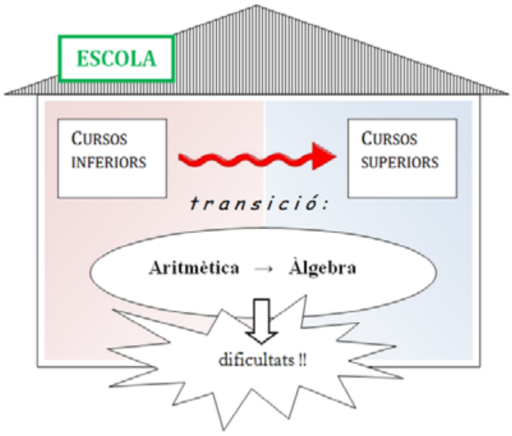
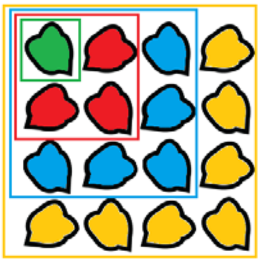
Màster de Formació del Professorat (UB)

Matemàtiques, curs 2012-13

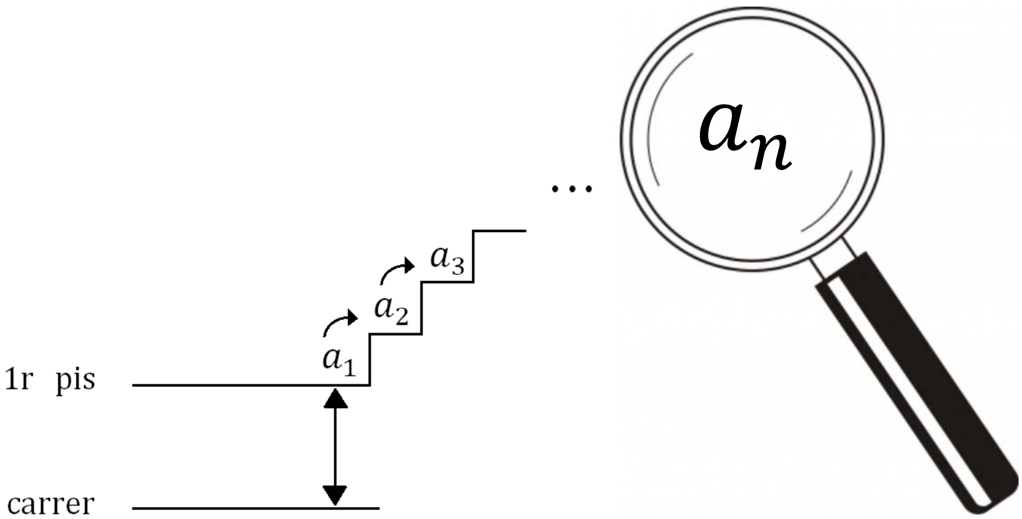
TREBALL *Final* de MÀSTER





ALUMNE: Pepe Ródenas Borja

TUTOR: Albert Mallart Solaz



ÍNDEX

1. Introducció

El present Treball Final de Màster suposa la conclusió lògica de l'aprenentatge desenvolupant al llarg de tot el curs, en tant els estudiants assagem per primer cop una anàlisi crítica de la nostra pròpia activitat docent, i tenim la oportunitat de fer-ho des de l'òptica de tot allò que hem estudiat al llarg de les diferents assignatures —en particular, amb els criteris que se'ns han presentat a l'assignatura de Recerca i Innovació—.

El programa que se'ns planteja a partir d'aquesta anàlisi és doble: per un costat, hi ha l'evident necessitat de realitzar una proposta de millora per a la seqüència didàctica duta a terme durant les pràctiques. Per un altre, es tracta de recolzar aquesta proposta fent servir, en la mesura que ens sigui possible, el contingut de fonts bibliogràfiques provinents del món de la investigació, així com donar al nostre treball un format incipientment proper a l'emprat pels autors de tals fonts.

Segons interpreto, la idea que anima aquest programa rau en promoure uns futurs docents que no només hagin tingut una sòlida formació —sòlida, si més no, en comparació a l'ingent nombre de professors que només hauran fet l'extint CAP—, sinó que, a més a més, en ells s'hagi desenvolupat un mínim sentit de la constant necessitat d'autocrítica i renovació, tan important en aquesta feina; i el que és més: se'ls hagin presentat els fruits de la investigació —en Didàctica de les Matemàtiques, en aquest cas— com a eina essencial i assequible per a planificar i justificar la forma concreta de les pròpies propostes de millora.

En el meu cas particular, he quedat particularment satisfet de la oportunitat que aquest treball m'ha donat per llegir i reflexionar sobre una de les dificultats didàctiques que més m'ha preocupat arran del Pràcticum —parlo de l'assimilació de la simbologia algebraica per part dels adolescents—, per a la qual he cregut trobar, al capdavall, un enfocament que promet ser molt eficaç. La qual cosa no sabré, tanmateix, fins que no tingui la oportunitat de tornar a fer classe a un grup de l'ESO —doncs amb les classes particulars es presenten dificultats que solen ser, o aquesta és la meva experiència, de natura molt diferent—. Esperem que sigui aviat.

2. Context

El centre on he realitzat els Pràcticums I i II del Màster és l'Institut Numància, un centre públic d'educació secundària ubicat a Santa Coloma de Gramenet (Barcelona). Actualment s'hi imparteixen tots els nivells d'ESO i dues modalitats de Batxillerat (el Científic i l'Humanístic —o "Social"—).

Santa Coloma és un municipi de la comarca del Barcelonès, dins l'àrea metropolitana de Barcelona. L'any 2012 comptava amb 120.593 habitants, dels quals n'hi havia un 47% nascuts a Catalunya, un 29% a la resta d'Espanya i un 24% a uns altres països. El nivell d'instrucció de la població —d'extracció *obrera* preponderant—, tot i que ha pujat una mica en els darrers anys, és en proporció notablement menor que el de tota Catalunya.

Per afrontar la diversitat, el centre compta amb diverses eines, sobre tot per a la ESO. Entre altres coses, per a les assignatures instrumentals (matemàtiques, castellà i català) i l'anglès hi ha una estructura de "grups flexibles" durant els cursos de 2n i 3r d'ESO: totes aquestes assignatures és fan alhora per als quatre grups, i són reassignats (amb grups de mínima durada d'un trimestre) a quatre grups de nivell creixent (4, baix; 2~3, mitjà; 1, alt), havent-n'hi, addicionalment, un cinquè grup, de reforç[1]. Els grups-classe A, B, C i D de la resta d'assignatures (corresponents també a les tutories) són de tipus "heterogeni".

La unitat didáctica que he programat i implementat a l'ESO durant el Pràcticum II ha sigut la corresponent al tema de Progressions, impartida al 3r anomenat "Grup Flexible 1 de Matemàtiques", sovint denotat com 3r ESO GF-1 Matemàtiques. He fet un total de vuit hores de classe amb aquest grup, totes corresponents a l'esmentada unitat.

Aquest grup està format per vint-i-un alumnes provinents de les quatre tutories (A, B, C i D) de 3r d'ESO del Numància. En principi, aquest grup es correspon amb els de més alt nivell matemàtic.

Els majors problemes que havia detectat en aquest grup abans de fer-hi la meva intervenció docent tenen a veure amb tres camps.

[1] Assenyalem que, en principi, un mateix alumne no té per què estar assignat al mateix grup flexible en diferent assignatura instrumental+anglès; encara que, a l'hora de la veritat, això acaba ocorrent prou vegades.

El primer és el del comportament durant les classes i el respecte a l'ambient de treball: malgrat que la meva tutora en el centre és una professora molt capaç per imposar la disciplina a les aules, de tant en tant havia de patir retards i distraccions per haver d'enfrontar problemes d'aquest tipus. Amb mi ha sigut lleugerament diferent en el to dels enfrontaments, però tampoc no he estat exempt d'aquestes dificultats.

La segona dificultat que m'agradaria assenyalar té a veure amb la falta de costum de treball. I, de bell nou, és quelcom que ja passava amb la tutora, va passar amb mi, i, he vist que ha continuat passant al llarg de les dues setmanes posteriors a la meva intervenció.

La tercera i última dificultat que havia detectat en el grup abans de fer-los classe jo mateix va ser la falta de motivació, interès o confiança en superar el repte d'estudiar matemàtiques. I això entès en totes les seves vessants i amb totes les seves implicacions.

Als tres punts esmentats, però, se'ls n'afegeixen dos més, que conec a partir de l'experiència del segon període de pràctiques.

El primer, i més greu, és que aquests nois són molt desordenats en la manera d'expressar-se i treballar, tant per escrit com oralment, i això comporta que s'equivoquin am les matemàtiques, o no les entenguin. Jo vaig descobrir aquesta dificultat a conforme els feia les classes, i m'hi vaig enfrontar amb bona voluntat i improvisació, senzillament.

En general, també els hauríem de fer parlar en públic més sovint, i no acontentar-nos amb deduir que estan pensant en la resposta correcta, sinó que forçar-los a que s'expressin amb precisió. Un bon ús del llenguatge denota un pensament racional més clar, i no només en sentit matemàtic.

El segon punt que he detectat, i que té importància matemàtica, però queda circumscrit al tema de Progressions (tot i que no només a aquest tema), són les veritables dificultats dels alumnes en la interiorització de la notació algebraica.

He tractat de tenir en la màxima consideració les darreres dues mancances esmentades d'aquest grup-classe —sota el supòsit que són una bona mostra de la norma en els nois de la mateixa edat— en la realització del present Treball Final de Màster (TFM).

3. Anàlisi i valoració del Pràcticum II

Com ja queda dit a la Introducció, és prescriptiu fer una anàlisi crítica i exhaustiva de tot allò fet durant la preparació i implementació de la unitat didàctica del període de pràctiques, amb l'objectiu de poder orientar la recerca bibliogràfica i proposta de millora cap a les mancances més rellevants, i fer-ho des de la perspectiva més objectiva possible. Exposaré els detalls, però, dels resultats d'aquesta anàlisi de manera un tant selectiva, atès que ja se n'ha dit molt al llarg de l'extensíssima Memòria del Pràcticum II, i és una reflexió, en conseqüència, que porto ja molt de temps madurant. Em limitaré aquí, doncs, a tractar de fer un repàs sistemàtic dels diversos aspectes assenyalats als criteris d'idoneïtat vistos a l'assignatura de Recerca i Innovació, intentant no deixar-me res, i amb l'ànim d'acostar-me tant com estigui al meu abast a l'objectivitat que he esmentat al principi.

Les úniques puntualitzacions o aclariments moderadament més extenses que faré, afegeixo, tindran sempre a veure amb aspectes negatius a millorar, bé per a justificar el que vindrà en la resta del TFM —per "plantejar les preguntes escaients"—, o bé, si les circumstàncies m'han portat a renunciar a la inclusió de tals aspectes en la proposta de millora, per a que al menys quedi constància testimonial de la meva voluntat d'autocrítica.

Començaré l'exposició amb un d'aquests punts negatius i que caldria millorar, el qual té una importància que —reconec— no acabo de saber *dimensionar*, així com tampoc no he inclòs a la proposta de millora, ni m'ha sortit amb naturalitat quan he intentat sotmetre a anàlisi sistemàtica, segons els criteris d'idoneïtat, el que he fet a les pràctiques (tot i que ara veig que es correspondria amb l'apartat d'idoneïtat "ecològica"). Es tracta de l'**avaluació continuada**, suposadament prescriptiva en els plans actuals, i que jo no he sabut o no he volgut —inconscientment— considerar segons el *cànon*. Perquè no sé quin és tal *cànon*, hauria d'afegir, o si el conec no l'accepto i em confonc a mi mateix dient-me que "*això* no és el cànon, perquè no pot ser *així*". Sigui com sigui, els fets: la unitat ha tingut una llargària temporal de vuit sessions, inclòs un examen final. Hi havia plantejades, a banda d'aquest examen, un conjunt de quatre proves d'avaluació, una de les quals era només inicial[2], una altra era només formativa, i tres més tenien un caràcter mixt formatiu/sumatiu. Tot plegat, les contribucions numèriques a la nota final de la unitat venien de fer una mitjana ponderada a partir de contribucions del 70%, el 10%, el 10% i el 10%, sent la primera quantitat la corresponent a l'examen, i les altres tres a les tasques esmentades. També hi havia algunes altes directrius, com ara no fer mitjana a algú que hagués tret una nota inferior a quatre en l'examen, o modificar els resultats de les proves mixtes (les dels "deus per cent") atenent a les característiques i circumstàncies de cada alumne —sobre això, diré que hi havia una altra via d'avaluació formativa que no era una tasca, sinó un full d'observacions que amb la llista dels alumnes i un espai per a comentaris, del qual portava un exemplar nou ("en blanc") al principi de cada sessió—. El meu tutor d'universitat em va avisar, durant la darrera reunió que a hores d'ara he tingut amb ell, que aquest sistema de ponderació havia estat un error, perquè donar tanta importància a la prova escrita final va en contra de l'actual filosofia imperant. Ja que no he fet cap consulta ulterior, ni tractat de buscar informació o alternatives sobre el tema, vull que al menys quedi constància del fet, i entenc que és un punt al que em queda pendent parar més atenció en el futur.

Prosseguim abordant l'anàlisi d'**idoneïtat** de tipus **epistèmic**. Pel que fa a **errors** matemàtics (o confusions), crec estar totalment lliure de possible crítica; al menys, ni el meu tutor d'universitat ni la meva tutora del centre me n'han manifestat cap al respecte, ni jo he estat capaç de detectar cap problema d'aquest tipus[3].

En quant a la **representativitat**, una cosa semblant he de dir. Vaig llegir vàries vegades la part del currículum oficial de matemàtiques de 3r d'ESO per a preparar la programació de la unitat, i vaig consultar un total de cinc llibres de text de diferents editorials per estar segur de no descuidar cap faceta històrica o pedagògica sobre el tema. Així doncs, crec que els únics **continguts** o connexions que vaig acabar excloent de la implemetnació malgrat revestir, segons el meu criteri, de certa importància, en

[2] El qüestionari de **8.5** (annexos), que també era part, en certa mesura, de l'explicació que el seguia recollida al guió de **8.8**.

[3] Estic ara fent un últim repàs al que he escrit en aquesta secció, i me n'adono que això no és del tot cert. La ja esmentada activitat TAC –amb *GeoGebra*– sobre Malthus tenia, com el professor Sergi Múria –de l'assignatura de Recursos del Màster– ja em va fer notar quan féu la correcció, un ús no del tot propi d'uns histogrames en un marc en que hauria sigut més convenient utilitzar uns diagrames de barres. En qualsevol cas, les circumstàncies temporals de la realització d'aquest Treball, i la meva llista de prioritats a considerar, m'han impedit dedicar-me a revisar aquell programa, cosa que em queda pendent, llavors, per al futur.

principi no han estat omesos per ignorància o inconsciència, sinó sempre de manera justificada, atenent a les circumstàncies, i sense que això redundés, si es mira tot plegat, en un prejudici de la representativitat global del tema que estava oferint als alumnes —és el cas, per exemple, de l'activitat TAC que havia dissenyat contextualitzada en la introducció a les teories de Malthus, o els problemes d'interès simple i interès compost—. Pel que fa als **problemes**, quelcom semblant podria dir: vaig veure'n d'històrics (o llegendaris), com ara el de Gauss sumant els naturals o l'inventor dels escacs demanant-li al rei una quantitat desorbitada de d'arròs, i també veure'n de contextualitzats en l'entorn proper dels alumnes, com ara l'estalvi per a un viatge o un model lineal de predicció dels gols d'un equip de futbol en acabar la lliga, i també vaig plantejar-ne de només motivats per les seves connexions intramatemàtiques —com ara els relacionats amb característiques de les successions de signes alternats, o els senars i els parells—.

L'únic punt on he trobat importants mancances, les quals miraré de tractar oportunament a la propera secció, i intentaré vorejar amb la proposta final de millora, és el de la **riquesa** competencial matemàtica. Vaig fer una anàlisi molt exhaustiva de les competències i els processos que esperava desenvolupar amb els set procediments d'avaluació[4], i ja vaig detectar que una de les dotze competències bàsiques de l'àmbit matemàtic, la C4 ("Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes") havia estat totalment absent al llarg de la unitat —tant en el meu plantejament, com en l'actitud dels meus alumnes[5]—. Això, a més a més, crec que està prou relacionat amb que l'altra gran mancança competencial detectada, encara que sí l'havia considerada a la meva programació, era la relativa (o les relatives: C5 i C10, sobre tot) a la poca implicació dels alumnes pel que fa a explicar per escrit o de paraula allò que han fet en enfrontar-se a les tasques proposades. Insisteixo: en aquest punt, no ha estat falta de previsió per part meva, sinó, més aviat, ingenuïtat en sobrevalorar la resposta de l'alumnat a l'estímul que jo planejava oferir-los. Conseqüentment, i seguint el suggeriment fet a classe pel professor de l'assignatura de Recerca i Innovació, he tractat d'abordar la solució del problema no canviant l'esperit de les tasques, sinó, més aviat,

[4] Més amunt n'he esmentat sis, encara que un –el de Malthus– no es va poder fer. Bé, en realitat eren sis *per alumne* (o cinc si no comptem el de Malthus), doncs dos dels set programats eren alternatius entre sí: el dels cigrons ("vell", veure **8.7**) i el de l'escala (**8.6**).

[5] Tota classificació i terminologia que utilitzaré al llarg d'aquest Treball per a les competències matemàtiques és l'exposada al treball de Burgués i Sarramona (2013) referenciat a al Bibliografia.

modificant els seus enunciats —pot veure's que això és, substancialment, el que he fet amb la tasca dels cigrons (compari's l'antiga, **8.7**, amb la nova, **8.4**).

Menció apart, en aquest àmbit, mereixen les competències i processos relacionats amb l'ús i comprensió de la simbologia algebraica que es tractava d'introduir amb aquesta unitat (la de les lletres amb unes altres lletres com a subíndexs de domini discret, és a dir: típicament, coses com ara l' a_n que apareix a la portada d'aquest Treball). Podríem dir, per precisar, que parlem de les competències C1, C9 i C10 ("Matematitzar problemes", "Representacions" i "Expressar i entendre", dit de manera abreujada). Fem-hi una puntualització: el rendiment dels alumnes ha sigut excel·lent, millorant els resultats obtinguts a les unitats anteriors a la meva intervenció, i mostrant guanys concrets en moltes de les competències que ens interessen —no només les matemàtiques—, com ja explico amb detall a la Memòria de pràctiques. Això però, el tema de la perfecta assimilació de la notació dels subíndexs era un dels meus objectius prioritaris en la programació de la unitat, al qual he dedicat una quantitat notablement gran de temps i esforços. I el cert és que els resultats obtinguts, malgrat ser bons en termes absoluts —o, si això no ha de tenir molt de sentit, hom podria dir "en termes relatius a la resta d'alumnes de 3r d'ESO de què tinc notícia"—, no han sigut proporcionals a aquesta quantitat de temps i esforços. I el perill de les dificultats amb els primers contactes amb la simbologia algebraica és molt gran, com bé assenyala Kieran (2004) al seu article, perquè pot dur a l'alumnat a considerar que les matemàtiques *no tenen sentit*, situació que difícilment podrà conduir a bon port en termes acadèmics.

En resum: si bé no hem de considerar com a "fracàs" els resultats en aquesta competència, també és cert que disten prou de poder ser descrits com a "idonis". I la responsabilitat només me la puc atribuir a mi mateix, doncs tinc motius sobrats —en que ara no hi entro— per a creure que la resposta mostrada en aquest àmbit per part dels meus alumnes no està per sota de la mitjana; és a dir: estem parlant d'un problema generalitzat, dificultat intrínseca de l'enfocament actual o de la matèria a estudiar (es podria veure de les dues maneres), i respecte del qual els professors tenim una responsabilitat davant la qual la majoria de nosaltres no sabem encara, i jo no n'he sigut l'excepció, mostrar-nos adequadament a l'altura.

