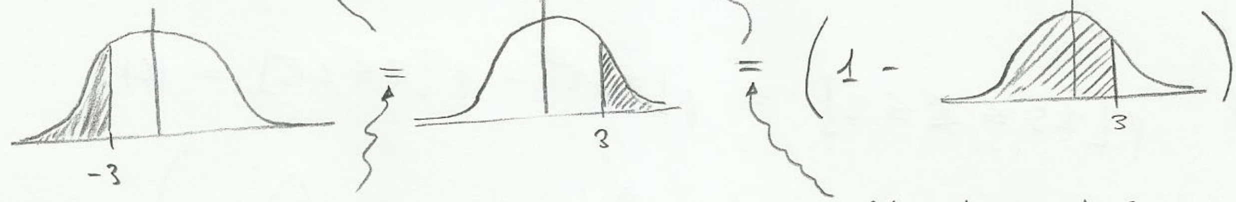
(centèsimes)

[3-VI-2013; dll]

PROBLEMES de GAUSSIANES

iii/X

- $\boxed{p[Z \le -3]} = p[Z \ge 3] = 1 - p[Z \le 3] = (*)$



la campana és simètrica

l'àrea total sota la campana és igual a 1:

$= 1$

$\boxed{*} = 1 - 0,9987 = \boxed{0,0013}$ //

mirem $p[Z \le 3]$ a la taula

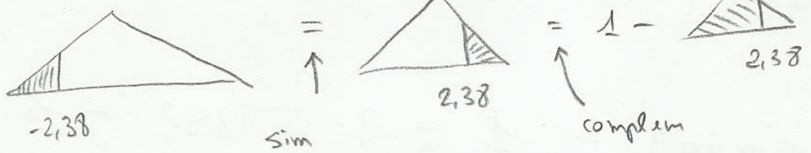
"aleatòria tipificada"

19

pàg. 363

Si Z és una variable $N(0,1)$, calcula:

a) $p[Z \le -2,38] = p[Z \ge 2,38] = 1 - p[Z \le 2,38] = (*)$ taula



sim complem

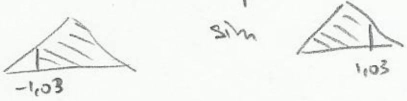
$\boxed{*} = 1 - 0,9913 = 0,0087$ // (esquema 4 de pàg. i.rev)

b) $p[Z \le 1,64] = 0,9495$ // (esquema 1)

taula

c) $p[Z \ge -1,03] = p[Z \le 1,03] = 0,8485$ // (esquema 3)

sim



d) $p[Z \geq 0{,}82] \underset{\uparrow\ \text{compl.}}{=} 1 - p[Z \leq 0{,}82] = 1 - 0{,}7939 =$

$= 0{,}2061$ //

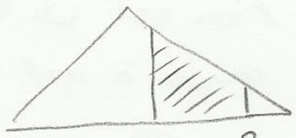
0,82

$\overset{\text{compl.}}{=} \left(1 - \right.$  $\left.\right)$

0,82

(esquemo ②)

e) $p[1{,}5 \leq Z \leq 3] = p[Z \leq 3] - p[Z \leq 1{,}5] = (*)$



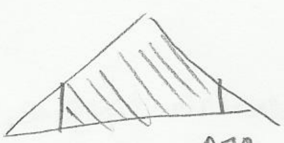
1,5 3

$\underset{\text{extrems}}{=}$ ( 3 −  1,5)

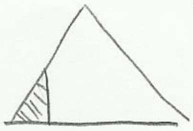
$\boxed{*} = 0{,}9987 - 0{,}9332 = 0{,}0655$ //

(esquemo ⑤)

f) $p[-0{,}79 \leq Z \leq 0{,}79] = p[Z \leq 0{,}79] - p[Z \leq -0{,}79] = (*)$



−0,79 0,79

$\underset{\text{extrems}}{=}$ ( 0,79 −  −0,79)

sim ≈  0,79 $\underset{\text{comp}}{=}$ (1 −  0,79)

$\boxed{*} = p[Z \leq 0{,}79] - \left(1 - p[Z \leq 0{,}79]\right) =$

$= 2 \cdot p[Z \leq 0{,}79] - 1 \underset{\text{taula}}{=} 2 \cdot 0{,}7852 - 1 =$

$= 0{,}5704$ //

(esquemo ⑦)

[3-VI-2013; dll]