Abordem ara la idoneïtat **cognitiva**. Sempre he tractat de situar-me (i ressituar-me, en temps real de l'acte docent) a dins de **la ZDP** dels alumnes per facilitar els processos de reacomodació i generació dels nous significats, així com d'explorar els **coneixements previs**, i fer repassos i baixar el nivell quan ha sigut necessari (i ho ha sigut més d'una vegada). Com que els resultats, vist el que s'ha dit en el punt anterior, han sigut en general bons, no veig motius per creure que tinc grans mancances en aquest aspecte, o, al menys, no més enllà de les associades a la cerca d'un procediment més sòlid de crear en els alumnes els conceptes associats a la ja esmentada notació dels subíndexs. Dic això perquè durant l'explicació en que ho vaig introduir (veure'n el guió a **8.8**) vaig tenir molta cura d'ajustar la *bastida* a les circumstàncies dels nois, però ara podem saber que que això, a la llarga, no va ser prou. De tot això, ja que és un dels punts centrals de la meva reflexió teòrica al següent apartat, no en donaré aquí massa detalls més. Hi ha una tasca concreta que no necessitava, en principi, d'una *bastida* excessivament profusa en el seu enunciat —la dels cigrons "antiga", veure **8.7—**, però el seu context en la seqüència d'activitats, i em refereixo al fet d'haver-la inclosa, improvisadament, a una sessió d'activitats bi-nivell, va canviar aquesta condició. (Per això és una de les qüestions principals que tractaré durant la resta del TFM). I un altre punt, que tornarà a sortir també a la secció **4**, és que la consideració que he fet de la **diversitat** ha estat acord amb el grup-classe, de nivell alt i prou homogeni (veure **2**), però honestament no em cal sinó avaluar-la com a insuficient en grau i per tant millorable, si aspirem a que la meva programació tingui un cert caràcter de proposta general, i no excessivament lligada a les característiques concretes d'un grup tan particular com aquell en què he dut a terme la seva implementació.

Passem ara a la idoneïtat **interaccional**. No crec que tingui sentit copiar les quatre components de la graella de criteris de l'assignatura de Recerca, així com els nou descriptors, i dir que "sí, **molt bé**" a **tots els punts**. Per tant ho diré tot d'una, perquè així trobo que ha sigut, i sense excepció, al llarg de totes les pràctiques. Seguint la filosofia que he comentat al principi de la secció, aleshores, únicament destacaré que els factors millorables dels aspectes interaccionals de la meva pràctica docent estan associats a elements més específics i ja esmentats: s'afavoreix el diàleg, s'afavoreix el control o responsabilitat de l'estudi, s'interpreten els silencis i es resolen els conflictes de significat... però, és aquest "diàleg afavorit" un diàleg de natura *argumentativa* o *demostrativa* —diguem-ho així—? Estem, per un altre costat, propiciant que l'estudi autònom —que sí ha tingut lloc, notablement— tingui les característiques desitjables en competències matemàtiques, i no només generals o transversals? Són aquestes les meves preocupacions en relació amb aquest punt; preocupacions, però, que semblen ja contingudes en l'anàlisi dels altres aspectes de la idoneïtat.

Idoneïtat **mediacional**. Pel que fa a l'ús dels **recursos materials manipulatius** durant les classes, i més tenint en compte que la tutora em va mostrar la seva disconformitat amb l'ús de tals recursos, i, també, que només vaig fer classe vuit dies a aquests nois, crec que he tingut èxit, perquè aquests recursos han tingut una presència notable al llarg de tota la unitat —des del segon dia fins el mateix dia de l'examen, com a activitat d'ampliació—, i sempre amb bons resultats. Els **recursos TIC/TAC**, però, encara que han estat considerats en la programació i no absents en la implementació, m'ha semblat que no han estat tan adequadament explotats com hauria sigut desitjable, i això en part per la meva inicial aversió a tals recursos —tot i que s'ha de dir que l'he anada superant—, però sobre tot perquè els inconvenients de caràcter temporal m'han dut a prendre decisions en què han prevalgut certes qüestions prioritàries per sobre d'una major introducció en elements TAC. Per exemple: no els he ensenyat a calcular termes de progressions aritmètiques o geomètriques amb les seves calculadores. Per què? Mirant la meva vida d'estudiant, això no m'ha servit mai per a res, tenint les fórmules. Més m'ha ajudat, per exemple, saber usar l'Excel. Però no he tingut temps de dedicar una activitat a l'Excel: només un alumne ha tingut la seva "tasca personalitzada" centrada en aquest programa —era la part de representacions gràfiques de progressions, que la resta d'alumnes van fer a mà, obeint a motius que ara no venen al cas—. Quan dic "no he tingut temps" vull dir, evidentment, "no he considerat oportú gestionar el temps de què disposava concedint un lloc preeminent a". Però no és una crítica negativa: ha sigut, trobo, més important fer el tipus d'activitats interactives en grup, de coneixements previs, o amb els recursos materials, que sí he fet, per citar-ne només algunes. El que sí **he tirat en falta**, i la mancança, crec, ha sigut meva —i, en part, de la organització del programa de l'assignatura de Recursos del Màster, cosa que tinc pensat comentar-li al professor Sergi Múria—, ha sigut preparar **un web "del professor"** com a via de comunicació còmoda i eficient amb els alumnes per via electrònica —perquè sí els vaig demanar els mails, i ens vam escriure entre nosaltres en més d'una ocasió, però això té certes limitacions—. Entre altres coses, una de les virtuts, trobo, de les tecnologies TAC, és que es poden proposar deures per a casa que no els costin tant de fer, si aconseguim —i amb els ordinadors pot ser, de vegades, prou més fàcil que amb els enunciats en paper de problemes— que els resultin atractius.

Les **contextualitzacions**, per un altre costat, sí han estat molt reeixides: molts alumnes que no recordaven algunes coses, com ara la fórmula del terme general de les progressions aritmètiques o geomètriques, ràpidament eren capaços de recordar-les quan jo els suggeria: "pensa en la granota", o bé "pensa en l'escala" (també: pensa en com Gauss sumava els primers naturals, etc.). Anàlogament puc dir amb els exemples que vaig contextualitzar personalitzadament per a les gràfiques que havien de fer a casa: els que volien anar de viatge al Japó, tenien un problema sobre un estalvi i uns preus d'avions; els que els agradava el Deportivo de la Coruña, tenien un model de predicció dels seus gols a final de temporada, etc.

Els **problemes** en aquest aspecte de la idoneïtat mediacional cal cercar-los, doncs, en les **conseqüències** que han tingut les **repetides absències** de gran part dels alumnes, així com les dificultats creades per una **mala gestió** (per part del centre) **i condició** de les **aules —**res a dir sobre els **horaris** en sí**—**. Com he assenyalat repetides vegades a la Memòria de pràctiques, així com en diversos llocs del present TFM, han faltat moltes vegades bona part dels alumnes degut a xerrades que es feien **—**i jo no estava mai avisat**—** per a alguns d'ells (i semblaven indefugibles). També se m'ha fet canviar d'aula a última hora més d'una vegada, i la pissarra digital tenia el costum d'espatllar-se quan més la necessitava **—**i la pissarra tradicional estava ficada a la paret lateral de l'aula, de manera que era quasi inviable el seu ús**—**.

Els resultats de totes aquestes dificultats mediacionals **—**si es vol**—** contingents ha sigut, no cal ni dir-ho, un continu haver de replantejar-me la **gestió del temps**. Ho he fet bé? Crec que majoritàriament sí, tret del que respecta a un punt. Aquest punt ha estat la correcció de deures, doncs sempre pensava que corregir-los quan el 33% no hi era no seria just, però a l'endemà me'n faltaven més, o tenia progranada una activitat grupal important que ocupava tota la sessió, o... en fi, que al final vaig haver de fer vertaders malabarismes per corregir tots els deures proposats amb uns mínims de qualitat en el procés, però no vaig poder evitar que entre la correcció d'alguns d'ells i el dia de la proposta passés massa temps **—**cosa altament perjudicial, com resulta evidet**—**, així com que el nombre total de deures proposats fos lleugerament inferior al que jo hauria considerat *idoni* pel que respecta als de tipus mecànic. A més a més, la causa principal de no haver acabat fent l'activitat TAC de Malthus es pot veure íntimament relacionada amb aquest problema dels deures acumulats. Voldria ser prudent, però, i no posicionar-m'hi, doncs tinc els meus dubtes: és molt probable que el temps dedicat a cada tipus d'activitat hagi sigut el raonable amb un marge de només vuit dies (calendari que no vaig triar jo voluntàriament, bé que tampoc no el vaig discutir), i, senzillament, la programació tenia un caràcter en excés ambiciós.

És aquesta la única carència notable en idoneïtat mediacional. La resta ha anat bé o molt bé (el nombre d'alumnes del grup era molt adequat per a fer les classes, per exemple).

Anant una mica més enllà del dit sobre certes mancances en matèria de TIC/TAC, o del problema de l'acumulació de deures, crec que un dels ingredients que es deixa veure per sota dels elements d'autocrítica que he assenyalat en aquest punt, així com en alguns dels altres, és que el meu plantejament de la programació era massa rígid, i això dificultava la meva capacitat d'improvisació i adaptació a les contingències inesperades —que, paradoxalment, sempre ens cal esperar—, encara que no m'ha faltat voluntat ni ànim per assajar aquesta improvisació (gairebé a tothora, de fet).

Aquesta és **la conclusió rellevant** a guardar: **necessito** dissenyar una **proposta** més **flexible**. I, contràriament al què he dit —diguem-ne— disculpant-me sobre el tema de la notació dels subíndexs, que sembla un mal de difícil curació, penso que aquest error dels deures acumulats i la poca flexibilitat no era tan difícil de superar, de manera que el punt passa a ser un **objectiu**, si no essencialment matemàtic, sí **d'importància principal** i no menor que els estrictament matemàtics.

Idoneïtat **emocional**: aquest punt ha sigut, possiblement, en el que més ha excel·lit la meva activitat docent, tant en proposta com resultats. Així, des de la segona pregunta del qüestionari inicial (**8.5**), fins les tasques personalitzades per a casa, que ja he esmentat més amunt, passant pels problemes a resoldre a classe o els exemples de les explicacions, han estat acuradament seleccionats tenint en compte la realitat i interessos dels alumnes, de vegades fent-los preguntes obertament —és el cas de la primera pregunta del qüestionari, **8.5**, en que em basí per a dissenyar algunes de les tasques personalitzades—. La utilitat, precisió i bellesa de les matemàtiques ha estat recordada en molts àmbits i moments al llarg de tota la unitat, amb resultats sorprenentment positius en alguns cassos; també, l'autoestima i la confiança en les capacitats pròpies de tots ells sense excepció ha estat fomentada i treballada (així com el respecte als últims en lliurar l'examen, l'originalitat de certs plantejaments per enfrontar les tasques —encara que no fossin les més apropiades per arribar ràpidament a la resposta—, el valor del treball cooperatiu i que uns ajudin als altres i siguin forts com a grup, etc.). En general, insisteixo, crec que aquesta àrea ha sigut la de major èxit, pels guanys assolits considerats *per se*, i per comparació amb els altres aspectes de la *idoneïtat*.

Idoneïtat **ecològica**: L'únic descriptor que no sembla haver sigut satisfet desitjablement és el corresponent a l'adaptació al currículum, en la seva vessant de l'avaluació, per això que hem comentat al principi de no haver realitzat la part sumativa de l'avaluació amb el caràcter de "continuada" que hom suposa desitjable (tot i que en una primera passada no me n'havia adonat que aquell comentaria encaixava aquí —ara, de tota manera, m'estimo més deixar-lo al principi—). Això però, sí s'han adaptat els criteris d'avaluació a les competències que marca el currículum, i s'han dut a terme amb regularitat procediments d'avaluació amb elements, que després han sigut molt tinguts en compte per a reajustar la programació i les exigències. Al punt d'idoneïtat epistèmica ja s'ha discutit l'adaptació del continguts, que també ha merescuc, honestament les millors valoracions per part meva. La innovació didàctica, al seu torn, ha sigut una de les meves constants preocupacions, bé introduint modalitats de treball cooperatiu de gran grup dissenyades per mi per a treballar, alhora, la Competència Social i Ciutadana i la d'Aprendre a Aprendre, o bé assajant recursos materials —ideats i construïts per mi mateix—, amb ànim de canviar l'enfocament de certes explicacions i acostar-les més a la psicologia de l'aprenentatge adolescent, tal qual l'hem estudiada al mòdul generalista del Màster. Els punts d'adaptació socio-professional i cultural, però, sí han estat considerats, però d'una manera més moderada. Sobretot he relacionat les matemàtiques vistes amb l'art i amb unes altres branques de les matemàtiques, o amb aspectes competèncials associats a situacions de la vida quotidiana, però pràcticament no he esmentat la repercussió positiva que l'assoliment del objectius matemàtics de la unitat podia tenir en el futur professional dels alumnes, així com tampoc no he incidit gaire en la relació de les progressions amb la ciència, potser perquè tots els exemples que em venien al cap no anaven a tenir cap significat per a ells: Òptica Electromagnètica, Mecànica Quàntica, Mecànica Clàssica, Física de l'Estat Sòlid... l'únic dia que vaig tenir la ocasió de relacionar la successió harmònica amb la música, perquè vaig dur, ja acabada la implementació de la meva unitat, la guitarra a classe, no hi vaig caure, malauradament —recordo que ho vaig pensar tard, tot i haver-ho comentant, a segona hora, amb un alumne de 2n de Batxillerat que tocava el violoncel—.

Tenia pensat, arribat aquest punt en què ja he completat un repàs a totes sis vessants dels criteris d'idoneïtat, tractar de fer un "hexàgon didàctic" per a recollir de manera breu i clara una perspectiva global de la informació englobada en tota aquesta secció; però el cert és que ara trobo que no seria gens objectiu, per motius diversos, i conseqüentment l'única cosa que aconseguiria, com a molt, seria generar percepcions errònies sobre la realitat que tractaria de descriure.

En comptes d'això, trobo més fructífer **formular** algunes poques **preguntes**, que puguin, eventualment, servir com a guia per al plantejament dels objectius prioritaris —o prioritzats— sobre els quals fer la recerca bibliogràfica i desenvolupar la base teòrica, a la secció següent, per a poder construir i justificar la proposta de millora de la unitat didàctica.

Aquestes preguntes podrien ser:

- Sobre quins aspectes puc incidir per a facilitar un aprenentatge significatiu de la **notació** del **terme general** de les successions?
- Sobre quins aspectes puc incidir per a facilitar que la meva **programació** sigui **més flexible** pel que fa a la de gestió del temps?
- Sobre quins aspectes puc incidir per a poder considerar totes les vessants i nivells de la **diversitat**, sense que això perjudiqui massa uns altres aspectes de les classes?
- Sobre quins aspectes puc incidir per a aconseguir **que els alumnes s'expressin** més sovint **explicant** allò que han fet, així com aportant-hi **justificacions argumentades**?

Totes aquestes qüestions es tindran molt presents, de forma tàcita o explícita, al llarg de les seccions següents.

4. Consideracions teòriques i recerca bibliogràfica

La proposta de millora que he dissenyat tracta de tenir un caràcter integral, en el sentit de ser un conjunt de tasques i mesures prou relacionades entre sí, i tals que cadascuna respon a la necessitat de vorejar més d'una de les mancances detectades, conformant entre totes un conjunt o ventall de diferents opcions disponibles, i intercanviables, durant el desenvolupament de la unitat didàctica en temps real.

Entre uns altres motius per fer això, podem adduir que el defecte més gran que he trobat a la implementació de la unitat didàctica del Pràcticum II ha tingut un caràcter general, i no matemàtic; a saber: la dificultat per adaptar el programa a les circumstàncies concretes del dia a dia. Per tant, ens plantegem que la nova proposta faciliti una major flexibilitat en aquest sentit.

Pel que fa a l'enfocament teòric que justifica les noves activitats didàctiques, i en el qual m'he inspirat per a plantejar-les, puc dir que l'he anat esbossant a partir de dues modalitats de consulta i ús de fonts. Per un costat, tenim alguns articles o textos acadèmics ja treballats prèviament, o bé trobats en el procés de cerca bibliogràfica, que només han sigut rellegits per sobre, o consultats de manera puntual. Serien els casos respectius, per exemple, del text de Miras (1993) sobre el paper dels coneixements previs, o l'article d'Ortiz (2008). Per un altre, hi ha les fonts principals que he llegit per primer cop i estudiat en profunditat alhora que preparava el TFM. Aquestes fonts són dues: el treball de Kieran (2004) i el de Sowder (2007), a més de l'article de menor extensió amb que P. Puig Adam va presentar i justificar el seu aclamat Decàleg l'any 1955 (Puig, 1995).

Abans d'exposar la manera en què he tractat d'emprar les idees de tots aquests autors, diré una paraula sobre el procés de recerca bibliogràfica. Tot aquest procés ha estat dut a terme des de casa, és a dir: utilitzant els documents que ja tenia —en format paper o en format electrònic—, o bé cercant-ne i consultant-ne via Internet. Inicialment, vaig tractar de buscar resposta als meus interrogants i necessitats a partir de l'article de Font (2011), en què es descriu el panorama actual de la investigació en didàctica de les matemàtiques a Espanya i Portugal. Vaig fer una selecció entre els molts autors que s'hi esmenten, i intentí un primer tast, mirant per sobre alguns dels articles. Malauradament, trobí el problema que les qüestions tractades no eren especialment les que a mi em preocupaven, o bé tenien enfocaments massa generals, que no anava a poder aplicar al meu treball amb la immediatesa que les circumstàncies m'estaven imposant. Vaig parlar-ho amb el meu tutor i em va donar els noms d'alguns autors, però a l'hora de posar-me a buscar la informació, el mateix problema reaparegué.

Així doncs, vaig mirar de trobar una via alternativa. Per a l'assignatura del Màster de Didàctica teníem un conjunt de quatre articles, dos d'àlgebra i dos de probabilitat, com a propostes de treball. També hi havia la possibilitat d'analitzar una certa unitat didàctica d'un llibre de text en català, opció que jo havia començat a fer, entre altres coses per evitar haver de llegir en anglès. Tanmateix, com que les idees vistes a les classes de didàctica de l'àlgebra m'havien resultat enormement fructíferes durant el Pràcticum II, en un moment donat vaig pensar que el suport teòric que em calia per al TFM el podria potser trobar als dos articles que, en un principi, havia rebutjat sense mirar-los amb detall. I aquesta ha sigut, al capdavall, l'opció que ha prevalgut. De manera que vaig fer el treball de Didàctica basant-me en l'article de Kieran (2004), i he utilitzat tots dos, el Kieran i el de Sowder (2007), com a punt de partida fonamental, amb què inspirar-me i recolzar els aspectes matemàtics de les presents propostes de millora.

Ofereixo tot seguit una perspectiva global de l'enfocament teòric d'aquestes propostes, en què he tractat d'articular les idees dels dos articles esmentats, i complementar-les i integrar-les amb les preses de la resta de fonts.

El problema principal, en termes —ara sí— estrictament matemàtics, que he trobat al Pràcticum II es pot resumir dient que ha estat que els alumnes assimilin, usin i recordin la simbologia o notació pròpia de les successions numèriques. És a dir: a_1 , a_2 , a_3 , a_4 ... , per cadascun dels termes concrets, i —sobretot— a_n , per al seu terme general. És aquí on lliguem amb l'article de Kieran (2004): sobre els problemes que es presenten quan té lloc el trànsit escolar des de l'estudi de l'aritmètica a l'estudi de l'àlgebra, l'autora esmenta en lloc preeminent el pas de la simbologia "no literal" a l'ús simultani de lletres i números. Aquest pas conceptual significa, tradicionalment, un hiatus tan fort, que sovint causa un rebuig perenne a les matemàtiques en bona part de l'alumnat. Una de les característiques clau d'aquest rebuig —segons com interpreto el que Kieran expressa a l'article— és que els alumnes deixen de veure la matemàtica com a només *difícil*; ara, també els resulta *incomprensible*. L'autora es planteja, en conseqüència, si tindria sentit tractar d'introduir ja durant els cursos inferiors alguns elements propis de l'àlgebra, amb l'objectiu de suavitzar el trànsit esmentat.

Amb aquest objectiu, es planteja una classificació dels diferents elements que constitueixen l'àlgebra escolar, amb la particularitat de centrar-se no tant en categoritzar els continguts de la matèria, sinó en fer-ho amb l'activitat desenvolupada per l'alumne quan s'enfronta al seu estudi. Així doncs, troba tres tipus fonamentals de processos: els de construcció dels objectes propis de l'àlgebra, els de la seva manipulació segons certes regles, i un tercer tipus de processos on l'àlgebra és una eina, i que no són específics necessàriament d'aquesta matèria: solucionar problemes, modelitzar, reconèixer estructures, justificar, demostrar, predir, generalitzar, estudiar el canvi, analitzar relacions. Denomina aquest darrer tipus d'activitat "processos globals meta-nivell", i, al capdavall, seran els més importants de cara a solucionar les dificultats analitzades.