PROBLEMES de GAUSSIANES

iv/x

20 pàg. 363

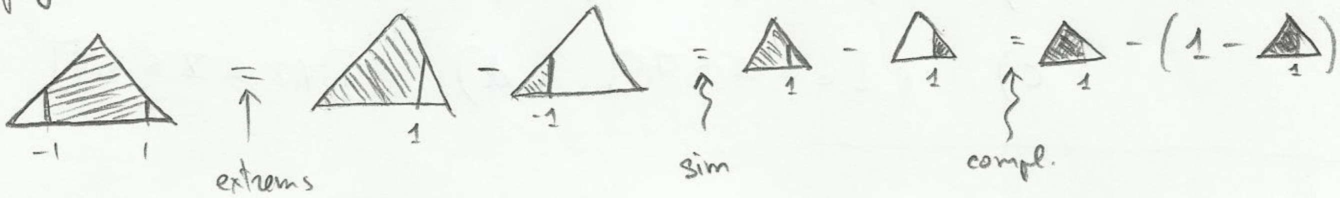
A partir de la taula, comprova a la distribució $N(0,1)$ que:

a) A l'interval $(-1,1)$ es troba el 68,26 % de la prob.

b) " " $(-2,2)$ " " " 95,44 % " " "

c) " " $(-3,3)$ " " " 99,74 % " " "

a/ Calculem $P[-1 \le Z \le 1]$ seguint l'esquema 7 de la pàg. i. rev:



$$\Rightarrow \boxed{P[-1 \le Z \le 1]} = \dots = p[Z \le 1] - (1 - p[Z \le 1]) =$$

$$= 2 \cdot p[Z \le 1] - 1 \underset{\text{taula}}{=} 2 \cdot 0{,}8413 - 1 = \boxed{= 0{,}6826}$$

$\Rightarrow$ Com que "tota la probabilitat" val 1, 0,6826 es correspon amb el 68,26 % ■

b/ Fem el mateix raonament canviant $1 \to 2$:

$$P[-2 \le Z \le 2] = \dots = 2 \cdot P[Z \le 2] - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544 \Rightarrow 95{,}44\ \% \ ■$$

c/ Anàlogament:

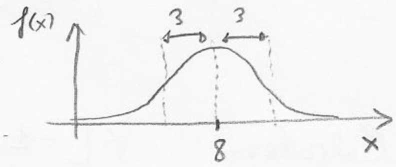
$$p[-3 \leq Z \leq 3] = 2 \cdot p[Z \leq 3] - 1 = 2 \cdot 0{,}9987 - 1 =$$

$$= 0{,}9974 \Longrightarrow 99{,}74$$ ■

21 pàg. 363

Considerem X una variable $N(8,3)$.

($\Rightarrow$ o sigui: una variable aleatòria contínua amb una distribució normal caracteritzada pels paràmetres

$\begin{cases} \mu = 8 & \text{"mitjana"} \\ \sigma = 3 & \text{"desviació típica"} \end{cases}$ $\rightarrow$ 

)

Calcula: a) $p[X \leq 9]$ b) $p[X \geq 7]$

c) $p[6 \leq X \leq 7{,}5]$ d) $p[7{,}2 \leq X \leq 8{,}7]$

ESTRATÈGIA a seguir: nosaltres només sabem calcular probabilitats amb gaussianes tipificades (amb la taula).

Per això:

1.- "TIPIFIQUEM": reexpressem les probabilitats que ens demanen en termes de la variable tipificada Z, usant la fórmula $\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$

- probabilitats "a un extrem": $\begin{cases} \boxed{p[X \leq x] = p[Z \leq z]} \\ \boxed{p[X \geq x] = p[Z \geq z]} \end{cases}$

- probabilitats "a dos extrems": $\boxed{p[x_1 \leq X \leq x_2] = p[z_1 \leq Z \leq z_2]}$

(on hem substituït amb: $\begin{bmatrix} z = \frac{x - \mu}{\sigma} \\ z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} \\ z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} \end{bmatrix}$ per als extrems)

$\Rightarrow$

2.- "APLIQUEM L'ESQUEMA QUE S'ESCAIGUI", dels 7 de pàgines, per fer el càlcul.

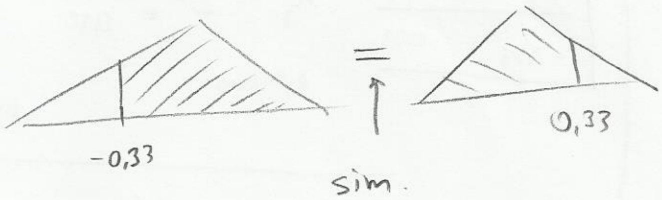
a/ $\boxed{p[X \leq 9]} = p[Z \leq 0{,}33] \overset{\text{taula}}{=} 0{,}6293$ //

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{9-8}{3} \simeq 0{,}33$$

b/ $\boxed{p[X \geq 7]} = \underbrace{p[Z \geq -0{,}33]} = p[Z \leq 0{,}33] \overset{\text{taula}}{=} 0{,}6293$ //

$$Z = \frac{7-8}{3} = -\frac{1}{3} = -0{,}33$$

(és un "esquema ③").



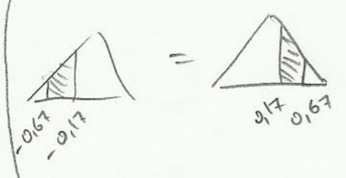
c/ $\boxed{p[6 \leq X \leq 7{,}5]} = p[-0{,}67 \leq Z \leq -0{,}17] = (*)$

$$\begin{cases} Z_1 = \dfrac{x_1 - 8}{3} = \dfrac{6-8}{3} = \dfrac{-2}{3} = -0{,}6666\ldots \simeq -0{,}67 \\ Z_2 = \dfrac{x_2 - 8}{3} = \dfrac{7{,}5-8}{3} = \dfrac{-0{,}5}{3} = -0{,}16666\ldots \simeq -0{,}17 \end{cases}$$

⚠ COMPTE: per usar la taula hem d'aproximar a dos decimals. Si fiquem -0,16, estem cometent un error. Anàlogament per a Z_1

$[*] = P[0{,}17 \le Z \le 0{,}67] \underset{\text{extrems}}{=} P[Z \le 0{,}67] - P[Z \le 0{,}17] =$

sim:



$\underset{\text{taula}}{=} 0{,}7486 - 0{,}5675 = \boxed{0{,}1811}$

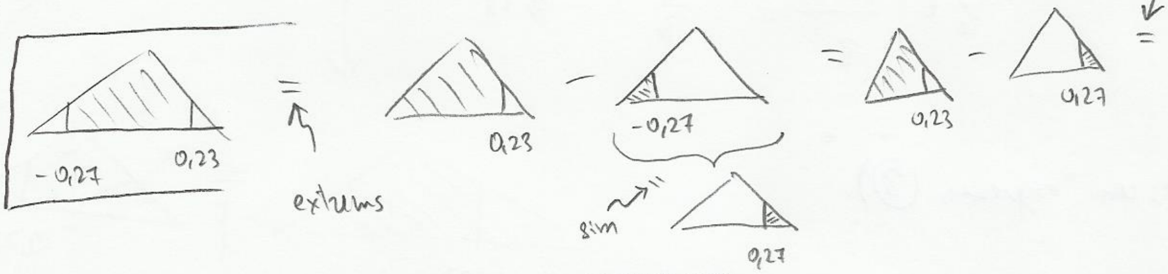
(és un "esquema ⑥").

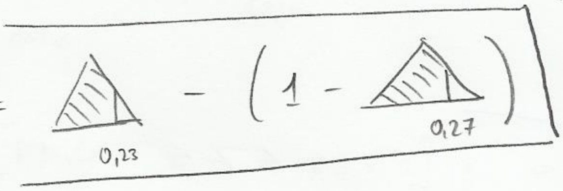
d/ $\boxed{P[7{,}2 \le X \le 8{,}7]} = P[-0{,}27 \le Z \le 0{,}23] = (*)$

$z_1 = \dfrac{7{,}2 - 8}{3} = -0{,}2666\ldots \simeq -0{,}27$ (!) compte amb l'arrodoniment!