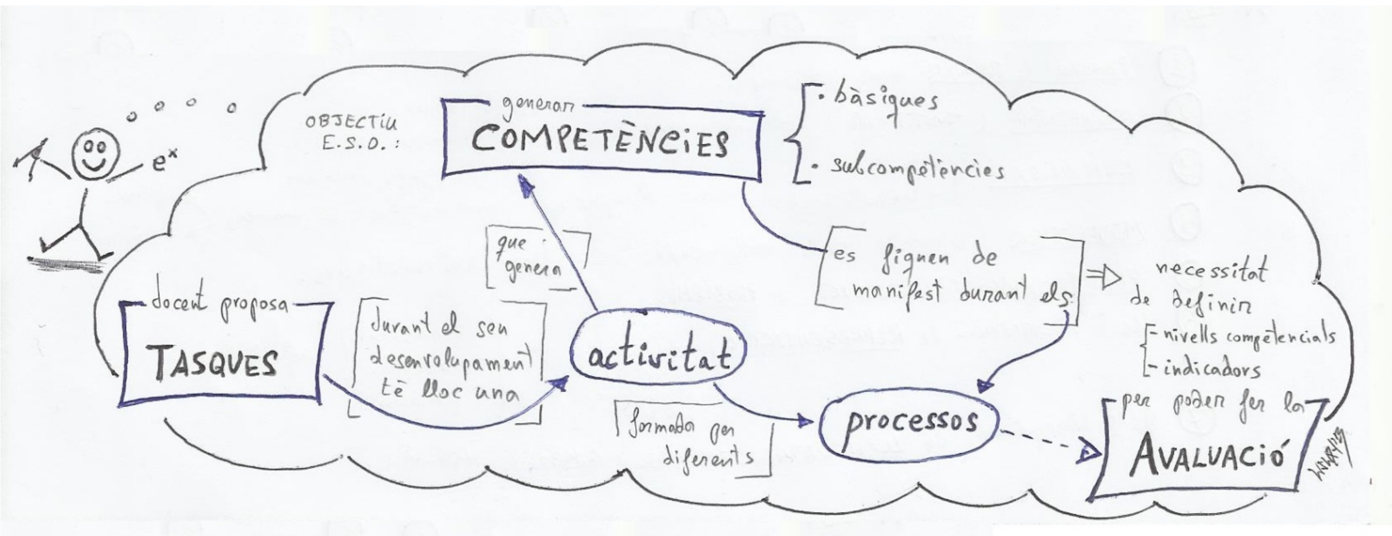
Pot resultar cridaner que la manera de facilitar l'àlgebra sigui ficar èmfasi en l'única part de l'activitat algebraica escolar que no és definitòria de la matèria. En termes purament teòrics i generals, Kieran diu que la gran importància dels processos meta-nivell és que són els que permeten la construcció dels significats d'allò que s'estudia. Aquesta idea sembla estar d'acord amb les expressades per Miras (1993) al seu article: el bon aprenentatge —el que es recordarà més temps i permetrà la seva aplicació, o aprenentatge *significatiu*— no es produeix, senzillament, gràcies a un professor que expliqui de manera molt clara i pausada i un alumne molt atent i intel·ligent, que faci els deures amb diligència. L'aprenentatge significatiu es produeix quan aquest alumne és capaç de relacionar adequadament els coneixements que ja tenia amb allò que està treballant, i és així com *construeix* el significat dels nous elements incorporats —interpretant-los en termes dels antics—. I són els processos globals meta-nivell anteriorment enumerats, si es pensa una mica, aquells en els quals els alumnes tenen la possibilitat de fer aquesta construcció de significats quan estudien l'àlgebra, bé per la seva relació amb unes altres parts de la matemàtica, o bé per la contextualització amb unes altres realitats i entorns propers a ells.

L'altra característica essencial d'aquest tipus de processos està, precisament, en no ser només propis de l'àlgebra. És justament aquesta propietat la que permet que siguin treballats mentre s'estudia una altra part de les matemàtiques —l'aritmètica o la geometria, típicament—, generant una manera de pensar que és la necessària per a l'estudi de l'àlgebra, i preparant el terreny, aleshores, per a la seva futura introducció. És a dir: Kieran creu que per optimitzar l'ensenyament de l'àlgebra a les escoles no hem de dedicar més hores a l'estudi d'una sèrie de processos relacionats amb la construcció de definicions i manipulació d'equacions, sinó que cal considerar com a clau de l'activitat escolar algebraica una certa "manera de pensar", que pot i deu ser conreada prèviament des d'altres àrees de la matemàtica.

Concretament, i és aquí on volia arribar, es pot fer una aproximació pre-simbòlica a la solució de certs problemes que un adult amb formació matemàtica atacaria, normalment, amb la típica notació literal de l'àlgebra (lletres com a incògnites, paràmetres i variables). Quina és aquesta aproximació? Per a entendre-ho bé, anem a recórrer a l'altre article dels dos que he considerat principals: el de Sowder (2007). Aquesta autora analitza els problemes de comprensió de les matemàtiques en els propis ensenyants, i les repercussions que això té sobre els alumnes de cursos mitjans i elementals. En concret, entre les pàgines 11 a 14 analitza un *story problem* —problema a partir d'una "història"—, els dels dos germans que van a escola, i raona per què l'alumne que el resol amb incògnites i equacions pot perfectament no entendre allò que està fent —havent treballat de manera mecànica, provant d'encaixar esquemes que recorda i no entén, però sap manipular simbòlicament—. En canvi hi ha una solució també possible, tot i que requereix un cert esforç, que es construeix raonant verbalment sobre les quantitats implicades, interpretant el significat i les propietats de les operacions aritmètiques que les relacionen, i fent diagrames que esquematitzin aquestes relacions. Sowder (2007) assenyala la importància que té per als alumnes —i els futurs mestres— treballar aquest tipus de solucions, per afermar la comprensió de les operacions, i evitar mancances, abans de llançar-se a emprar els mètodes basats en la notació literal i la seva *sintaxi*. Sobre l'aplicació dels diagrames en la resolució de problemes, concretament, l'autora explica que sovinteja el prejudici, entre els alumnes i entre alguns professors, que no és la manera desitjable de treballar, i que en realitat qui fa diagrames està intentant fugir de l'enfrontament amb el veritable problema que se li ha plantejat. Contràriament a això, l'autora exemplifica entre les pàgines 14 i 15, amb el problema dels dietistes, que *saber esquematitzar gràficament les relacions entre totes les quantitats implicades a un problema és idènticament igual a entendre el problema*, i permet ser capaç de resoldre'l més enllà dels valors concrets de les dades proporcionades per l'enunciat, i tot això sense haver fet servir lletres com a incògnites, variables o paràmetres.

L'article de Sowder (2007), doncs, dóna exemples adequats per a entendre què vol dir Kieran (2004) amb l'aproximació pre-simbòlica al pensament algebraic, i a mi concretament m'ha permès partir de la seva caracterització diagramàtica de la comprensió d'un problema per a concebre el mètode del diagrama de flux, central en una de les meves propostes de millora (la de la calculadora de progressions, veure **5.1**, **8.2** i **8.3**).

L'estratègia general en què em baso, doncs, per atacar les dificultats amb la notació a_n , i les fórmules dels termes generals de successions, passa per fer una aproximació pre-simbòlica als problemes —els mateixos problemes que després resoldrem usant la notació literal—, i fer-ho ficant-hi èmfasi en la identificació verbal de les quantitats implicades i les relacions que hi ha entre elles, recolzant-se amb esquemes o diagrames, com ara els diagrames de flux —però no només: veure l'apartat 8è de la nova versió de la tasca dels cigrons (**8.4**)—. Vist des del punt de vista del currículum, a més a més, l'enfocament de Kieran (2004) és totalment oportú: ella marca com a objectiu l'aprendre a "pensar de manera algebraica", més enllà de practicar i recordar certs continguts d'un programa o temari, la qual cosa s'assoleix proposant tasques durant les quals l'alumne desenvolupi una activitat que generarà (i mostrarà) aquesta forma de pensar, si tal activitat està formada pels processos adients (els que l'autora denomina "globals meta-nivell"). Precisament aquest esquema expressa, amb unes altres paraules, l'actual caràcter competencial del nostre currículum:



He completat l'estratègia amb alguns altres elements i reflexions, associades a qüestions de caràcter més restringit o puntual, o a alguns aspectes no matemàtics. Per exemple, una de les dificultats recurrents era la pregunta: «però ....i què vol dir l'*n*?». Sembla que com a resposta no funcionava del tot l'invocació a situacions en què el mateix alumne que fa la pregunta ha estat capaç de resoldre un problema ben contextualitzat emprant l'*n*. Tampoc vorejava la dificultat comparant amb exemples en què re-expressem de forma compacta una informació, la qual resultaria prou llarga de dir amb paraules, o l'ús de metàfores per aclarir el concepte: l'*n* com a comodí de la baralla, l'*n* com a etiqueta, etc. (No diguem ja els intents d'explicació amb definicions acurades i llenguatge precís). Així, he tractat de reenfocar el problema a partir de les idees expressades al text de Miras (1993): l'alumne *entén* quan dona significat, relacionant adequadament amb un altre element que ja té integrat. I els motius que obstaculitzen aquest procés no són únics: pot no tenir encara "integrat" cap element adequat per a donar significat al nou, o pot també, per exemple, tenir-lo però no arribar a activar-lo (degut a causes que també poden ser diferents). En el cas de l'*n*, jo he assajat l'estratègia del dau, en el joc amb la calculadora de progressions (**5.1**). Estrictament, aquest dau és un element prescindible pel que fa a la definició i solució del problema de l'escala —àmbit en què l'emprarem—, així com pel que fa a la formalització algebraica d'aquest problema; no obstant, és un referent perfectament comprensible *a priori* per als alumnes, i que permet organitzar les diferents possibilitats de l'enunciat, així com les la targetes de la calculadora, amb un mètode que s'entén bé i es recorda amb facilitat. Ara no diríem, per exemple, una cosa tan abstracta com "per a valors de l'*n* que siguin parells...", sinó que diríem, senzillament, una cosa tan quotidiana com "si en tirar el dau ens surt parell...". També, tindrem una recepta per contestar l'eterna pregunta: «què és l'*n*?», resposta: «el número que surt quan llances el dau. Te'n recordes del problema de l'escala? Doncs igual».

Continuant amb la perspectiva constructivista de l'ensenyament —que és la del text de Miras (1993)—, un altre aspecte de la meva proposta és que he tractat de ficar més èmfasi en elevar el grau de participació activa de l'alumnat durant el procés de l'aprenentatge. Per exemple, la primera sessió de la seqüència didàctica implementada a l'ESO durant el Pràcticum II estava plantejada seguint un enfocament constructivista *moderat*, en el sentit que fèiem un qüestionari inicial amb caràcter mixt —d'exploració però també introducció de nous elements, o mobilització dels ja coneguts—, i després l'explicació era del tipus que jo denomino "interactiva" (veure aquest qüestionari a **8.5** i el guió detallat de l'explicació subsegüent —tal qual va ser implementada, i segons s'inclou a la memòria de pràctiques— a **8.8**). És a dir, una explicació que no és magistral, però tampoc no és l'alumne qui té la iniciativa en la comunicació: en el context del gran grup, el professor fa plantejaments amb preguntes —dirigides o obertes— i els alumnes han de respondre, i només amb les respostes que els alumnes van donant es va fent l'explicació. Com que l'explicació d'aquesta sessió primera —que és quan s'introduïa l'*n*— va sortir aparentment molt bé, hom es planteja per què després alguns dels mateixos alumnes que tan bé havien respost comencen a mostrar notables dificultats amb els conceptes apareguts aquell dia.

Les idees pròpies del constructivisme —tal qual s'expressen al text de Miras (1993)— impliquen que ha de ser l'alumne qui vagi construint, mitjançant la seva pròpia acció, els coneixements. I una vegada acabat el Pràcticum II m'he adonat que moltes de les mancances competencials detectades, tant en el meu plantejament de les activitats didàctiques com en la resposta oferida pels alumnes davant de les tasques proposades, té a veure amb un baix nivell d'implicació activa per part dels nois en allò que es fa —com ha posat de manifest l'anàlisi fet a la secció anterior—. Si han d'escriure la resposta d'un exercici o problema, donen la mínima informació sobre el que han fet, expressant-se sovint de manera dubtosa o incoherent. No solen argumentar: si no se'ls demana, no ho faran, i quan se'ls demana no sempre ho fan, i molt poques vegades passen de fer-ho de manera pobra o insuficient. I un punt que resulta molt revelador sobre totes aquestes qüestions és que l'única competència de l'àmbit matemàtic que ha estat absent durant tota la meva unitat —tant en el plantejament com en la implementació— ha sigut la C4: "Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes". Si consultem el document de Burgués, veiem que sobre aquesta competència s'afirma que requereix «una interiorització del procés de traducció d'un problema a llenguatge matemàtic i una destresa en l'ús de les eines matemàtiques per resoldre problemes» (Burgués i Sarramona, 2013, p.21). Adonem-nos-en: potser he estat descuidat un dels aspectes clau al final del procés d'interiorització dels coneixements matemàtics (no només és la mecanització, doncs, allò que s'ha de treballar al final d'aquest procés).

Atenent a tot el que dit al darrer paràgraf, m'he plantejat refer la primera sessió —la de la introducció de l'*n*— elevant encara més el grau de participació activa dels alumnes, i rematar el treball demanant-los que proposin ells, com a deure a lliurar l'endemà, l'enunciat d'un problema en què s'utilitzin els conceptes vistos a classe (acompanyat de la seva resolució, evidentment). Aquesta estratègia, que enfronta una de les carències assenyalades, està recolzada, en part, per les idees oferides en l'article d'Escaño i Gil sobre motivació: «la creatividad estimula el esfuerzo y favorece la autoestima» (Escaño i Gil, 2010, p.138). Quins han de ser els aspectes globals, però, del nou enfocament global per a redissenyar la primera sessió? Perquè fins ara hem proposat estratègies didàctiques en un sentit prou específic, és a dir, matemàtic —amb Kieran (2004) i Sowder (2007), i l'aproximació pre-simbòlica a l'àlgebra mitjançant els diagrames per a resoldre problemes—. O bé hem parlat de quines qüestions cal millorar, sense dir com: necessitem que els alumnes expressin més sovint els resultats de la seva participació activa en el procés d'aprenentatge, i que ho facin amb més precisió, i construint no només *descripcions* sinó també *argumentacions* ...però com dur a terme aquest conjunt d'objectius?

La resposta cal buscar-la, evidentment, en idees bàsiques del constructivisme —ja que és aquesta la perspectiva principal sobre l'aprenentatge que hem estudiat i aplicat al llarg de tot el Màster—. Una bona manera de resumir l'enfocament que m'ha inspirat seria la següent afirmació de Serrano, en que es recullen de manera molt clara algunes idees clau de la teoria de Piaget: «una de las fuentes de progreso en el desarrollo de los conocimientos habrá que buscarla en los desequilibrios, puesto que estos actuarán sobre el sujeto, obligándole a superar su estado de conocimiento para, finalmente, desembocar en reequilibraciones específicas» (Serrano, Carranza i Pérez, 1985, p.94). Així doncs, per tal d'augmentar el nivell d'implicació activa de l'alumnat en una primera sessió introductòria i pre-algebraica a les successions numèriques, calia establir un pla de gestió de la classe centrada en *desequilibrar* a l'alumne i demanar-li una *reacció*. Sembla palès que la manera no pot ser altra, doncs, que renunciar a fer pròpiament una explicació, i canviar-la per una proposta de tasques per a que els alumnes les realitzin a classe, ja des de bon començament.

Sobre el format d'aquestes activitats, he cregut oportú que fos el següent: el professor planteja la tasca al "gran grup", cada alumne fa per escrit una primera aproximació individual al problema, després hi ha una descripció en petit grup, i finalment es treballa de manera conjunta amb el gran grup. Els motius que m'han dut a fer aquest plantejament són diversos, però una justificació per a gairebé tots ells es pot trobar, de bell nou, al text d'Escaño i Gil (2010). Així, a la pàgina 145 recomanen dedicar temps per al treball conjunt i ajuda entre companys durant la realització d'exercicis a classe, i a les pàgines 143 i 144 recomanen fer sovint variacions en la manera en que s'exposa la informació als alumnes. Amb l'enfocament triple que proposo, així mateix, tracto d'enfrontar les detectades mancances en competències comunicatives i argumentatives, intentant no descuidar-ne cap vessant: els alumnes escriuen les seves argumentacions, però també les discuteixen entre ells i les defensen davant la resta de la classe. Finalment, hi ha una component lúdica i competitiva entre els grups en la part final del cicle —la part del gran grup— que respon a una doble intenció: per un costat, introduir un element de *motivació extrínseca*, la qual també està en l'arrel de la motivació dels deures que es proposaran per a casa al termini de l'activitat dels cigrons (**8.4**), atès que un dels problemes de l'examen final de la unitat el triarà el professor entre els que hagin lliurat els alumnes (veure la pregunta 9a de la tasca). Per un altre, continuar evitant al màxim un caràcter de "persona que dóna coneixements" al professor, i canviar-lo, més aviat, pel de "guia en l'aprenentatge", "persona a qui consultar", "corrector" i "àrbitre".

Un altre dels motius que m'han fet decantar-me per la introducció del treball cooperatiu és ser conscient que la meva programació per a la unitat no considerava un ventall massa ample de diversitat entre els alumnes. La qual cosa era lícita en principi, trobo, si atenem a que jo coneixia ja el grup on anava a fer les classes, i no hi havia una gran diversitat de partida. Però el fet és que les circumstàncies van introduir elements inesperats de diversitat: em refereixo a que xerrades i activitats vàries de l'institut em van privar durant dues classes, una d'elles la primera, de gran part dels alumnes, els quals a l'endemà no estaven, doncs, en condicions de seguir adequadament el programa que jo havia establert. Durant el Pràcticum vaig enfrontar aquestes contingències dedicant prou de temps a modificar el meu pla, i entre altres coses vaig dissenyar una activitat bi-nivell per al segon dia, en què els que havien faltat feien la tasca de reforç de l'escala (**8.6**), i la resta feien l'antiga activitat dels cigrons. De seguida tornarem sobre aquesta segona sessió del Pràcticum, doncs el mòdul II de les propostes de millora del present TFM consisteix, essencialment, en una reelaboració del programa per a tal sessió. Abans, però, un parell més de paraules sobre això de la diversitat. Sobre el seu tractament, no cal justificar l'assaig de propostes de treball cooperatiu, així com les activitats multi-nivell. Voldria, no obstant, enllaçar amb el comentari que he fet al principi de la present secció, referent al caràcter integral de la proposta, i la seva pretesa flexibilitat. Ja he comentat en més d'un lloc les dificultats que he tingut per adaptar-me, dia a dia, a les circumstàncies inesperades. Això no vol dir que em faci por estar exposat a tals contingències, ni que no hagi sabut reaccionar quan calia durant el Pràcticum; tanmateix, sí he pogut reflexionar que la meva programació inicial de la unitat era molt ambiciosa i poc flexible, i més si ara, ja acabades les classes amb aquells alumnes, em plantegés emprar-la amb un altre grup, molt possiblement menys homogeni.

La qual cosa ens porta a tornar sobre el tema de la segona sessió del Pràcticum II i en què m'he basat per replantejar-la. L'esquema inicial de la meva programació era molt senzill: durant cinc minuts els explicava la història de com Gauss va sumar ràpidament i sense equivocar-se, sent petit, els cent primers nombres naturals (va adonar-se que hi havia cinquanta parelles que sumaven el mateix, 1+100=101, 2+99=101, 3+98=101... i per tant el total era aquesta quantitat pel nombre de parelles, 101 x 50 = 5050). Després, en principi farien la tasca antiga dels cigrons per parelles (**8.7**), durant 20-30 minuts, i jo els aniria guiant i ajudant. El contingut d'aquesta tasca és una generalització del mètode de Gauss a un altre tipus de problemes, i també un reenfocament de tals problemes utilitzant, sobretot, la tècnica del "canvi de representació". Finalment, venia una explicació al gran grup per part meva, en què els donava la recepta general per tractar tot aquest tipus de problemes —una fórmula, vaja—, i la justificava amb un material manipulatiu que havia ideat i creat la setmana abans de començar les classes. Si quedava més temps, tenia pensat proposar-los deures de mecanització i anar resolent dubtes i dificultats personals mentre els feien.

El que va passar és que set alumnes, de vint-i-u, van faltar a la primera classe, la qual cosa tornava absurd per a ells fer la tasca dels cigrons en comptes de dedicar-me a treballar les idees més importants de tota la unitat, que eren, precisament, les vistes a la primera sessió. Per això —com que repetir la primera classe no tenia sentit si considerem als "pobres" catorze que sí havien vingut— vaig idear i preparar, durant la tarda del dilluns de la primera sessió, la tasca escrita de l'escala (**8.6**), i vaig pensar que podria fer una activitat bi-nivell: els que havien faltat farien la de l'escala i els altres la dels cigrons. Era conscient, però, que jo no podria atendre a tothom, perquè voldria centrar-me en ajudar als de l'escala, tractant de garantir que assolessin els mínims per a continuar, amb perspectives raonables d'èxit, el normal desenvolupament de la resta de la unitat. És per això vaig pensar en demanar a Carmen, la meva companya de pràctiques, si podia venir a la meva classe i encarregar-se ella d'ajudar als dels cigrons. Però va ocórrer que la Carmen no podia venir a l'institut durant l'hora en què la meva sessió havia de tenir lloc, així que vaig demanar-li a la meva tutora del centre, a última hora i ja per les escales, anant a classe, el seu ajut. Però al final de la sessió vaig poder comprovar que aparentment s'havia produït un malentès entre nosaltres, i sembla que jo no havia sabut expressar-li que la meva idea era que incités als alumnes dels cigrons a aprofitar totes les possibilitats de la tasca, i no només es limités a vigilar la disciplina i contestar eventuals dubtes. Per tant, els resultats de l'escala van ser excel·lents, i els dels cigrons van ser lamentables, parlant clar —ha sigut, trobo, el meu major fracàs durant el Pràcticum II—.

Ja acabat el període de pràctiques, la meva reflexió és la següent. Primerament, no he planificar activitats multinivell que necessitin dos professors a l'aula si no tinc la garantia de poder comptar amb el segon professor. Després: això vol dir que hem de renunciar a les activitats multinivell? Sembla una conseqüència massa dràstica, i no hem de perdre de vista que a la vida real de professor trobaré, com abans ja he raonat, més grups amb més diversitat que el del centre de pràctiques. Així, deixant de banda els defectes de la tasca dels cigrons i dirigint la nostra mirada sobre la que sí va funcionar bé —la de l'escala—, podem preguntar-nos si no només va tenir èxit perquè els alumnes que la feien comptaven amb el meu suport, sinó que potser també, a més a més, entre els motius d'aquest èxit hi hagi un millor plantejament en els enunciats mateixos de la proposta.

La idea bàsica que subjau en tot aquest plantejament és quelcom que he fet servir constantment al llarg de tot el període de pràctiques, i pot resumir-se dient que, front les aparents dificultats insalvables per l'alumnat, la recepta sempre és reajustar el nivell per tractar de mantenir-nos en la seva ZDP[6]. És a dir: ajustar el nivell demanat i

[6] **Z**ona de **D**esenvolupament **P**roper: distancia entre el nivell d'allò que l'alumne és capaç de fer sense ajuda i allò que seria capaç de fer amb l'ajuda del professor o d'un company més capaç (concepte desenvolupat per Lev Vygotski durant els anys trenta del segle passat).

l'ajuda oferida —ajuda que podem veure, seguint amb la terminologia de Vygotski, com una bastida—, de manera que l'alumne no només hagi d'aplicar coses que ja sap, sinó que hagi de fer, també, alguns "salts sobre el buit", la magnitud dels quals nosaltres calibrarem de manera adient per a que no resulti excesiva. Idealment, serà el professor qui, durant la relació directa amb l'alumnat i en temps real, prengui les decisions adequades per a ajustar l'ajuda oferida i anar retirant-la en el moment oportú —d'això també parlen Escaño i Gil (2010) a les pp. 148-149—. En la pràctica, me n'adono que les característiques de la tasca de l'escala, l'enunciat de la qual vaig redactar amb moltíssima cura per a tractar de pautar molt bé cadascun dels "salts sobre el buit" que els alumnes havien de fer, permeten, si no prescindir de la presència del professor, al menys sí reduir dràsticament la necessitat de la seva constant atenció. Dit d'una altra manera: si en comptes de tenir, durant la segona sessió de la unitat didàctica del Pràcticum II, la tasca de l'escala i la tasca vella dels cigrons, hagués tingut una versió de la dels cigrons elaborada amb el mateix estil que la de l'escala, podria haver atès adequadament a tots els alumnes jo sol, amb l'única mesura addicional d'allargar una mica més el temps dedicat a l'activitat (no més de cinc minuts). Un dels objectius de millora, doncs, és refer la tasca dels cigrons segons aquesta perspectiva —el resultat de la qual cosa es presenta als annexos (**8.4**)—. En la seva reelaboració he fet servir, a més a més, totes les estratègies d'aproximació pre-simbòlica a l'àlgebra i l'ús de diagrames per a resoldre problemes que es basen en els articles de Kieran (2004) i Sowder (2007).

La conclusió expressada sobre la parella cigrons/escala té, però, un defecte del que no deixo de ser conscient: he dit que durant la segona sessió del Pràcticum vaig haver de dedicar *tot* el meu temps, durant l'activitat bi-nivell, a ajudar als de l'escala. Això no és del tot cert: alguns dels alumnes dels cigrons es van adreçar a mi espontàniament, i vaig ajudar-los una mica. A més a més, s'ha de tenir en compte que les circumstàncies de diversitat d'aquella sessió eren prou excepcionals: un terç exacte de la classe havia faltat a la classe més important. Normalment, les fonts de la diversitat entre els alumnes seran prou diferents. En qualsevol cas, la tasca de l'escala tampoc no és la panacea, i, per molt pautada que estigui, vaig comprovar que la major dificultat era invariablement el seu apartat **2.d**, el qual és, precisament, el primer moment en què entra en escena l'*n*, eterna font de *maldecaps* durant aquest tema. A més, si considerem les possibilitats de la diversitat real, em trobaré sovint amb alumnes de nivell molt més baix que els d'aquell grup, ja que era el que en deien "grup flexible u", la qual cosa en la pràctica significa "els alumnes de tercer d'ESO amb el nivell més alt de matemàtiques de tot l'institut".

En suma: concloc que la meva nova proposta, si realment vol ser flexible i tenir en compte totes les vessants de la diversitat potencialment real, necessitarà sempre considerar dos elements que no vaig considerar durant les pràctiques: el primer, tenir activitats de molt baix nivell; el segon —i específic del tema, és clar—, considerar sempre aproximacions pre-simbòliques abans d'entrar amb la notació literal.

Així, juntament amb l'activitat grupal de la calculadora de progressions, en què es basa el meu reenfocament de la primera sessió, i amb la reelaboració de la tasca dels cigrons, he dissenyat una versió de molt baix nivell matemàtic —i sempre presimbòlic— d'això de la calculadora, que consisteix, en la pràctica, en dedicar més temps a un treball manual durant la classe o com a deure per a casa —aquí comencen les variants, modificables en temps real i segons les circumstàncies—, i que podria ser feta pels alumnes menys avantatjats durant l'activitat multinivell de la sessió dels cigrons i l'escala. Els alumnes de no tan baix nivell, però que necessitin un reforç, podran fer la de l'escala sense grans problemes amb el seu contingut algebraic, atès que ja hauran tingut algun contacte amb aquesta notació en les classes anteriors[7]: es tracta d'un repàs, doncs, i no d'una introducció.

Finalment, quina seria la prescripció per als alumnes que hagin faltat a les primeres sessions, i no tinguin el (suposadament) necessari treball de base pre-simbòlica abans d'entrar amb les e*nes*? Evidentment, miracles no es poden fer en una sola sessió i amb una activitat de mitja hora, en què el professor no està, a més a més, al 100% amb l'alumne. Així que hem de triar què és el més important, i esperar que els alumnes implicats es busquin la vida amb el llibre o preguntant dubtes al professor pel que fa a la resta. La reflexió és la següent: tot el temps estem seguint com a marc —diguem-ne— axiomàtic, pel que respecta als aspectes de didàctica de l'àlgebra, els supòsits de Kieran (2004) i Sowder (2007) sobre que és més important el desenvolupament d'un cert "pensament algebraic", entenent les relacions entre les quantitats i sabent emprar-les per a resoldre un problema, que la familiarització amb el formalisme simbòlic de les lletres com a variables, incògnites o paràmetres (supòsits que són perfectament compatibles,

[7] Val a dir que, en el nou reenfocament de la unitat, aquesta activitat multinivell deixa de tenir lloc el segon dia, per fer-se, en principi, durant el tercer.

com abans ja hem raonat, amb la idea de les competències del nostre currículum actual). Si som conseqüents amb això, preferirem oferir a aquests alumnes les plantilles i els enunciats de les activitats del primer dia, per a que facin la calculadora de progressions, adquireixin certa familiaritat amb el problema de l'escala i l'important referent del dau per a l'*n*, i aprenguin a resoldre el problema amb el mètode del diagrama de flux. No hauran, doncs, treballat el tema de l'*n*, però hauran —suposadament— adquirit unes competències suficients per a construir els corresponents significats amb facilitat quan consultin un llibre de text (cosa que, insistim-hi, per sort o per desgràcia es veuran obligats a fer si han faltat a les dues primeres sessions). I si venen a preguntar al professor, ara aquest comptarà amb el referent del dau per contestar a les incòmodes preguntes sobre "què és l'*n*".

Així doncs, la pretensió inicial de desenvolupar una proposta de millora amb caràcter integrat i flexible ha passat, indefugiblement, per renunciar a tenir una programació seqüencial mil·limètricament programada, i canviar-la per un ventall més ample de possibilitats, on hi ha lloc a la improvisació, però també es provoca, no ho podem deixar de veure, una major necessitat de improvisació ja prevista *a priori*. Crec, en suma, que aquesta visió està més d'acord amb la realitat de l'acte docent que he tingut ocasió de conèixer durant el Pràcticum.

Una última paraula sobre aquesta necessitat de flexibilitat i l'atenció a la diversitat, en relació amb l'ús de les TIC i les TAC. En la programació original hi havia una activitat basada en *GeoGebra*, que no es va poder realitzar per certes circumstàncies, així com alguns altres elements menors de contingut TAC. Vaig tirar en falta, però, tenir un web propi on penjar enllaços, material didàctic o deures corregits —per a evitar el problema de l'acumulació de deures sense corregir que, per consideració als molts que faltaven a classe per causes alienes a ells, se'm va plantejar al llarg del Pràcticum II—. Així, he fet aquest web per al present TFM; la seva URL és:

http://manifoldo.weebly.com

Esmento això en aquesta secció dels plantejaments teòrics perquè està molt relacionat amb les qüestions de diversitat i flexibilitat que venim comentant al llarg dels paràgrafs anteriors. M'explico: no només existeixen diferències en nivell matemàtic o en llengua materna, ni tampoc en circumstàncies d'assistència a les classes clau de la unitat. Una de les que he trobat més importants al llarg de les pràctiques ha sigut veure la preferència d'alguns alumnes per l'ús de les eines informàtiques, al costat de la impossibilitat material d'alguns altres per a fer-les servir. (A la qual cosa s'ha d'afegir que no tots els instituts tenen un règim d'ordinadors 1x1 per a l'alumnat —que sí era el cas del meu centre de pràctiques—). Així, entre els meus pressupòsits de partida hi havia el de tractar de preparar una doble versió de les activitats més elementals —tant les de caràcter introductori com les de reforç—, i per això he programat un *contrapunt* electrònic, amb el llenguatge *Scratch*, del recurs material manipulable de la calculadora de progressions (**8.1**), i ho he fet de manera que pugui usar-se *on-line*, sense la necessitat de descarregar o instal·lar prèviament cap programa, a partir del següent enllaç:

http://scratch.mit.edu/projects/10720946/

A aquest recurs pot accedir-se també des de la plana d'Inici del meu web, fent clic sobre el botó on diu "ENTÉN AMB GERÓNIMO LES PROGRESSIONS".

I acabaré aquesta secció reflexionant de manera crítica sobre l'aplicabilitat real de les idees de Kieran (2004) i Sowder (2007) a l'àmbit que ens ocupa, és a dir: una unitat de progressions per a alumnes de 3r d'ESO. L'objecció que se'm plantejava constantment mentre llegia l'article de la primera consistia en adonar-me que, si intentava fonamentar la proposta de millora del TFM amb el seu treball, estaria, de fet, aplicant al segon cicle de l'ESO una prescripció originalment formulada per als cursos inferiors ("the early grades") de l'ensenyament. En concret, vegem que he parlant tot el temps d'una aproximació pre-simbòlica al pensament algebraic, quan en realitat els alumnes de l'institut on he fet les pràctiques feia ja dos anys que havien començat a treballar la resolució d'equacions amb incògnites. He seguit, doncs, un camí equivocat?

És evident que una resposta fefaent a la darrera pregunta passa, per força, per tornar a implementar la unitat de progressions, incloent-hi les noves propostes. Malgrat tot, el dubte m'inquietava i no vaig quedar-me —diguem-ne— tranquil fins que no vaig trobar un argument teòric prou sòlid per a vorejar l'objecció.

Vagi per davant que la mateixa Kieran (2004) ja comenta el següent:

> «The advantage of incorporing a framework for algebraic thinking ... is that it bridges ... introducing algebraic thinking in the early grades and the large body of algebra research that exists with respect to algebra learning and thinking with older students» (pp.148-149).

És a dir: l'enfocament de l'*algebraic thinking* proposat per l'autora, entenem, té una continuïtat natural amb allò que diuen els investigadors sobre l'ensenyament de l'àlgebra als cursos no elementals —no introductoris per primer cop de la notació literal, per tant—. De fet, cap al final del text també afirma sobre el seu model de l'activitat algebraica —model en què es basa eminentment com a punt de partida en l'article— que: «Brown and Coles found this model to be a "useful way of describing algebraic activity" in their research involving 11, 15 and 18 year olds» (Kieran, 2004, p.149).

No és això, tanmateix, l'argument sòlid que esmentava una mica més amunt. Tal argument va arribar-me de la mà de P. Puig Adam, mentre llegia amb especial atenció el petit article de 1955 en què presentava i comentava el seu celebrat Decàleg. Així, als comentaris del precepte 7è —"*Graduar cuidadosamente los planos de abstracción*"— afirma que "*lo concreto y lo abstracto no son términos absolutos sino relativos*", i continua aclarint que amb successius actes d'abstracció construïm categories mentals en què s'estratifiquen el concret i l'abstracte en ordre d'abstracció creixent i concreció decreixent, de manera que "*cada estrato es abstracto respecto del anterior y concreto respecto del siguiente*" (Puig, 1955, p.5).

En conseqüència, l'anàlisi que hi faig és el següent: els meus alumnes de 3r d'ESO es trobaven a un nivell on tenien familiaritat amb l'ús de l'x i l'y per resoldre sistemes, però no amb el d'una igualtat que al membre esquerre té una a_n i al dret una expressió en termes d'n. És una part de l'àlgebra que els resultava encara marcadament abstracta[8] des del pla en què ells es trobaven. Per tant, utilitzar l'n per construir la taula de valors de $(-1)^n$ no havia de ser "tabú" en el procés d'aprenentatge (és el que es fa al qüestionari de coneixements previs durant la primera sessió, veure **8.5**), però el que calia evitar fins el final —fins que s'haguessin entès les relacions entre les quantitats implicades i reconegut les estructures— era, tan sols, parlar de l'a_n (que és el que sí es

[8] dic "marcadament" perquè dir "abstracta" quan hom parla de l'àlgebra és poc més que dir no res.

fa en la tasca escrita de l'escala, **8.6** [9]). Per què pensem, malgrat tot, que això havia de funcionar? Arribats a aquest punt, tornem a la forma concreta del model de Kieran (2004). L'activitat algebraica pot ser vista —recordem-ho— des de dues perspectives: la construcció d'objectes i la seva manipulació, per un costat, i l'àlgebra com a certa manera de pensar, per un altre. I l'adequada introducció en els continguts —irrenunciables, per estrictament definitoris de la disciplina— de la primera modalitat s'assoleix si s'ha preparat bé el camí, fomentant prèviament la "manera de pensar algebraica" de què parla la segona. Manera de pensar que pot ser treballada, remarquem-ho, *des de fora* de l'àlgebra. És en aquest *des de fora* on està la clau, si ho combinem amb les idees que he extret de l'article de Puig Adam (Puig, 1955): la manera algebraica de pensar necessària per a uns nivells d'abstracció superior, associats a unes certes parts de l'àlgebra, sembla poder conrear-se, també, a partir de nivells d'abstracció previs o més elementals, tot i que ja purament algebraics, sense haver encara d'entrar formalment en l'estadi superior.

Tot aquest marc teòric, però, són tan sols arguments de plausibilitat. El remat final que dóna forma concreta a la proposta és utilitzar el mètode de Sowder (2007) per a resoldre certs problemes, els quals normalment s'atacarien amb la simbologia algebraica, mitjançant l'ús de diagrames que descriguin les relacions entre les quantitats implicades. Ara ja no es tracta d'un simple argument de plausibilitat: si té raó Sowder quan afirma, com s'ha dit més amunt, que saber esquematitzar gràficament les relacions entre totes les quantitats implicades a un problema és idèntic a entendre el problema —i jo sí que comparteixo, honestament, tal parer—, aleshores només hem de reparar en què no hi ha cap motiu per creure que els nostres alumnes de 3r d'ESO no podran identificar i relacionar entre sí, adequadament guiats, les quantitats del problema de l'escala en què es basa la proposta principal d'aquest TFM —i la meva breu experiència docent avala clarament aquesta afirmació—; per tant, l'únic escull que ens restarà és, estrictament, el pas al *símbol*, empresa que podrem enfrontar tenint ja el *concepte* treballat i entès, i comptant —en definitiva— amb el referent previ adequat de cara a la construcció de nous significats per als nous significants.

[9] Per això, per exemple, he preparat el retallable de la versió material de l'activitat de l'escala (**8.1**) incloent la notació a_1, $a_2 \dots a_6$ per a les successives sis altures que hi entren en joc —atès que empíricament si sé que aquesta notació no els presenta grans dificultats, doncs així m'ho ha demostrat el Pràcticum II—, però he tingut molta cura d'evitar per tot arreu l'aparició de la "temuda" a_n.

5. Proposta de millora

5.1 Mòdul I: Treball cooperatiu pre-simbòlic

Aquest mòdul és una nova proposta per a la primera sessió de la unitat didàctica. S'ha de dir, però, que es molt susceptible de les modificacions i ajusts que el professor que l'hagi de desenvolupar consideri escaients.

Els primers 15 minuts són com en la programació vella:

5' de presentació de la unitat.

10' qüestionari de coneixements previs (**8.5**).

Una vegada fet això, comença una activitat en grups petits, en principi de quatre alumnes (és més fàcil de gestionar el tema dels seients que si són de tres).

Hi ha contemplada la possibilitat, però, d'oferir un treball individual de molt baix nivell als alumnes amb especials dificultats, adaptacions curriculars, etc., que es basa en la construcció del retallable de l'escala de **8.1**., seguint les indicacions del Mòdul III (**5.3**).

El primer objectiu per als alumes que segueixin el pla del treball cooperatiu és identificar les sis quantitats implicades en el problema de l'escala (l'enunciat del qual es troba plantejat a la primera pàgina de **8.6**) i les tres operacions que les relacionen quan volem calcular una altura *enèsima*, que en principi identificarem com la que es correspongui amb el resultat de llançar un dau. Aquestes quantitats i operacions es troben recollides a la taula de **8.2**, on està dibuixat el diagrama de flux que consistirà en el segon objectiu de l'activitat. Finalment, els plantejarem la resolució de problemes semblants al de l'escala (és a dir: matemàticament consistents en el càlcul d'alguns termes d'una progressió aritmètica, com ara els de les taules i les cadires, veure la fitxa **8.3**), i els demanarem que els resolguin emprant el diagrama de flux. Finalment **—**i si no tenen temps, seran deures per a casa**—**, els demanarem que cadascun d'ells inventi l'enunciat d'un problema que es pugui resoldre amb el diagrama, i el resolgui.

Una idea per a desenvolupar aquest programa seria la següent: quan ja han entès el plantejament del problema de l'escala a partir de l'explicació del professor a la pissarra, si hi ha el suport informàtic adequat es pot prendre com a punt de partida per motivar els càlculs un joc que he programat amb el llenguatge Scratch i he penjant en línia a la següent URL:

http://scratch.mit.edu/projects/10720946/

(alternativament, s'hi pot arribar des del meu web, que he creat precisament amb motiu del present Treball, http://manifoldo.weebly.com, fent clic al botó on diu "ENTÉN AMB GERÓNIMO LES PROGRESSIONS").

Es tracta de ser capaç de calcular l'altura que indica el dau abans que el porc digui quant val. L'únic interès d'aquest joc, de moment, és identificar l'etiquetació de les altures amb el resultat del dau, i interioritzar el plantejament del problema, és a dir: aprendre a calcular les primeres altures ni que sigui sumant un a un cadascun dels salts. La gestió de tota aquesta part és en gran grup, i les preguntes se'ls adrecen de manera oberta, de manera que cadascun dels alumnes pugui intervenir a voluntat. S'ha de tenir cura de referir-nos a les altures com a "primera altura", "segona altura", etc., i no amb els esglaons, que podria ser dubtós. Si no hi ha el suport informàtic, es pot dibuixar l'escala sencera —és a dir, fins l'esglaó 5è, o 6a altura— i tirar un dau de veritat.