$z_2 = \dfrac{8{,}7 - 8}{3} = 0{,}2333\ldots \simeq 0{,}23$

Es tracta d'un "esquema ⑦":





$[*] = P[Z \le 0{,}23] - (1 - P[Z \le 0{,}27]) =$

$\underset{\text{taula}}{=} 0{,}5910 - (1 - 0{,}6064) = \boxed{0{,}1974}$

3-VI-2013; dll

PROBLEMES DE GAUSSIANES

25/2/84

VI/X

pàg. 363

22 Determina z — parlem d'una gaussiana tipificada $N(0,1)$ —:

a) L'àrea entre 0 i z és $0{,}3770$

b) L'àrea a l'esquerra de z és $0{,}8621$

c) L'àrea entre $-1{,}5$ i z és $0{,}0217$

---

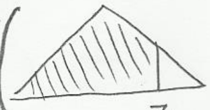
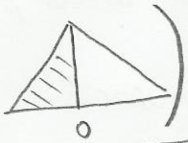
a/

lo diu l'enunciat

$= \boxed{0{,}3770}$

0 z — volem determinar la z

extrems

$=$ ( $-$ ) $= \boxed{p(Z \le z) - 0{,}5}$

$= p(Z \le z)$ $\qquad$ $= p(Z \le 0) = 0{,}5$

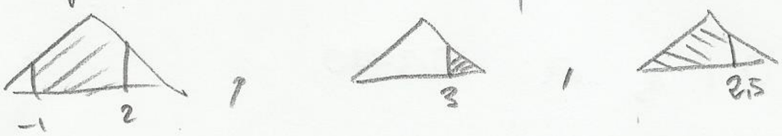
(això està a la taula, però se suposa que és molt fàcil i la podem saber ja de memòria)

$\Rightarrow \boxed{p(Z \le z) = 0{,}5 + 0{,}3770} = \boxed{0{,}8770}$

Ara, senzillament hem de buscar a la taula el valor $0{,}8770$, per saber amb quina z es correspon.

$\Rightarrow$ fila "1,1", columna "6": $\boxed{z = 1{,}16}$ ∎

COMENTARI: aquest tipus de problemes són "la inversa" respecte dels que hem fet fins ara. Amb els anteriors, ens donen informació sobre un extrem o uns extrems per poder dibuixar un esquema de tipus



... etc.,

i amb els trucs dels $\left\{\begin{array}{l} \text{- extrems} \\ \text{- sim.} \\ \text{- complem.} \end{array}\right\}$ calculem la probabilitat (1 ⇒ l'àrea sota la campana).

Ara, el que ens diuen és, precisament, aquesta probabilitat o àrea, i ens donen algunes pistes sobre la configuració

... etc., i la incògnita del nostre problema és un dels extrems: "ξ".

⚠ ⇝ el problema està en què hem d'esbrinar ξ en dos passos: el primer, és trobar el valor de $p[Z \leq \xi]$ amb les condicions i pistes de l'enunciat.

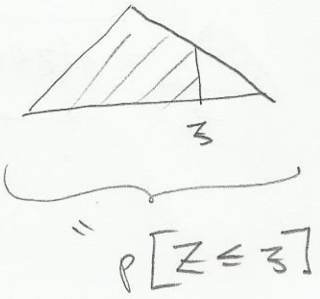
El 2n, amb aquest valor $p[Z \leq \xi]$ trobem la ξ usant la taula en sentit invers.

3-VI-2013; dll

PROBLEMES de GAUSSIANES

Vii/X

b/

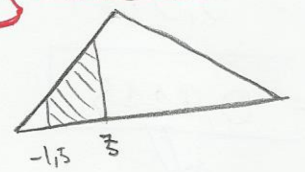


$= 0,8621$ ⟹ a la taula, el valor 0,8621 el trobem a la fila "1,0" i la columna "9"

$\boxed{z = 1,09}$

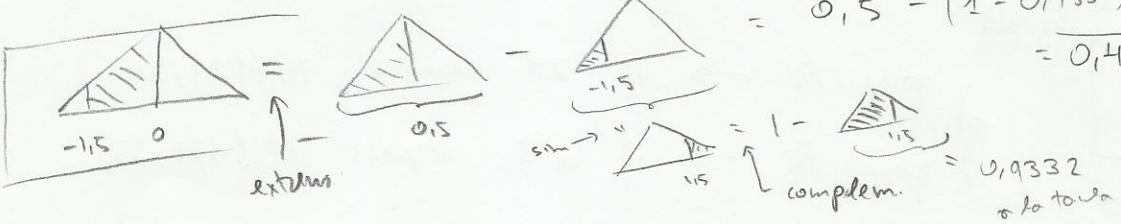
⚠ AQUEST és el MÉS DIFÍCIL ⚠

c/



← amb el valor tan petit de l'àrea que ens han donat, 0,0217, es pot entendre que la z està a aquest costat (que $z<0$, vaja): ha d'estar molt a prop del $-1,5$ per a que l'àrea sigui tan petita.