Una vegada fet això, se'ls proposa als alumnes omplir una taula com la següent de manera individual

n	a_n
1	$a_1 = 3$
2	$a_2 = 3{,}25$
3	
4	
20	$a_{20} =$
50	
100	
350	

indicant, quan s'expliqui, que numerem les altures amb la lletra a, d'altura, amb un numeret per sota que indica quina és: a-sub-u és l' "altura primera", a-sub-dos és l' "altura segona", etc. —podem dir: "igual que amb les caselles del qüestionari, que c-sub-1 era la "casella primera", etc.—. Si ens pregunten què vol dir l'ena, els diem que és el resultat del dau, i ens indica quina és l'altura que hem de calcular: la primera, la segona...

Els demanem que omplin la taula de manera individual, i que després es posin d'acord entre ells sobre els resultats, i triïn un portaveu per dictar —el professor escriu— quins són els resultats, i per explicar com s'han calculat. Es tracta que entre tots els grups es posin d'acord en quins són els resultats, i quina és la manera òptima de fer el càlcul: el professor gestiona la comunicació. Tot plegat, no hauríem d'estar més de cinc minuts amb això.

Una vegada arribat aquest punt, els plantegem un altre repte: anem a jugar un altre cop al joc del dau, però canviant les altures del primer pis i la mida dels esglaons. Procedim a demanar als mateixos alumnes, triats a dit, que ens diguin els nous valors del paràmetres, però abans que surti el porc premem la tecla de parada i els preguntem a ells que facin el càlcul. Es pot fer una mica de "competició": a veure si, deixant anar el programa, hi ha alumnes que siguin capaços de fer el càlcul ràpidament.

Aleshores, se'ls torna a proposar que omplin la taula d'abans amb uns paràmetres diferents de l'escala. (Aquesta tasca es pot saltar). Seguim el mateix esquema d'abans: primerament la responen ells —el professor gestiona el temps i diu quan passen a discutir les solucions amb els companys de grup—, i després arriben a un consens i exposen i defensen la solució en grup. De bell nou, tot això no hauria d'allargar-se massa, entenent que són exercicis fàcils, i, a més a més, es poden ajudar entre ells.

Aleshores, se'ls reparteix la fitxa **8.2** amb el diagrama de flux, i, mentre es copia a la pissarra, es diu que les caixes arrodonides i romboïdals representen quantitats, i les rectangulars operacions, i ells han de reconèixer quin element va en cada forat, de manera que el diagrama sigui una mena de "llibre d'instruccions" per resoldre el problema de l'escala per a qualsevol resultat del dau. Els donem un temps, i ara passem taula per taula per comprovar què tal van i donar-los un ajut, si el necessiten. Cada alumne ha de fer el seu diagrama, però ara es poden ajudar entre ells des del principi.

Al final tornem a fer el mateix que durant els anteriors exercicis: els demanem que triïn un portaveu que expliqui com ho ha fet, i ha de ser tota la classe, mitjançant l'argumentació i diàleg —sempre moderada pel professor, és clar—, qui arribi a la millor proposta per al diagrama de flux.

Una vegada assolit l'objectiu de la construcció i comprensió del diagrama de flux, els repartim la fitxa **8.3** i els proposem que resolguin els problemes que hi ha. La gestió de la resta de la classe depèn del temps que hagi costat arribar a aquest punt, però una idea seria que el primer problema es tornés a resoldre amb una estratègia de grups petits i correcció amb el gran grup, i els altres fossin ja individuals. Seria desitjable poder acabar la classe en un punt de prou maduresa de l'aprenentatge tal que fos convenient manar com a deure l'últim punt, consistent en que siguin ells els que proposen un problema que es pugui resoldre amb el mètode del diagrama. Això però, també hi ha l'opció de manar per a casa dues tasques: un altre problema, per fer primer, i l'esmentat últim de la fitxa; però l'experiència demostra que el nombre d'alumnes que fan els deures es inversament proporcional al nombre de deures, trobo.

Aquest mòdul, però, no acaba aquí, sinó que suposa dues sessions, en comptes d'una: durant la segona sessió de la nova proposta faríem una còpia de la primera sessió de l'antiga programació, és a dir: faríem, tal qual, l'explicació de pissarra amb estil "interactiu" que es detalla al guió **8.8**, però el temps que en el Pràcticum II els meus alumnes van estar fent el qüestionari inicial (els quinze minuts inicials de la sessió, potser ara deu, ja que no hi ha la presentació del tema), ara corregiríem alguns dels deures: demanaríem a algú que sortís a la pissarra a fer el problema que ha plantejat, i recolliríem la resta, per fer una correcció personalitzada i ficar nota de l'activitat de la primera sessió. També faríem un repàs i preguntaríem dubtes. Pel que fa als de l'adaptació curricular, en principi també tindrien una millor base per a seguir l'explicació del segon dia, gràcies a haver fet l'activitat del Mòdul III, per comparació a la situació en què es trobaven en la primera versió de la Programació.

5.2 Mòdul II: Treball multi-nivell

Aquest mòdul ve a substituir a l'antiga segona sessió de la Programació del Pràcticum II, que tenia l'estructura següent: 5' de correcció de deures; 5' d'explicació de l'anècdota de Gauss sumant els naturals, i 30' de la tasca antiga dels cigrons (**8.7**) i la tasca escrita de l'escala (**8.6**) fetes alhora: cada alumne tenia dret a triar la primera —ampliació— o la segona —reforç—. Finalment, els últims 10' hi havia la demostració de la fórmula de la suma dels *n* primers termes d'una progressió geomètrica a partir d'un recurs material (les escaletes de cartró).

La nova proposta consisteix en substituir la tasca antiga dels cigrons, **8.7**, per la nova, **8.4**, la qual ja porta incorporats uns deures de tipus "planteja un problema" per a l'endemà, amb l'al·licient addicional que, si són suficients i de prou qualitat, en penjaria al meu web els quatre millors, amb les solucions, i un d'ells entraria a l'examen. A banda de les millores introduïdes en la tasca dels cigrons, que ja s'han argumentat a la secció **4**, hi ha algunes altres diferències substancials en el plantejament.

En primer lloc, la tasca dels cigrons, tal qual està pautada, i tenint els alumnes, en principi, dues —i no una— classes ja fetes de la unitat, deixa de poder considerar-se d' "ampliació", passant a ser de tipus estàndard. Encara que no ho he arribat a assenyalar a les seccions **3** i **4**, em resultava prou obvi que tenir una activitat bi-nivell amb una part d'ampliació i una altra de reforç no era un plantejament massa sensat: on hi ha lloc per al nivell estàndard? Bé, una altra cosa és que l'error de fer enfrontar-se als alumnes amb la tasca de l'escala sense un treball previ —i, a ser possible, pre-simbòlic, seguint la perspectiva teòrica present en tot aquest Treball— no s'ha de tornar a repetir: en primer lloc, sent la tercera classe, és probabilísticament més difícil que un alumne hagi faltat a les dues anteriors. I havent vingut ni que sigui a una ja disposa, trobo, d'una base relativament suficient per fer la tasca de reforç i poder acomplir-la, sense necessitar una ajuda excessiva del professor —al contrari del que passà al Pràcticum II—.

Això però, ¿què fem si ve un alumne que no hagi vingut, efectivament, a cap de les dues anteriors classes, i no s'atreveix a fer la tasca dels cigrons? (Notem, de tota manera, que el seu "pre-simbolisme" no la fa absolutament inassequible per a aquests alumnes, però tot depèn, és clar de les seves característiques personals) Aleshores, tornem a utilitzar les activitats de reforç o de baix nivell preparades per a l'ocasió. A ser possible, el més desitjable seria donar-li, ja muntada, una calculadora de progressions **8.1** —se li'n pot demanar a algun altre alumne, o el professor pot portar-ne un parell o tres, i seure als alumnes per parelles si hi hagués la necessitat—, permetre-li accés al programa de "Gerónimo" http://scratch.mit.edu/projects/10720946/, i donar-li la fitxa **8.2** del diagrama de flux per demanar-li que utilitzi tot aquest material per aprendre a predir el resultat del joc de Gerónimo fent servir el diagrama. No he preparat una fitxa pautada que guiï aquest pla, ni tampoc una altra que guiés la del seu correlat sense TAC —es a dir: només amb la calculadora de progressions i el diagrama, si no hi ha la possibilitat de l'1x1 amb els ordinadors—, però trobo que no seria massa difícil fer-ne una, seguint el mateix esperit de la resta del material que estem oferint aquí ara.

Així, crec que amb totes les mesures proposades aconseguim un treball multinivell equilibrat i flexible, tal qual era la proposta que pot adaptar-se a la realitat de diversitat de la classe sense perjudicar a unes parts en benefici d'unes altres.

La sessió acaba, com en el Pràcticum, amb la demostració basada en usar el recurs material de les escaletes de cartró, però no oblidem que als que no han fet la tasca nova dels cigrons els haurem de ficar deures per a casa. Els del cigrons, al seu torn, s'emportaran la tasca, per tal de tenir tot el material necessari per a estar en condicions de preparar l'apartat 9è, que és el que consisteix en proposar un problema d'examen. Així doncs, a l'endemà la classe hauria de començar, com és el meu ús, corregint alguns deures; ara, ¿han de ser els dels cigrons, o els altres? La solució, trobo, és la següent: la tasca a proposar per a casa als que no han fet els cigrons —al menys, als que no l'han feta per necessitar un repàs o per haver faltat, i ni per ser casos especials—, hauria de ser escriure els primer dotze termes d'una certa successió, donada pel seu terme general, i després fer-ne la suma; successió que no seria altra que la progressió aritmètica del problema 8è, "de la Marina", en la tasca dels cigrons. Així doncs, podríem traure a la pissarra a alguns d'aquests alumnes per a corregir alhora les dues tasques, i aprofitar per a tractar de motivar als primers, veient que la tasca mecànica que se'ls havia encarregat tenia una aplicació, i ni més ni menys que l'aplicació era resoldre els deures dels suposats alumnes de "nivell alt". Crec que aquesta situació pot resultar prou engrescadora per als primers, si més no.

Després, els dels cigrons lliurarien la seva tasca al professor, i aquest els la tornaria un altre dia, un cop ja corregida.

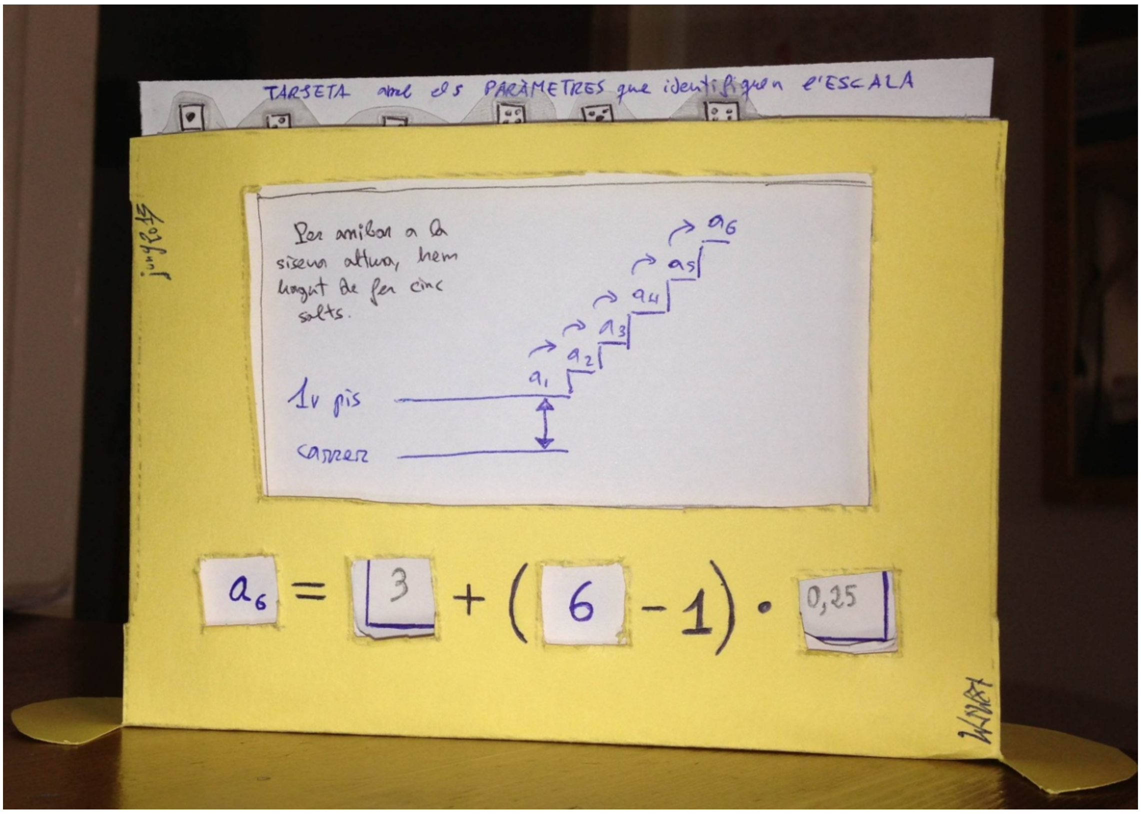
5.3 Mòdul III: El retallable (adaptació curricular)

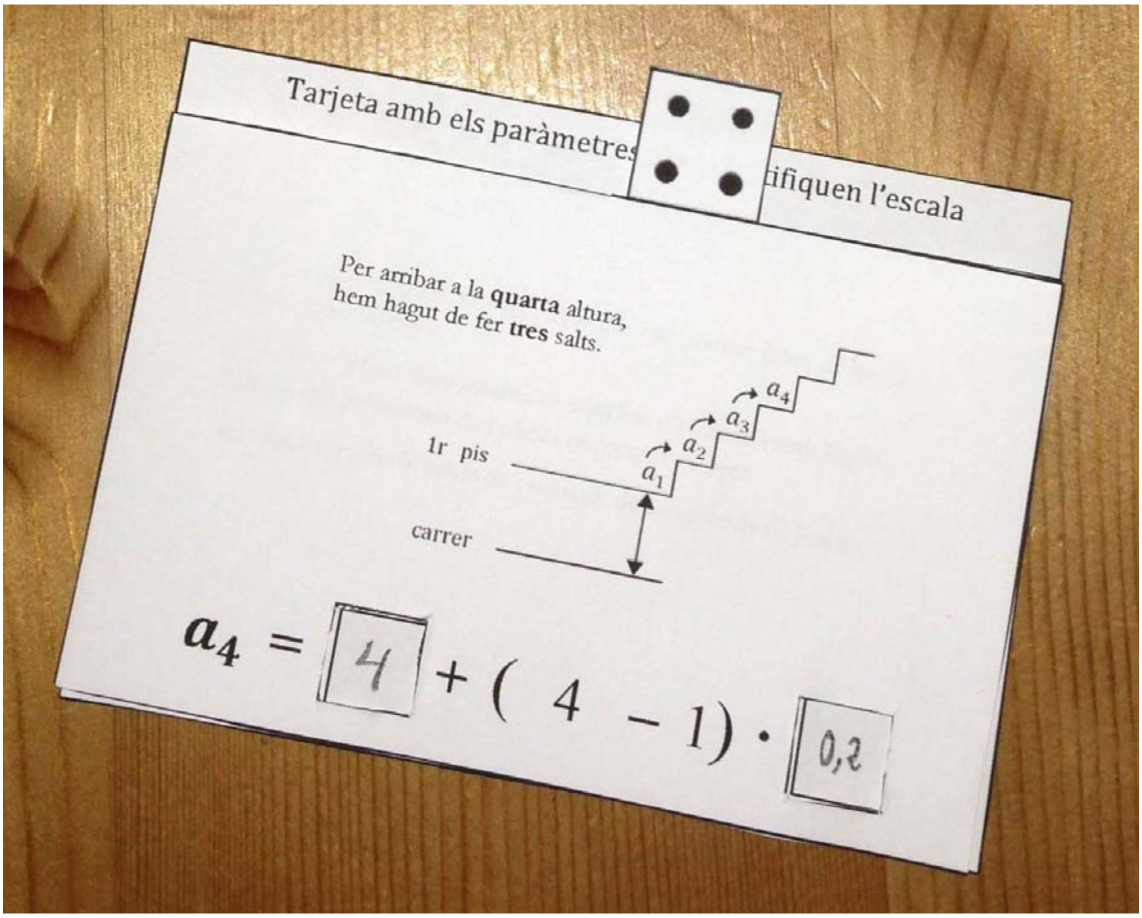
Aquest mòdul no és, al contrari que els altres, una proposta per a ser desenvolupada en un moment concret de la seqüència didàctica de la programació, sinó que està constituït, més aviat, per un conjunt d'idees amb les quals tractar d'atendre *per sota* la diversitat —amb adaptació curricular o sense ella, malgrat el títol que li he ficat a la secció—. Els materials didàctics han estat esmentats repetidament al llarg de les anteriors pàgines, i consisteixen en el joc informàtic de Gerónimo, que es troba a l'URL http://scratch.mit.edu/projects/10720946/ o també fent clic sobre el botó "ENTÉN AMB GERÓNIMO LES PROGRESSIONS", de la plana d'Inici del meu web, http://manifoldo.weebly.com; també, les dues variants —amb suport o sense ell— de la calculadora de Progressions, i finalment —i com a objectiu més alt desitjable—, el diagrama de flux **8.2**.

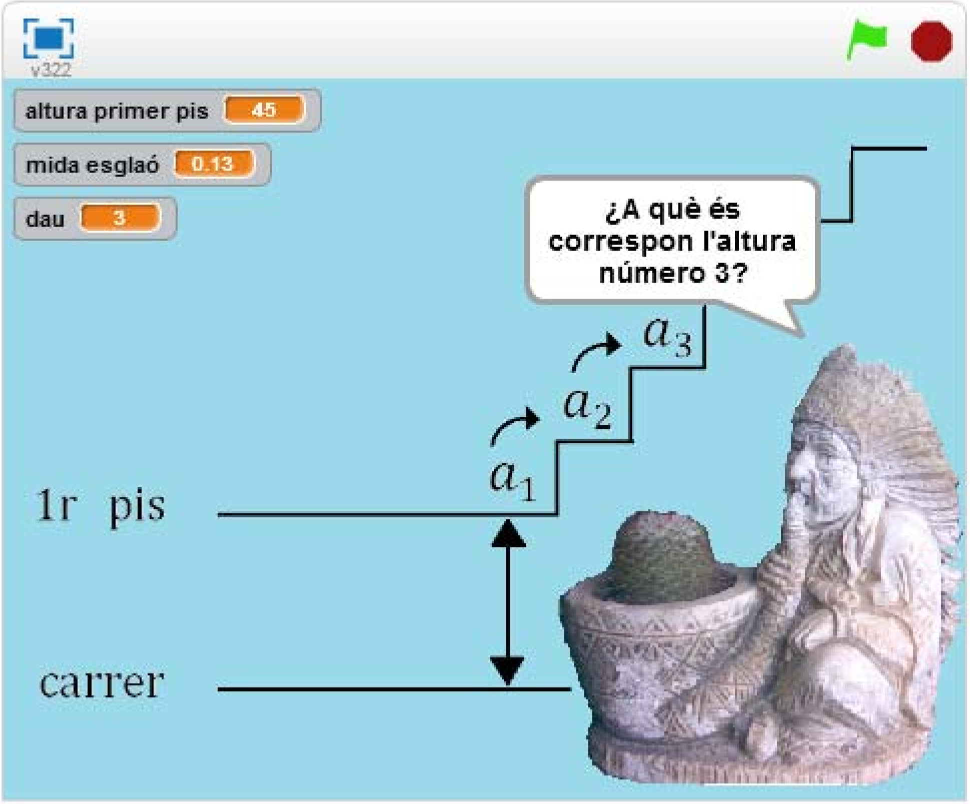
Aclarim alguns punts: això de "objectiu més alt desitjable" ho diem perquè si el noi es limita a jugar amb la calculadora sense entendre el seu funcionament, no haurà aprés, només haurà passat l'estona. Potser amb el programa de Gerónimo ho tingui més fàcil, si és capaç d'enganxar-se a la dinàmica de fer els càlculs de cap. En qualsevol cas, crec que, sense demanar que sigui capaç d'aprendre a usar el diagrama de flux amb uns altres problemes aliens al de l'escala —seria, potser, demanar massa—, no seria cap desgavell tractar que aprengués a utilitzar-lo per a resoldre el problema de l'escala. Les versions són moltes: se li pot demanar què passa si tenim un dau de deu cares i volem saber l'altura de l'escala; si ho fa de cap, se li diu que en tenim dos de deu, i per tant fem llançaments de zero a noranta-nou... les possibilitats són moltes, i la meva experiència amb aquest tipus d'alumnes és massa reduïda com per a creure'm capaç d'escriure una pauta semblant, per exemple, a la de la tasca escrita de l'escala **8.6**, o a la nova dels cigrons. Si tingués un alumne així, crec que em basaria en les meves observacions directes sobre la seva manera de funcionar per a preparar expressament per a ell —o per a ells, en el cas de ser més d'un— la pauta corresponent.

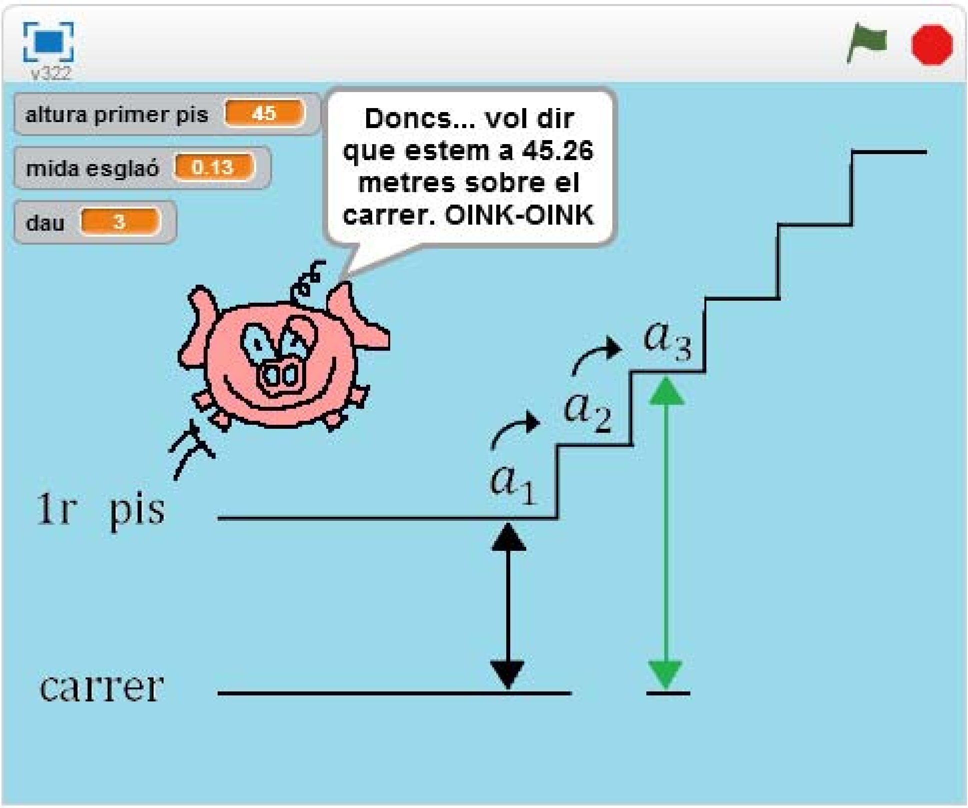
De manera que en aquest Mòdul només em limito a oferir suggeriments i possibles combinacions amb els materials didàctics que he preparat.

Finalment, cal assenyalar que ambdós recursos, tant el TAC de Gerónimo com el material-manipulable de l'escala amb les seves dues versions, es presten prou bé per a ser deures per a casa; així com per a ser incloses, concretament, com a versió de baix nivell de les tasques personalitzades que en la programació original de la unitat proposo als alumnes al final de la tercera sessió, per a ser lliurades durant la cinquena.


TARJETA amb els PARÀMETRES que identifiquen l'ESCALA
Per arribar a la sisena altura, hem hagut de fer cinc salts.
a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6
1r pis
carrer
$a_6 = 3 + (6 - 1) \cdot 0{,}25$


Tarjeta amb els paràmetres
ifiquen l'escala
Per arribar a la **quarta** altura, hem hagut de fer **tres** salts.
a_1 a_2 a_3 a_4
1r pis
carrer
$a_4 = 4 + (4 - 1) \cdot 0{,}2$


v322
altura primer pis 45
mida esglaó 0.13
dau 3
¿A què és correspon l'altura número 3?
a_3
a_2
a_1
1r pis
carrer


v322
altura primer pis 45
mida esglaó 0.13
dau 3
Doncs... vol dir que estem a 45.26 metres sobre el carrer. OINK-OINK
a_3
a_2
a_1
1r pis
carrer

6. Conclusions i valoració del propi aprenentatge

Començaré autoavaluant l'evolució dels meus nivells competencials com a professor durant el present curs. Escriuré **P** per a "al **p**rincipi", i **F** per a "al **f**inal".

Competència		N1	N2	N3
►Competències genèriques o transversals del professor				
C1	Saber ser professional. Ciutadania		P	F
C2	Comunicació		P	F
C3	Llengua estrangera		P, F	
C4	Aprendre a aprendre /organitzar formació contínua		P	F
C5	Competència digital		P	F
►Competències professionals específiques del professor de matemàtiques				
C6	Coneixement del contingut matemàtic a ensenyar			P, F
C7	Elements socioculturals en educació matemàtica	P, F		
C8	Coneixement epistemològic del contingut	P, F		
C9	Contextualització i valor interdisciplinari			P, F
C10	Desenvolupament de l'alumnat (P = 0)			F
C11	Anàlisi de contractes i normes matemàtiques	P		F
C12	Anàlisi i selecció de continguts i recursos (P = 0)			F
C13	Dissenys d'avaluació (P = 0)			F
C14	Anàlisi de seqüències (P = 0)			F
C15	Innovació i inici a la recerca (P = 0)	F		

Feta la qual cosa, tancaré aquest últim treball del Màster intentant avaluar des d'un punt de vista més personal, i menys pautat o formal, allò que ha suposat per a mi haver-lo cursat al llarg de tot aquest any.

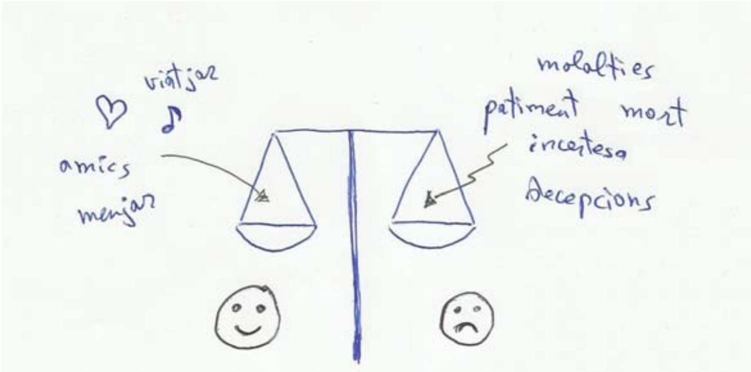
Començaré per parlar del mòdul generalista i les assignatures de Fonaments, cursades durant la tardor i part de l'hivern. Amb l'assignatura de Context vaig començar a comprendre, per primera vegada, que el canvi del BUP i COU a l'ESO i l'actual Batxillerat, fet a partir de la LOGSE, no havia sigut un pas endarrere, com havia cregut fins aleshores. Vaig començar a entendre que l'atenció a la diversitat era una necessitat social real i candent, i si la única manera d'assolir una societat veritablement democràtica —paraula quasi desvirtuada, de tan sovint involucrada en sofismes— era a través d'una educació generalitzada i de qualitat, la reforma educativa dels anys noranta havia sigut un pas en aquesta direcció.

Les assignatures d'Aprenentatge i Sociologia, en un principi, me les prenia com a "maries" que podrien interessar-me, però que difícilment anaven a aportar-me quelcom realment útil per al futur. No confio massa en els psicòlegs, en general —vull dir: no confio, o no confiava, en la utilitat del seu paper en la societat—, per un costat, i em va costar, per un altre, fer-me una idea d'allò que em podria aportar l'assignatura de Sociologia. Tot era una mica com un món divertit i diferent, un xic semblant a certa època en què vaig estar matriculat d'una assignatura de "lliure opció", *Egipte antic*, a la Facultat de Geografia i Història de la Universitat de València.

En poc temps, però, va començar a canviar la perspectiva que tenia sobre aquestes assignatures, i vaig començar a interessar-me progressivament més en les classes, i a valorar els seus continguts. Una virtut que em va guanyar de seguida del professor d'Aprenentatge era el caràcter —diguem-ne— metalingüístic de les seves classes, perquè ràpidament me n'adoní que la millor manera d'entendre moltes de les coses que aquest professor ens volia dir era mirar com les posava en pràctica ell mateix. S'ha de reconèixer que té la seva gràcia. Pel que fa al de Sociologia, em va encantar la llibertat que ens donava per treballar sobre materials realment interessants. Si he de dir, de fet, el primer "moment de glòria" del Màster, no dubtaria en confessar que va ser llegint el llibre "Rosa y Azul", de Marina Subirats i Cristina Brullet, i preparant amb les meves companyes Irene i Ruth el treball d'Educació i gènere. Fins el Pràcticum I, allò va ser el que més va agradar-me, i, pel que respecta a la meva formació com a professor, he de dir que se'm va quedar gravada una frase, fruit d'aquell treball, que podria prendre com a divisa, i ja denota el canvi d'enfocament que en mi anava produint-se, segons he esmentat al principi en parlar de l'assignatura de Context. La frase deia que ens cal educar «des de la diversitat i per a la igualtat». Un bon resum, oi?

En general, les assignatures de la Facultat de Matemàtiques van acabar sent, al contrari del que jo havia pensat, les "entretingudes", amb les quals vaig refrescar alguns conceptes, com ara certes nocions d'estadística, que tenia rovellats, o vaig fer algun treball interessant, com ara el de grafs o el d'anàlisi, i també trenquí el gel amb dos programes útils d'ordinador (parlo de l'*R* i el *GeoGebra*); però les que van acabar provocant vertadera passió en mi van ser les "de lletres" —com deia jo—. (He dir que el primer text que em va captivar realment de l'assignatura d'Aprenentatge va ser el de Mariana Miras, que és, justament, el primer referenciat entre les fonts del present TFM).

Perquè, no ens enganyem, jo entrava en aquest Màster perquè volia ser professor de secundària, i per a opositar era necessari tenir-lo: el meu interès en les classes començava i acabava aquí. Motivació purament *extrínseca*, vaja. I el meu ànim al respecte, tanmateix, va anar canviant de la manera que he assenyalat —una altra cosa que vull creure que no ha sigut casualitat, sinó *atribut de gremi*, es coincidir amb companys de tan gran qualitat humana com els que he tingut, i que recordaré sempre—. I el procés va tenir la seva culminació durant el Pràcticum I, doncs jo feia alguns anys que ja no feia classes particulars —fa poc que he tornat a "reenganxar-me"—, molts més que no era monitor de xiquets —que és com es diu a la meva terra—, i no diguem ja que no entrava a les aules de l'equivalent a un primer de BUP. I allò va ser com recordar molt vívidament tot el que no havia mai oblidat, però havia passat a ser un àlbum de records en blanc i negre. I no només de records. De vegades penso que no mai hauria d'haver seguit la carrera de físic ni intentat ser escriptor, sinó haver anat directament i des del principi a allò que millor se m'ha donat sempre i més m'ha agradat, que és l'educació. Explicar per què no ha sigut aquesta la meva opció vital fins ara —per què no vaig matricular-me a magisteri en acabar l'institut, per posar-li nom concret a les coses, que és el que ens entestem en fer per creure que les comprenem— no només estaria fora de lloc, sinó que seria tan banal i tan humà com una explicació sobre per què un jove de divuit anys comença a fumar. No hi ha res que explicar (i més després d'haver llegit a Dostoievski): només hi ha fets i actuacions, i el model de la balança que els vaig explicar durant el Pràcticum II a alguns alumnes de 4t d'ESO també aplica aquí.



Totes aquestes reflexions personals, doncs no arriben a confessions, no són més que un esbós de tot allò que se'm va activar quan vaig estar davant dels xiquets. No m'han fet por mai, i dubte molt que me'n facin en el futur. Ni tampoc no em fa por equivocar-me amb ells, ni les responsabilitats que hom adquireix quan pren al seu càrrec un grup de menors. He tingut moltes vegades aquesta conversa. Jo tinc, per exemple, les meves idees polítiques o socials o com se li vulgui dir, i les tinc molt clares en alguns aspectes. Però no m'arriscaria a ficar-me en el perillosíssim camí de la política, ni tampoc en el dels revolucionaris dels rifles, els atemptats i les guerrilles. No em compensa, si penso en la meva balança personal. En les converses esmentades, ho solc comparar a la tasca dels metges o els advocats o els militars: està bé que la facin els altres, i fins i tot jo me'n beneficio... però jo no seria feliç fent-ho. Amb els xiquets, en canvi, no ho dubto ni un moment. I així torna a funcionar el model de la balança, de fet (que, trobo, no és més que la meva apropiació d'una barreja d'idees de Plató, Aristòtil, Sartre, Camus... apropiació i simplificació fins la frontera de la broma, com sempre fem els físics —però així expliquem el món, no s'ha d'oblidar!—).

He dit adés "allò que se'm va activar", i ho he dit bé. No va ser, el Pràcticum I, una "il·luminació": va ser una activació... activació, evidentment, de quelcom que ja hi havia a dins meu, només que estava esmorteït o oblidat; desvirtuat, en qualsevol cas.

I a partir del Pràcticum I, poc més he de dir. Tot ha estat clar, i continua estant clar al meu cap. Les assignatures de primavera també em van agradar molt, i el segon Pràcticum va ser millor encara que el primer. Lamento de debò la paciència que ha hagut de tenir el meu tutor, Albert Mallart, amb el meu etern endarreriment en lliurar els treballs —ha sigut una constant en mi—. Sé que no faig les coses amb la perfecció d'uns altres, però hi ha quelcom molt important per a mi, i és que és la primera vegada en molts anys que crec en allò que faig, que em dóna plaer i esperances, i em sento útil

(útil als altres i útil a mi). Fins i tot els altres valoren la meva activitat, cosa totalment nova per a mi. Per això em costa tant entregar un treball mal fet, o fet a mitges, i sempre tracto de donar el màxim —però el temps és finit, això és evident—.

I per tancar ja aquest últim escrit de l'últim treball del curs, suposo que he de dir alguna paraula sobre el Treball Final de Màster en sí. Estic content d'haver-lo fet, però sóc conscient que les meves propostes són, potser, una mica massa ambicioses per al temps de què disposava i la meva reduida experiència, gairebé inexistent, amb aquest tipus d'enfocaments. Crec, però, que les idees són bones, i que amb una mica —no massa— més de treball, podrien ser una estratègia amb una gran probabilitat d'èxit. El fet és que les he dissenyades amb esforç i il·lusió. És veritat que he aprés més en unes part que en unes altres del procés. No sé si, per exemple, tot el que he pensat i repensat sobre els articles de Sowder i Kieran és un grandíssim desficaci —això no és com quan em trencava el cap tractant d'entendre les col·lectivitats de Gibbs, de Física Estadística, que podien ser molt abstractes, però al capdavall una equació sempre és una equació—. Però el que no dubto, i això lliga amb tot el que he dit als darrers paràgrafs, i també amb la taula de competències que he omplert al principi, és que vull ser professor de secundària, que ara estic molt més preparat que fa un any per ser-ne, i que no em preocupen gens les possibles dificultats que puguin presentar-se'm abans i durant. Aquesta és la meva conclusió, no tant del TFM, sinó de tot el curs.

Acabaré amb unes paraules que resumeixen el per què del meu sentiment, i que també són un missatge d'agraïment a dues persones molt importants per a mi. Les copio, directament, del meu diari del Pràcticum II (dilluns, 18 de març de 2013):

> « … Això em fa recordar, amb la perspectiva dels anys, la manera en què ens tractaven i s'adreçaven a nosaltres Leopoldo Navarro (8è EGB, Història) i Guillermo Gil (2n BUP, Física).
>
> Ara me n'adono que era, també, la fe en nosaltres destil·lada, com a persones i com a grup, allò que més positivament repercutia en mi. Saber que, en certa manera, ells estaven sempre del teu costat de la línia, encara que parlessin l'idioma estranger dels adults.
>
> Però lluitaven en el mateix bàndol que tu; això ho senties, ho tenies present, sense saber-ho, i t'impulsava davant de les dificultats.»

7. Bibliografia i referències consultades

1. Miras, M. (1993). Un punto de partida para el aprendizaje de nuevos contenidos: los conocimientos previos. En C. Coll, E. Martín, T. Mauri, M. Miras, J. Onrubia, I. Solé & A. Zabala (Eds), *El constructivismo en el aula*. Barcelona: Graó, pp. 47-63.
2. Burgués, C. i Sarramona, J. (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació secundària obligatòria.* Barcelona: Servei de Comunicació i Publicacions, Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria.
3. Ortiz, A. (2008). *Lógica y pensamiento aritmético*. Badajoz: Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XII Simposio de la SEIEM.
4. Kieran, C. (2004). *Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It?* Georgia, USA: The Mathematics Educator, Vol.8, No.1, pp. 139-151.
5. Sowder, J. (2007). *Preparing Teachers to Prepare Students for Algebra.* Preparat per al Ohio Symposium on Mathematics and Science.
6. Puig, P. (1955). *Decálogo de la didáctica matemática media.* Madrid: Gaceta Matemática, 1a Sèrie, Tom VII, Núms. 5 i 6.
7. Font, V. (2011). *Investigación en didáctica de las matemáticas en la educación secundaria obligatoria.* Ciudad Real: Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM.
8. Escaño, J. i Gil, M. (2010). Motivación y esfuerzo en la Educación Secundaria. En Coll (Coord.), *Desarrollo, aprendizaje y enseñanza en la Educación Secundaria.* Barcelona: Graó, pp. 131-148.
9. Serrano, J.M.; Carranza, J.A.; Pérez, J. (1985) *Contradicción y desequilibrio*. Murcia: Anales de psicología, Vol. 2, pp. 93-102.

8. Annexos

8.1 Retallable: Calculadora de Progressions

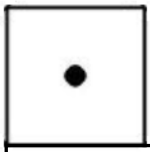
Per a construir la calculadora haurem de retallar set targetes: la d'aquesta pàgina ("targeta de paràmetres") i les sis de les tres pàgines següents (les que tenen els daus a sobre). La plantilla de la pàgina 52 només cal retallar-la si anem a fer també el suport de cartolina.

Targeta amb els paràmetres que identifiquen l'escala

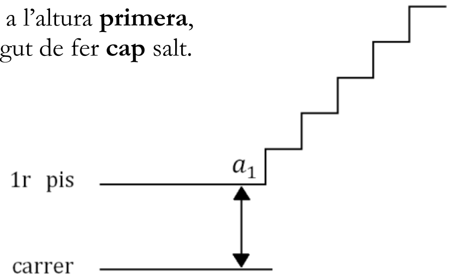
Aquesta targeta conté la informació que ens permet saber de quina escala estem parlant.

A la primer de les dues caselles de sota has d'escriure –amb llapis!– **l'altura del primer pis** de l'edifici respecte del carrer.

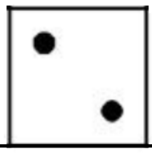
A la segona, escriu la **mida** de cadascun **dels esglaons** de l'escala.



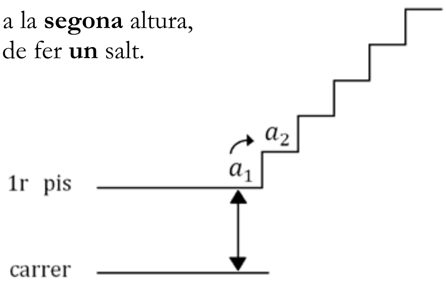
Per arribar a l’altura **primera**,
no hem hagut de fer **cap** salt.