Per exemple, si estigués justament al mig, $z=0$, seria una àrea:



$= 0,5 - (1 - 0,9332) =$

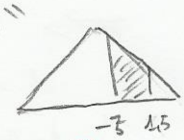
$= \boxed{0,4332}$

Si no ens adonem d'això des del principi, pot costar prou de resoldre.

Així doncs, 

$= \boxed{0,0217}$

enunciat

sim. 

$=$ 

$-$ 

$= \boxed{p(Z \leq 1,5) - p(Z \leq -z)}$

extrems

COMPTE amb el signe

$\Longrightarrow \boxed{p(Z \leq -z)} = p(Z \leq 1,5) - 0,0217 =$

$= 0,9332 - 0,0217 =$

taula

$= \boxed{0,9115}$

A partir d'aquest valor, fem una "lectura inversa" de la taula per trobar $-z$:

trobem 0,9115 a la $\left\{ \begin{array}{l} \text{fila "1,3"} \\ \text{columna "5"} \end{array} \right\} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow -z = 1,35 \Longrightarrow \boxed{z = -1,35}$

23 pàg. 363

$\left\{ \begin{array}{l} \text{grup A} \rightarrow \text{el Q.I. segueix } N(100,30) \\ \text{grup B} \rightarrow \text{el Q.I. segueix } N(120,35) \end{array} \right.$

Escollim un individu d'A i un de B aleatòriament

a) prob. que el d'A tingui Q.I. > 90 ?

[3-VI-2013; dll]

PROBLEMES de GAUSSIANES

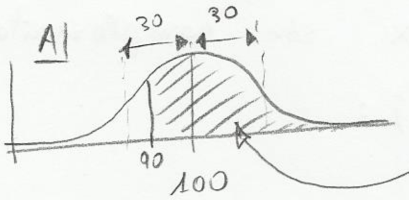
viii / X

b) prob que el de B tingui Q.I. > 90 ?

c) prob que ambdós tinguin un Q.I. > 90 ?

⚠ **COMPTE:** aquest apartat té truc, perquè hem de combinar $\boxed{\text{GAUSSIANES} \oplus \text{ARBRES}}$

(**NOTA:** recordem que $p[Z \leq z] = p[Z < z]$)

a/ 

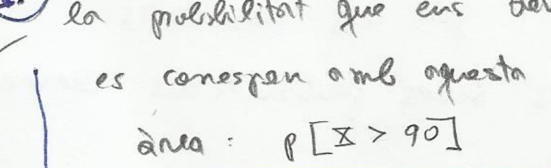
① la probabilitat que ens demanen es correspon amb aquesta àrea: $p[X > 90]$

② tipifiquem: $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} = \dfrac{X - 100}{30}$

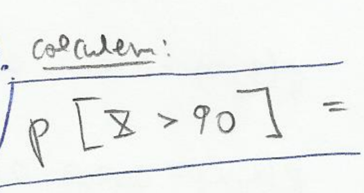
$$x = 90 \longrightarrow \boxed{z = \frac{90-100}{30} = -\frac{1}{3} \cong -0{,}33} \Longrightarrow$$

③ calculem:

$$\Longrightarrow \boxed{p[X > 90]} = p[Z > -0{,}33] \overset{\text{sim.}}{=} p[Z < 0{,}33] = (*)$$



$\boxed{(*) = 0{,}6293}$ //

b/ ① 

$\longrightarrow$ ens demanen $p[X > 90]$

② tipifiquem:

$$x = 90 \longrightarrow \boxed{z = \frac{90-120}{35} = -0{,}8571\ldots \overset{!}{\cong} -0{,}86}$$

③ calculem:

$$\Longrightarrow \boxed{p[X > 90] = p[Z > -0{,}86] \overset{\text{sim.}}{=} p[Z < 0{,}86] = 0{,}8051} \;//$$

c/ Apliquem el truc de la mà esquerra i mà dreta per a construir l'arbre: agafem amb l'esquerra un individu de l'A, i la variable aleatòria discreta a ens diu si té un Q.I. superior a 90, $a = O$ o si no el té $\longrightarrow a = X$

... amb la dreta n'agafem un de B i la variable aleatòria discreta $b \longrightarrow$
$b = O \rightarrow$ té Q.I. > 90
$b = X \rightarrow$ no té Q.I. > 90