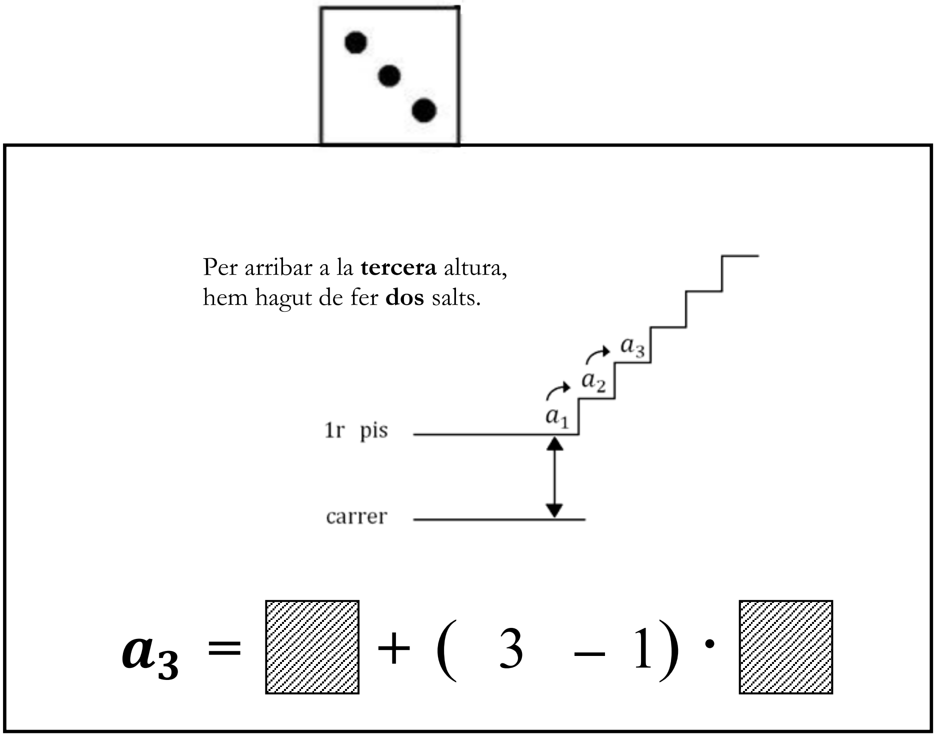
$$a_1 = \boxed{} + (\ 1\ - 1) \cdot \boxed{}$$

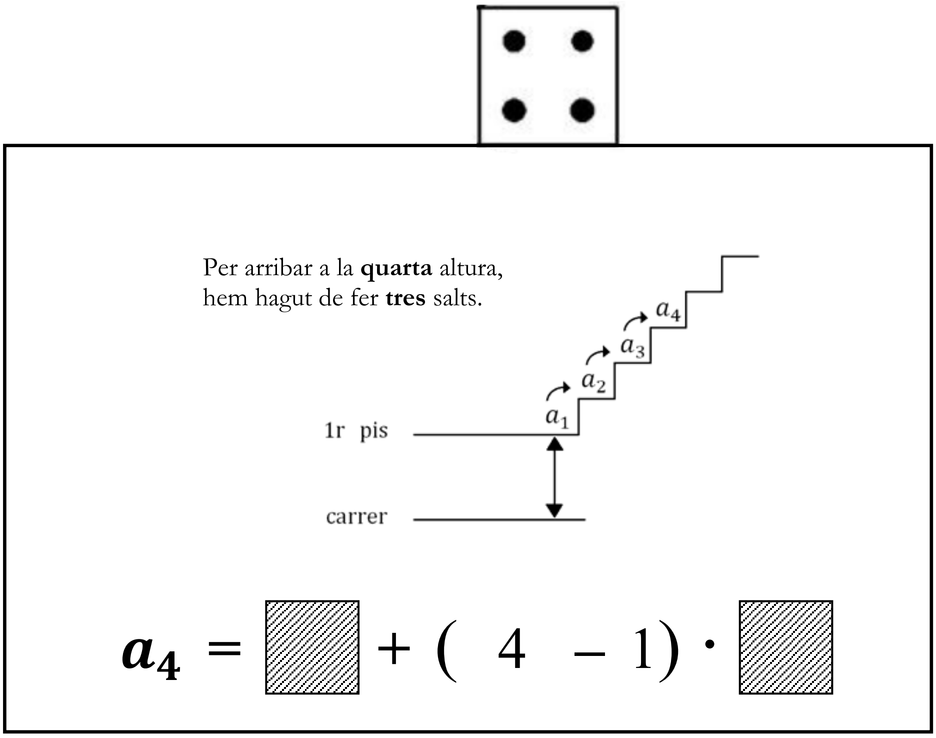


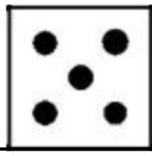
Per arribar a la **segona** altura,
hem hagut de fer **un** salt.



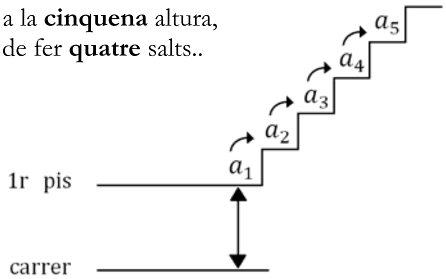
$$a_2 = \boxed{} + (\ 2\ - 1) \cdot \boxed{}$$


Per arribar a la **tercera** altura,
hem hagut de fer **dos** salts.
a_3
a_2
a_1
1r pis
carrer
$a_3 = \square + (\ 3\ - 1) \cdot \square$

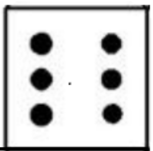

Per arribar a la **quarta** altura,
hem hagut de fer **tres** salts.
a_4
a_3
a_2
a_1
1r pis
carrer
$a_4 = \square + (\ 4\ - 1) \cdot \square$



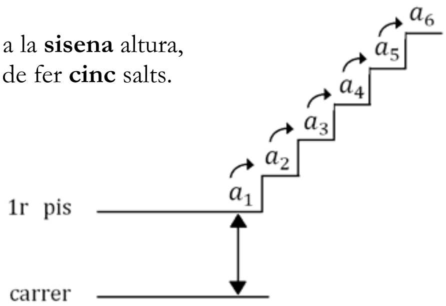
Per arribar a la **cinquena** altura,
hem hagut de fer **quatre** salts..



$$a_5 = \square + (\ 5 - 1) \cdot \square$$



Per arribar a la **sisena** altura,
hem hagut de fer **cinc** salts.



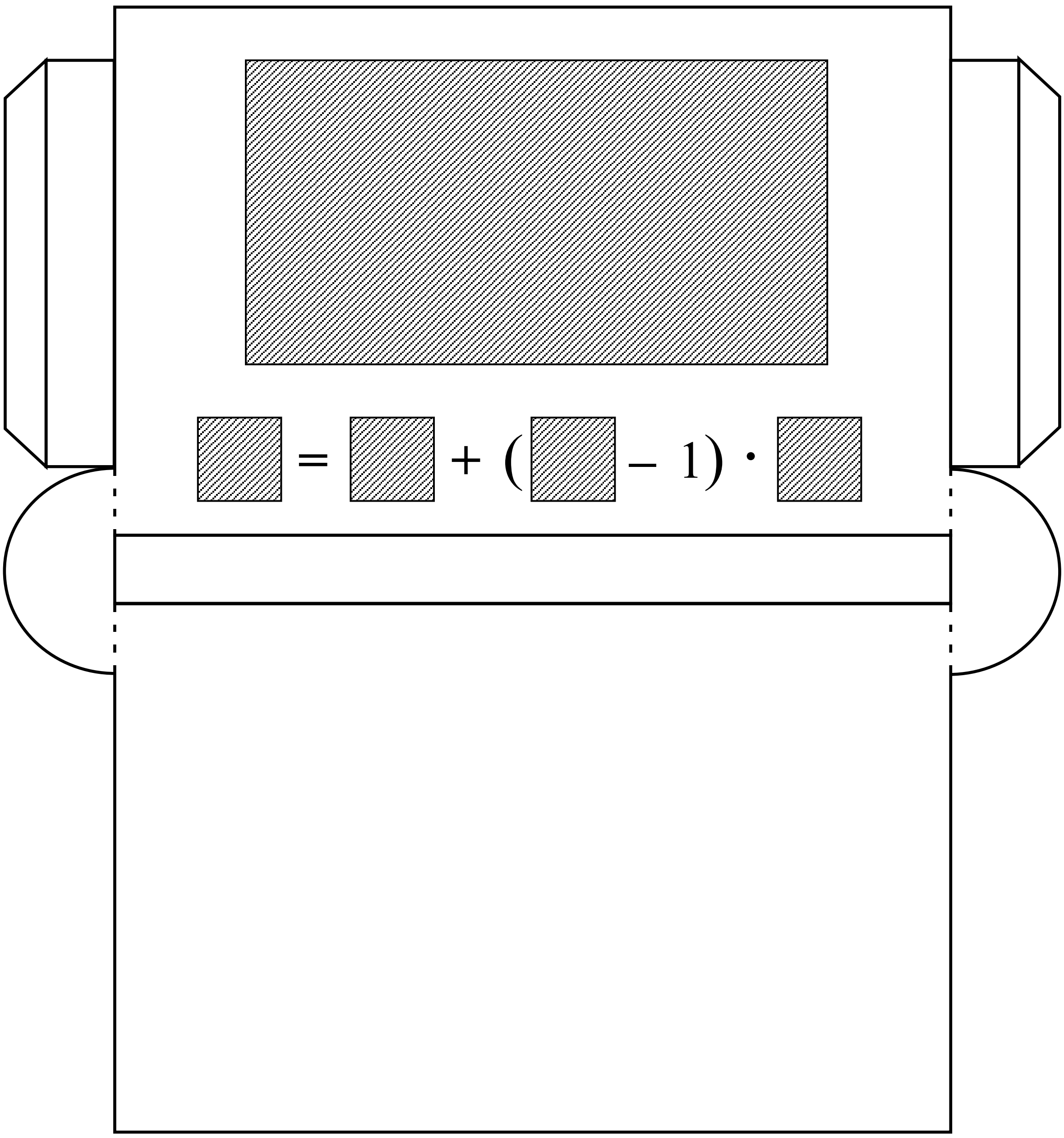
$$a_6 = \square + (\ 6 - 1) \cdot \square$$

Amb la següent plantilla construïm un suport de cartolina per a les targetes.

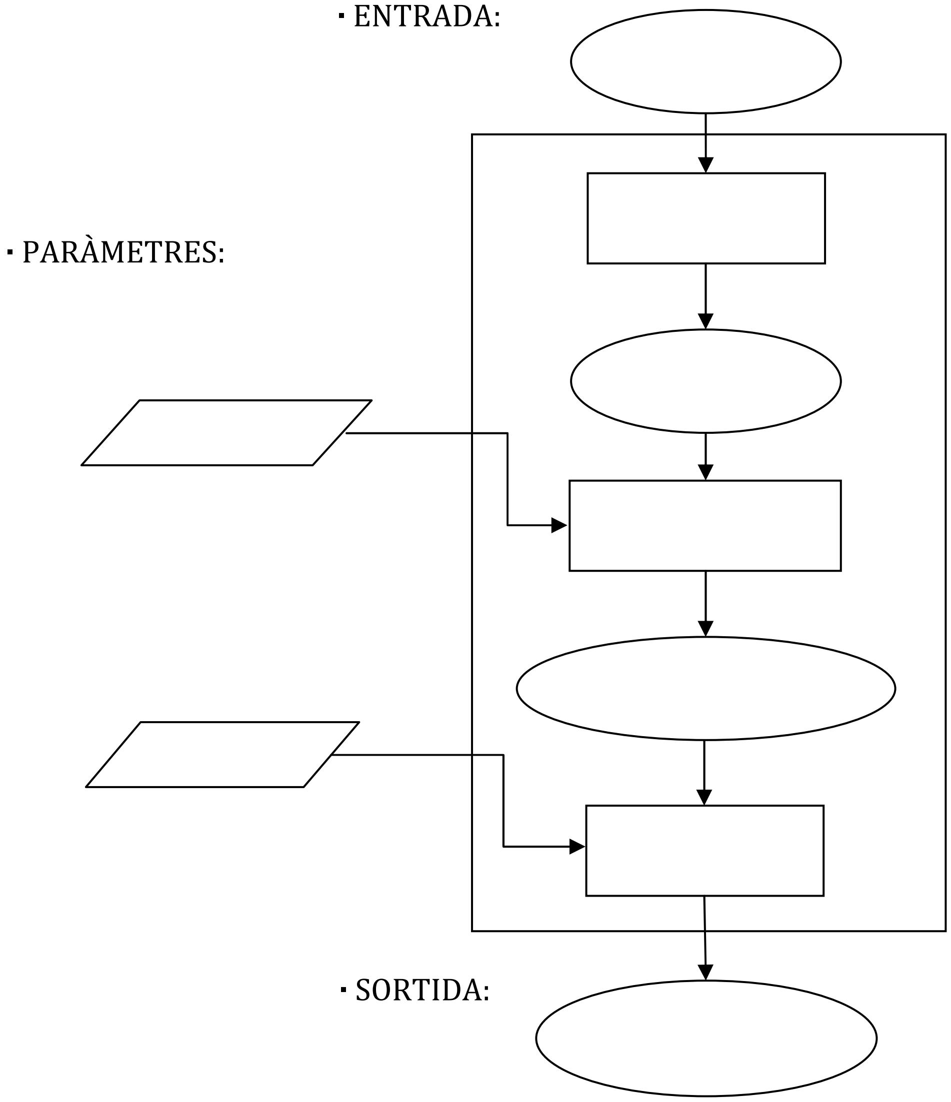
Per a passar la plantilla a la cartolina podem utilitzar la tècnica de pintar a llapis la part de darrere del paper i després calcar la figura, ficant-la sobre la cartolina i resseguir el dibuix.

Una vegada fet això, procedim a retallar tota la figura d'una sola peça, i després eliminarem les cinc "finestres" que al dibuix apareixen ratllades (la millor manera de fer-ho és amb un cúter, però també es pot fer amb tisores). També haurem de fer quatre talls, amb molta cura, seguint els petits segments discontinus dels costats.

Finalment, doblem la cartolina seguint les indicacions del/la professor/a, i fixem les solapes a la part de darrere amb una mica de cinta adhesiva.



8.2 Diagrama de flux



Quantitats	Operacions
- el resultat del dau - el número de salts que fem - la mida dels esglaons - l'altura del primer pis - la nostra altura final sobre el carrer - la distància total recorreguda verticalment	- sumar dues quantitats - multiplicar dues quantitats - restar-li un a una quantitat

8.3 Tasques amb el diagrama de flux

1.- Calcula la l'altura a la que es correspondria un resultat de cinquanta, si féssim un doble llançament amb dos daus, per a escales caracteritzades per...

	altura primer pis	*mida esglaons*	*altura final*
Escala 1	3,5	0,20	
Escala 2	4	0,18	
Escala 3	-6	0,25	
Escala 4	120	-0,25	

2.- Al diagrama, de les sis quantitats, dues són resultats intermedis, un és la solució, i els altres tres són les dades. Identifica cadascun. Tracta de definir què entenem per dada.

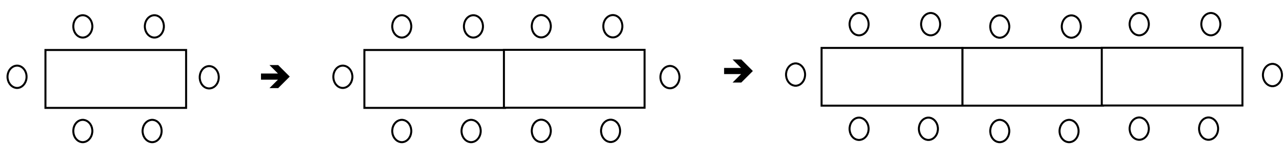
3.- De les tres dades, hi ha una que, encara que canviï el seu valor, estem parlant de la mateixa escala. Quin és? Quin nom reben els altres dos?

4.- A l'exercici 1r, hi ha dues escales que tenen paràmetres amb valors negatius. Té això sentit? Si dius que no, explica per què no té sentit. Si contestes que sí, tracta d'imaginar amb un exemple concret a quina situació poden referir-se aquests paràmetres.

5.- El primer any, un arbre fa 3 metres d'alçada. Cada any creix 0,25 metres. Quina és la seva alçada el sisè any? I el nº 50? I el nº 350? Eres capaç de fer els càlculs emprant el diagrama de flux del problema de l'escala? Explica quina relació hi ha entre els anys del problema de l'arbre i els daus del problema de l'escala.

6.- Imagina ara que parlem d'una barra que s'està encongint: el primer minut té una llargària d'un metre, el segon ha encongit 0,05 metres, el tercer uns altres 0,05, i així successivament. Quina és la llargària al minut 15è? Fes el càlcul amb el diagrama, i explica quina relació hi ha entre els minuts d'aquest problema i el dau del problema de l'escala.

7.- Conforme va venint més gent a un sopar, aneu afegint més taules i cadires:



Quantes cadires hi ha quan porteu 45 taules? Fes el càlcul amb el diagrama, i explica per què és possible aplicar-lo per a resoldre aquest problema.

8.- Escriu un problema que es pugui resoldre amb el diagrama de flux, i troba la solució.

8.4 Tasca dels cigrons (nova versió)

«Sumant els senars»

► MÈTODE DE GAUSS

1) A classe hem vist com el jove Gauss va sumar ràpidament els cent primers nombres naturals, $1+2+3+\cdots+100=5050.$

¿Creus que el seu mètode es pot aplicar a un altre cas, com ara a sumar els vint primers naturals, $1+2+3+\cdots+20$?

Si creus que sí, intenta justificar-ho.

2) Fes la suma dels primers vint naturals amb el mètode de Gauss. Quin resultat trobes?

Fes ara el càlcul sumant tots els nombres, un a un, amb la calculadora. Et dóna el mateix?

3) Ara tracta d'aplicar el mètode a la suma dels naturals compresos entre onze i vint, ambdós inclosos: $11+12+13+\cdots+20$. També arribes al resultat correcte?

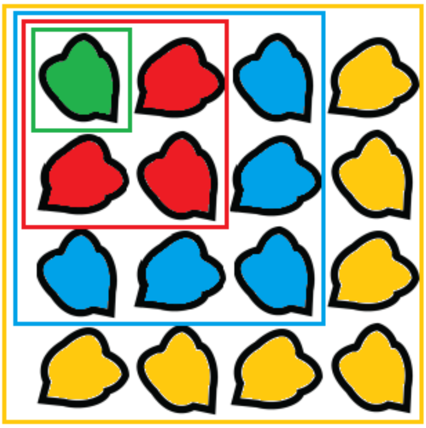
4) Anem una mica més enllà. Anem a estudiar el conjunt de tots els senars que són menors o iguals a mil. Quants senars satisfan aquesta condició?

(Pista: la meitat dels nombres iguals o menors que mil seran parells, i l'altra meitat seran senars).

5) Ara voldríem sumar tots aquests nombres senars, però fer-ho amb la calculadora ens portaria massa temps. Quin resultat trobes si fas el càlcul aplicant el mètode de Gauss?

► QUADRATS DE CIGRONS I SUMA DE SENARS

6) A la taula següent hem representat cada senar amb un color diferent:



Si volem saber, per exemple, quant val la suma dels **tres** primers senars, haurem de comptar els cigrons verds, vermells i blaus. Però no cal anar un per un: és molt més ràpid multiplicar files per columnes, igual que faríem per a comptar les butaques d'un cine.

Quin és el resultat?
I si sumem els **quatre** primers senars?
I els **cinc** primers?

Justifica la darrera resposta.

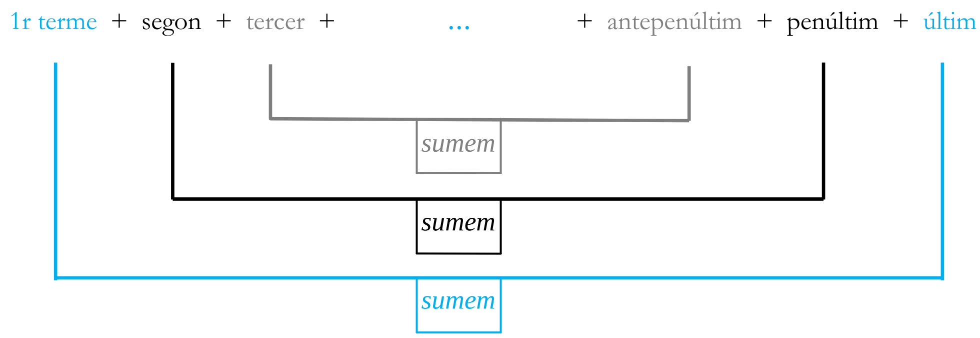
7) A la pàgina anterior has sumat els 500 primers senars fent servir el mètode de Gauss.

Com faries el càlcul amb el mètode dels cigrons?

Dóna el mateix?

► MÉS APLICACIONS DEL MÈTODE DE GAUSS

8) El mètode dels cigrons només val per als senars, però amb el de Gauss podem sumar qualsevol progressió aritmètica. L'esquema general sempre és el mateix:



$$\left.\begin{array}{l}\text{totes les parelles donen el mateix}\\ \text{n}^{\text{o}}\text{ de parelles} = \dfrac{\text{n}^{\text{o}}\text{ total de termes}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{total = (\text{nº de parelles}) \text{ x } (\text{suma d'extrems})}$$

...on "suma d'extrems" vol dir, evidentment, el resultat de sumar el primer terme amb l'últim.

Tracta d'aplicar-ho a la resolució del problema següent. No oblidis dibuixar un esquema com l'anterior i justificar tots els passos! (Pots fer-ho per la part de darrere d'aquest full).

Problema: La Marina toca la guitarra i cada mes li canvia les cordes. El primer mes li costa 6 €, el segon mes el preu ha augmentat 15 cèntims, el tercer ha tornat a augmentar 15 cèntims, i així successivament.

Quant porta la Marina gastat en total al final del mes que en fa dotze?

9) [*Deures per al pròxim dia*] Inventa tu un problema semblant al de l'exercici anterior, que es pugui resoldre amb el mètode de Gauss.

Has d'escriure l'enunciat, de manera clara i entenedora, i tot seguit explicar la resolució, justificant adientment cada pas. Fes-ho en un full apart o per darrere d'aquest, si tens espai. Tracta de ser original en el plantejament de l'enunciat.

IMPORTANT: Si entre tota la classe presenteu un nombre raonable de propostes diferents, en triaré els quatre millors i els penjaré al meu web amb la resolució, i un dels quatre serà una pregunta de l'examen de la unitat (amb el mateix enunciat, però canviant els números una mica).

8.5 Qüestionari de coneixements previs (del Pr. II)

NO PUNTUA

1. Contesta només una de les tres preguntes següents:

a) A quin país voldries anar de viatge?

b) Quin és el grup de música que més t'agrada?

c) Si t'interessa el futbol, digues un equip de 1a divisió.

2. Imagina que tots els alumnes de 3r d'ESO us inscriviu en la cursa "2a Milla Verda de Santa Coloma", que es farà el proper 21 d'abril. En la fitxa d'inscripció hi ha tres caselles com les següents, on heu d'escriure la vostra data de naixement (dia, mes i any):

a) Escriu a les caselles la teva data de naixement (només amb números).

b) Si mirem el que han escrit els teus companys a la casella c_2 (la segona), segur que, com a molt, només veurem dotze números diferents. Per què?

c) Quants poden haver-n'hi a la casella c_1 (la primera)?

d) Segur que la suma de tots els números $c_1 + c_2 + c_3$ a ningú no li dóna més petit de 1900. Per què?

3. Escriu un cinquè número a la llista següent

$$1, \; 4, \; 7, \; 10,$$

4. A la taula següent, omple totes les caselles buides de la fila inferior a base de donar a *n* els valors que s'indica a la fila superior:

$n =$	1	2	3	4
$(-1)^n =$				

5. L'expressió matemàtica n^2 genera una de les següents tres llistes. Quina és?

$1, \; 1/2, \; 1/3, \; 1/4 \ldots$

$1, \; 4, \; 9, \; 16 \ldots$

$5, \; 10, \; 15, \; 20 \ldots$

8.6 Tasca escrita de l'escala (del Pr. II)

«El problema de l'escala»

PLANTEJAMENT

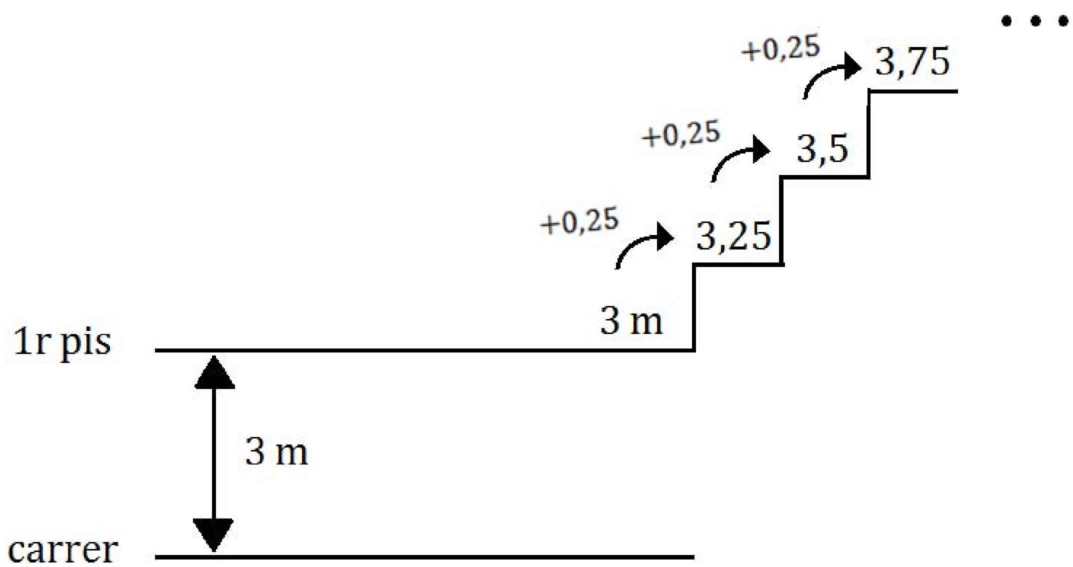
Entre el carrer i el primer pis d'un edifici hi ha una distància 3 metres.

Nosaltres som al primer pis, davant d'una escala que duu al segon, i comencem a pujar-la.

Com que la mida *d* dels esglaons de l'escala és de 25 cm, o sigui

$$d = 0{,}25\ m$$

aleshores estarem, successivament, a les següents altures respecte el carrer:



FES (MILLOR AMB LLAPIS!) LES TASQUES SOBRE EL PROBLEMA DE L'ESCALA QUE ES PROPOSEN A LES DUES PÀGINES SEGÜENTS.

TASQUES A REALITZAR

1. Dessignarem amb la lletra *a* els valors de les successives altures.
Per a distingir-les entre sí, hi afegirem una etiqueta numèrica sota la *a*:

— la 1a altura serà: $a_1 = 3$
— la 2a altura serà: $a_2 = 3{,}25$
— la 3a altura serà: $a_3 = 3{,}5$
— etc.

A la taula següent, escriu els valors de les altures indicades (la lletra *n* representa genèricament el valor de les "etiquetes"):

n	a_n
1	$a_1 = 3$
2	$a_2 = 3{,}25$
3	
4	
5	
6	
7	
8	

2. Si estem a una altura qualsevol (per exemple a_3), l'etiqueta de la lletra *a* **no** ens diu quants esglaons portem pujats, però *quasi*.

a) ¿Quants en portem a l'altura a_3?
b) I a la a_4?
c) I a la a_5?
d) I, en general, a la a_n?

3. Volem trobar una fórmula que ens permeti calcular l'altura a_n per a un valor qualsevol de l'etiqueta *n*.

Raonem de la manera següent:

$a_1 = 3$ (no hem pujat <u>cap</u> esglaó)
$a_2 = 3 + 0{,}25$ (hem pujat 1 esglaó)
$a_3 = 3 + 2 \cdot 0{,}25$ (n'hem pujat 2)
$a_4 = 3 + 3 \cdot 0{,}25$ (n'hem pujat 3)
$a_5 = 3 + 4 \cdot 0{,}25$ (n'hem pujat 4)
$a_6 = 3 + 5 \cdot 0{,}25$ (n'hem pujat 5)

a) A la vista de l'anterior raonament, gairebé pots escriure la fórmula que buscàvem. Només has de completar el que falta a dins del parèntesi:

$$\boxed{a_n = 3 + (\qquad\quad) \cdot 0{,}25}$$

(**Pista**: el que has de ficar a dins del parèntesi no es *n*, però és *quasi n*; recorda que passava una cosa semblant a l'exercici **1**).

b) Calcula, amb la fórmula que acabes d'escriure, els valors de les altures següents:

$a_{10} =$
$a_{50} =$
$a_{120} =$

4. Finalment, volem escriure la fórmula anterior per a edificis amb diferents valors de l'altura del primer pis, a_1, i de la mida dels esglaons, *d*.

a) Quina seria aquesta fórmula general?
Completa el que falta:

$$\boxed{a_n = \qquad + (\qquad\quad) \cdot \qquad}$$

b) Calcula, fent servir la fórmula general que acabes d'escriure, els valors que pren a_{50} per als casos següents:

	a_1	d	a_{50}
EDIFICI 1	3,5	0,20	
EDIFICI 2	4	0,18	
EDIFICI 3	-6	0,25	
EDIFICI 4	120	-0,25	

NOTA: No et preocupis pels números negatius de la darrera taula. Podem interpretar, en el cas de l'Edifici 3, que ens trobem al soterrani, dues plantes per sota del nivell del carrer, i pugem l'escala per sortir-ne.

En el cas de l'Edifici 4, podem pensar que estem a la planta més alta d'una torre de quaranta pisos, i comencem a baixar les seves escales.

En general, tots els casos que hem estudiat són exemples del que en matemàtiques es coneix com "**progressions aritmètiques**".

8.7 Tasca dels cigrons (versió del Pr. II)

«Sumem tots els senars»

PLANTEJAMENT

►Volem sumar tots els nombres **senars** que siguin menors que cent.

a) Quants n'hi ha?

b) Quant val la suma?

Pista: podeu intentar la tècnica de les parelles, com Gauss.

ESTRATÈGIES ALTERNATIVES DE TREBALL

1) Una bona idea és fer la suma per als **casos** més **senzills**, i tractar de buscar alguna regularitat en el resultat.

2) Si us heu quedat encallats, potser el següent joc amb **cigrons** us doni una pista:

Mireu un qualsevol dels quadrats i penseu...

— quants cigrons té a dins en total?

— quants cal afegir-n'hi per construir el següent quadrat?

8.8 Guio de la 1a explicació sobre successions (Pr. II)

La idea global és tractar d'aconseguir que els alumnes vegin per si mateixos que resulta convenient referir-nos als elements d'una llista emprant la notació dels subíndexs (és a dir, a_1 , a_2 , a_3 , etc., per cada element particular; a_n en general).

Hem tractat d'aconseguir-ho lligant l'explicació amb els elements del context proper dels alumnes, tant matemàtic com extramatemàtic, elements que hauran sigut activats durant la primera part de la classe mitjançant un qüestionari de coneixements previs.

Sobre la notació de colors, cometes i parèntesis/claudàtors, seguim el mateix criteri que a la resta de les guies dels presents annexos [*Nota: això està referit a la Memòria del Pr. II*].

1 SUCCESSIONS :

hi ha una <u>regla</u>

a) dilluns, dimarts, dimecres, ...

b) 1 , 2 , 3 , 4 , ...

c) ■ , ● , ■ , ● , ...

d) 1 , $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, ...

«**Una successió és una llista ordenada**»

«Per exemple: els dies de la setmana [*vaig assenyalant-les*], els nombres naturals, aquesta llista alternada de rodones i quadrats, o aquesta llista que ja coneixeu perquè l'heu vista al qüestionari»

«**Què vol dir que una successió sigui una llista "ordenada"?** [2''] Per exemple, quin és el següent terme de la primera llista [*assenyalo els dies de la setmana, quan ho diguin ho escric*]»

...així vaig preguntant pel següent terme de cada llista, i copiant les respostes correctes.

> *(Nota: quan diguin el resultat correcte cal dir coses com "molt bé!", i quan s'equivoquin no s'ha de ser massa dur en la negació de la resposta, val més un* "podria ser... però això seria en tal altre context; ara estem parlant de..." *que no pas un* "no, malament: això no val"*).*

«Doncs això vol dir que la successió sigui "ordenada": que sempre podem dir quin serà el terme següent; **que hi ha una regla** [ho escric]»

Ara dir que com que anem a fer mates, a nosaltres només ens interessaran les successions numèriques, és a dir:

DEFINICIÓ: Una **successió numèrica** és una llista ordenada de nombres reals

«A banda dels naturals i la successió aquella "dels denominadors", oi que em podeu dir exemples de successions numèriques?»

Apunto els que em diguin, però si no ho veuen clar, els dono exemples: "els senars", un altre exemple...? Segons com vegi la situació, puc escriure'n aquests

[*els* $\mathbb{N}$ *i els* $1/n$ *no els escric!!*]

1, 3, 5, 7, ...

2, 4, 6, 8, ...

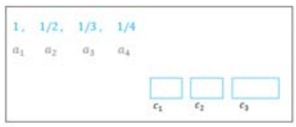
3, 6, 9, 12, ... taules de multiplicar: "la del tres"

1, 2, 3, 5, 7, 11, ... els primers

«D'acord. Doncs ara anem a posar noms als termes d'una successió. Imaginem de bell nou la successió dels denominadors [*l'escric*]:»

1 ,	1/2 ,	1/3 ,	1/4	
a_1	a_2	a_3	a_4	Aquests a_j els fiquem després (!)

«Us en recordeu de l'exercici de la data de naixement del qüestionari que acabem de fer? [*dibuixo les caselles* ***apart****: lluny de la successió*]:»



c_1 c_2 c_3

«Com designàvem la 1a casella? Ho recordeu?»

Comentar una mica això de les c_1 , c_2 , c_3 per a les caselles, amb més o menys de detall en funció de com es vegi que ho recorden i ho entenen; després, explicar que farem el mateix amb la nostra successió, però amb la lletra "a".

Finalment, preguntar quant val a_5 , a_6 , i a_{10} , i anar escrivint-ho:

1 ,	1/2 ,	1/3 ,	1/4 ,	1/5 ,	1/6	...	1/10
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	...	a_{10}

«Molt bé. Doncs ja quasi hem acabat amb la part més delicada de la unitat. Ara hem de recordar un altre exercici del qüestionari, el de les potències de -1 [copio la taula]»

n	1	2	3	4	
$(-1)^n$	-1	+1	-1	+1	

Ara pregunto qui l'ha fet, i que els ha donat. Intento detectar si tenen problemes amb potències, seria ideal haver anat passant taula per taula abans, quan feien el qüestionari, i haver anat veient ja quins problemes tenen. Els aviso que s'han de ficar les piles, perquè la setmana que ve veurem unes progressions amb les que haurem de treballar tot el temps amb potències.

Possibles problemes i tècniques per resoldre'ls [*tot interactiu!!*]:

$$(-1)^n = ? \longrightarrow \quad 7^2 = 7 \cdot 7\,, \quad 7^5 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7\,,$$
$$7^1 = 7\,;$$

...després, dic: i si és -7 en comptes de 7?

⇒ i, aleshores, quan ho vegin ja podran dictar-me els resultats amb -1 per a la taula.

[Quan ho tinguin clar, els pregunto:]

«...I si *"n" val 34?*»

n	1	2	3	4	...	34	
$(-1)^n$	-1	+1	-1	+1	...	$\underbrace{(-1)^{34}}_{=+1}$	

i els faig preguntes fins que vegin que

$$\begin{cases} \text{n parell} \rightarrow +1 \\ \text{n senar} \rightarrow -1 \end{cases}$$

«Molt bé. O sigui, que hem construït una successió numèrica els termes de la qual són $-1\,, \; +1\,, \; -1\,, \; +1$ etc., veritat?

[1''] Anem a ficar un nom a cada terme, igual que hem fet abans amb la "successió dels denominadors"»

n	1	2	3	4	...	34	
$(-1)^n$	-1	+1	-1	+1	...	$\underbrace{(-1)^{34}}_{=+1}$	
	a_1	a_2	a_3	a_4			

«Aquest [*assenyalo el* $(-1)^{34}$] quin seria?»

[M'ho diuen, però no cal que ho escrigui per no atapeir més la pissarra»]

«Molt bé. Hem vist, doncs, que si *n* és parell [*escric*], a-sub-ena és +1 [*escric*], i que si *n* és senar [*escric*], a-sub-ena és -1, oi? [*escric*] »

n parell → $a_n = +1$

n senar → $a_n = -1$

«Tothom entén el que acabo d'escriure?»

[Atenc els dubtes que faci falta]

«I si volguéssim expressar-ho tot d'una, què hauríem d'escriure aquí?»

[Dibuixo la clau i escric el "$a_n =$ "]

$$\left.\begin{array}{l} n \text{ parell} \rightarrow a_n = +1 \\ n \text{ senar} \rightarrow a_n = -1 \end{array}\right\} \quad \boxed{a_n = (-1)^n}$$

FÓRMULA del TERME GENERAL

→ Si no ho veuen clar immediatament, pot ser útil dir-los que "ho teniu a la pissarra".

Quan ja hagin donat la resposta correcta i jo hagi escrit la potència, hauria de dir que a la a_n se li diu "terme general de la successió [i l'assenyalo], i la fórmula que ens diu quant val per a qualsevol valor de *n* es diu "fórmula del terme general" (ho escric)..

Atenc els dubtes, etc.

Per afermar idees, **anem a tornar sobre la successió "dels denominadors"**, de la que ara deduirem la fórmula del seu terme general. Als alumnes que encara no lligeun tots els caps, se'ls diu que amb aquest exemple ho pillaran:

«Quant val a_5 ?» [*Contesten*] «Molt bé» [*ho escric*]. «I a_6 ?» [*escric*]

1 ,	1/2 ,	1/3 ,	1/4 ,	1/5 ,	1/6	...	1/10
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	...	a_{10}

Ells contesten [escric] i jo pregunto quant val a_{10} [ho escric després d'uns punts suspensius]. Quan me'n contestin [escric] aquesta ja puc dir:

«¿I quant val a_n [*amb èmfasi, i escrivint-ho una mica apart*] ?»

$$\boxed{a_n = 1/n}$$

Quan contestin ho apunto, i dic:

«Molt bé. Per tant, la "recepta" per a construir tota la nostra successió seria aquesta equació, no?» [La requadro] «Doncs ja hem trobat la fórmula del terme general de la successió dels denominadors».

Pregunto dubtes i, quan ho tinguin clar, dic que anem «a practicar una mica».

A continuació reproduïm el guió corresponent a l'explicació de tipus essencialment magistral[10] amb què introduïm les progressió aritmètiques (**ac.5** segons la programació, i **ac.I.v** en el dietari de la implementació real).

L'explicació comença a partir de l'exemple de l'escala, el qual pot haver-se no presentat prèviament. En qualsevol cas, el plantejament es basa en anar fent un dibuix com el de **g.1**, amb cura i calma, mentre es descriu la situació real que estem modelitzant.

Aquesta situació consisteix en que som al primer pis d'un edifici, i per tant estem a 3m per sobre del carrer. Aleshores, comencem a pujar les escales que porten al segon pis, i cada esglaó té una mida 25 cm (és a dir, 0,25 m). Ens plantegem quines són les altures a les quals ens anem trobant successivament.

(Sobre la notació de colors, cometes i parèntesis/claudàtors, seguim el mateix criteri que l'explicat per a la resta de guies dels presents annexos [de la Memòria del Pr.II])

2 PROGRESSIONS ARITMÈTIQUES :

Després de presentar el problema de l'escala [**g.1**] i parlar de la successió de les altures a les que ens trobem mentre anem pujant-la, donem la definició:

DEFINICIÓ: Una **progressió aritmètica** és una successió en què passem de cada terme al següent sumant una quantitat fixa, *d*.

diferència

«Aquesta quantitat rep el nom de "diferència"»

(Ho escrivim, amb una fletxeta).

Exemples:

a) taules de multiplicar

$$5 \xrightarrow{+5} 10 \xrightarrow{+5} 15 \xrightarrow{+5} 20 \ \ldots$$

b)

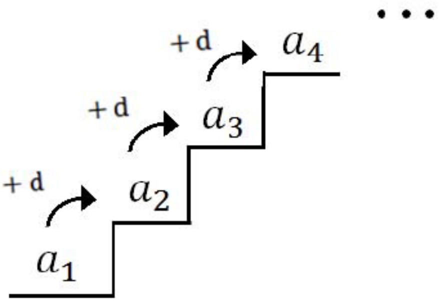
$$1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{+3} 10 \ \ldots$$

…Aquesta ens ha sortit tant al qüestionari com a l'exercici que acabem de fer a classe.

[10] Per tant, entendrem les preguntes-guia d'aquest guió com retòriques (no esperarem resposta dels alumnes). El motiu és que és al final d'una classe i necessitem estar més pendents del rellotge.

· Fórmula del terme general d'una p.a.:

· «Per entendre la fórmula, ens tornem a dibuixar una escala, però ara ja fiquem els a_1 , a_2 ... i la *d*, per parlar d'una progressió aritmètica qualsevol»



· «Com passem de l'a_1 a l'a_2 ?
[**1''**] Sumant *d*, veritat?»

$$a_2 = a_1 + d$$

[puc resseguir el saltet a l'escala amb el dit]

«...I com passem de l'a_1 a l'a_3?
→ Pujo dos esglaons [*ressegueixo*], així que sumo *d* dues vegades»

$$a_3 = a_1 + 2 \cdot d$$

«…I de l'a_1 al a_4 ? Tres esglaons, tres vegades *d*»

$$a_4 = a_1 + 3 \cdot d$$

«…I de l'a_1 fins l' a_n ?»

Aquí guardem silenci i esperem resposta: serà l'única cosa interactiva, en principi, de l'explicació; si no ho veuen, els dono pistes:

- Veieu que per anar al a_3 hem hagut de sumar 2 vegades *d* ?
- I per al a_4 són 3 vegades?

Està clar que per al a_5 serien 4 vegades; al 6, 5; al 7, 6… sempre és una menys!
Per tant, per al a_n … (a veure si ho diuen, si no, ho dic jo): $(n-1)$!
Ho veieu?

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

→ Pregunto dubtes.