Fem l'arbre, i utilitzarem els resultats dels apartats anteriors, i que els resultats "O" i "X" són complementaris ($\Longrightarrow$ les seves probabilitats sumen 1):

Mà esquerra: individu d'A	Mà dreta: individu de B		
O (0,6293)	O (0,8051)	$\rightarrow p(O,O) = 0,6293 \cdot 0,8051 \simeq 0,5066$	①
	X (0,1949)	$\rightarrow p(O,X) = 0,6293 \cdot 0,1949 \simeq 0,1227$	②
X (0,3707)	O (0,8051)	$\rightarrow p(X,O) = 0,3707 \cdot 0,8051 \simeq 0,2985$	③
	X (0,1949)	$\rightarrow p(X,X) = 0,3707 \cdot 0,1949 \simeq 0,0722$	④

$\underbrace{0,3707}_{= 1 - 0,6293}$ $\qquad$ $\underbrace{0,1949}_{= 1 - 8051}$

1,0000 o.k.

fav. $\rightarrow$ ① "ambdós" $\Longrightarrow$ $\boxed{p(O,O) = 0,5066}$

NOTA: de fet, no feia falta escriure totes les probabilitats de l'arbre, si ja des del principi veiem que només volem $p(O,O)$.

[3-VI-2013; dil]

PROBLEMES de GAUSSIANES

ix / X

24 pàg. 363

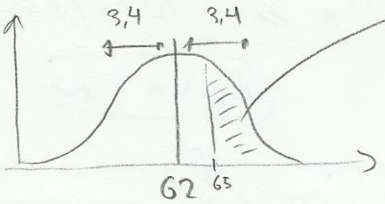
El pes dels atletes $\longrightarrow N(62;\ 3{,}4)$

a) prob. que un atleta pesi més de 65 kg ?

b) el 70% dels atletes no supera un cert pes. Quin és ?

---

a/ ①



ens demanen:

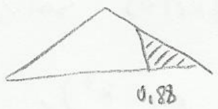
$p[X > 65]$

② tipifiquem:

$x = 65 \longrightarrow z = \dfrac{65-62}{3{,}4} = 0{,}8823\ldots \simeq 0{,}88$

③ calculem:

$\boxed{p[X > 65]} = p[Z > 0{,}88] \underset{\text{complem}}{=} 1 - p[Z < 0{,}88] = (*)$



$= (1 -$  $)$

$[*] = 1 - 0{,}8106 = \boxed{0{,}1894}$ //

(taula; NOTA: recordem que $p[Z < 0{,}88] = p[Z \leq 0{,}88]$ ¡no ens ha de preocupar el $<$!)

b/ Aquest apartat és de tipus "invers", com els del problema $\boxed{22}$.

primerament, treballarem amb la variable tipificada Z, i quan ja sapiguem la resposta, "destipificarem" per conèixer el pes que volem.

⊛ Comencem per fer un esquema del problema:

busquem un determinat pes, x, tal que el 70% dels atletes no el supera. La condició «no superar un determinat pes x» s'expressa:

$\boxed{X < x}$

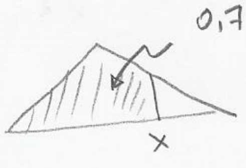
objectiu final

⟹ la seva probabilitat, $\boxed{p(X < x) = p(Z < z)}$

en termes de la variable tipificada

L'enunciat ens diu, a més a més, que $\boxed{p(X < x) = 0{,}7}$ (*)

Si el 70% dels atletes satisfan la condició $X < x$ ("no superar el pes x"), la probabilitat de trobar-ne un que la satisfaci és 0,7

⟹ el gràfic corresponent tindrà la forma 

(sabem que $x > 0$ perquè, altrament, l'àrea ratllada seria més petita que 0,5).

Ara només hem d'aplicar [*] per fer una lectura "inversa" a la taula: localitzem la

[3-VI-2013]

PROBLEMES de GAUSSIANES

wswa $\frac{x}{x}$

probabilitat 0,7 entre $z = 0{,}52$; $z = 0{,}53$

$p = 0{,}6985$; $p = 0{,}7019$

$\Longrightarrow$ ens quedem amb 0,52, que s'acosta més.

(a)

$\Longrightarrow$ "destipifiquem":

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$\underbrace{z}_{0{,}52} = \frac{x - 64}{3{,}4} \Longrightarrow \boxed{x = 64 + 3{,}4 \cdot 0{,}52 = 65{,}768 \text{ kg}}$$

[@]