Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2009-2010

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Trobeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que conté la recta $r_1: \dfrac{x-1}{2} = y = 2-z$ i és paral·lel a la recta $r_2: \begin{cases} x-y-z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$.

[2 punts]

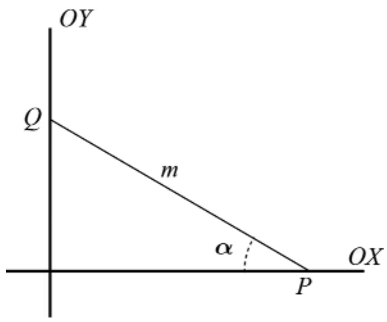
2. Donat el sistema d'equacions lineals $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=-1 \\ 2x+y+z=4 \\ x-y+(p-3)z=5 \end{array}\right\}$:

a) Estudieu-ne el caràcter (és a dir, si és compatible o no i si és determinat o no) en funció del paràmetre p.

b) Comproveu que si $p \neq 5$ la solució del sistema no depèn del valor d'aquest paràmetre.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

3. Un segment de longitud fixada m recolza sobre els eixos de coordenades. Calculeu el valor de l'angle α que forma el segment amb l'eix OX perquè el triangle rectangle determinat pel segment amb els eixos i del qual m és la hipotenusa tingui àrea màxima. Comproveu que es tracta realment d'un màxim.



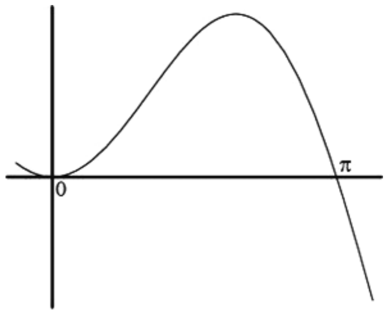
[2 punts]

4. Donades les rectes $r_1: \dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-4}$ i $r_2: \begin{cases} 2x+y+2z+5=0 \\ 2x-y+z+11=0 \end{cases}$:

a) Comproveu que són paral·leles.
b) Trobeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que les conté.

[1 punt per cada apartat]

5. La gràfica de la funció $f(x) = x \cdot \sin(x)$ és la següent:



a) Trobeu-ne una primitiva.
b) Aplicant el resultat de l'apartat anterior, calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$ i l'eix d'abscisses des de $x = 0$ fins a $x = \pi$.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

6. Sigui $A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$. Trobeu els valors de les variables x i y perquè es compleixi que

$A^2 = A$.

[2 punts]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2009-2010

Matemàtiques

Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Donats el pla $\pi: x + 2y + 3z - 4 = 0$ i els punts $P = (3, 1, -2)$ i $Q = (0, 1, 2)$:

a) Calculeu l'equació contínua de la recta perpendicular al pla π que passa pel punt P.

b) Calculeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla perpendicular a π que passa pels punts P i Q.

[1 punt per cada apartat]

2. Considereu la igualtat matricial $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

a) Comproveu si les matrius $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ compleixen o no la igualtat anterior.

b) En general, donades dues matrius qualssevol A i B quadrades del mateix ordre, expliqueu raonadament si hi ha alguna condició que hagin de complir perquè la igualtat de l'enunciat sigui certa.

[1 punt per cada apartat]

3. Sigui $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomi qualsevol de segon grau.

a) Trobeu la relació existent entre els paràmetres a, b i c sabent que es compleix que $P(1) = 0$ i $P(2) = 0$.

b) Quan es compleix la condició anterior, indiqueu quins valors pot tenir $P'(3/2)$.

[1 punt per cada apartat]

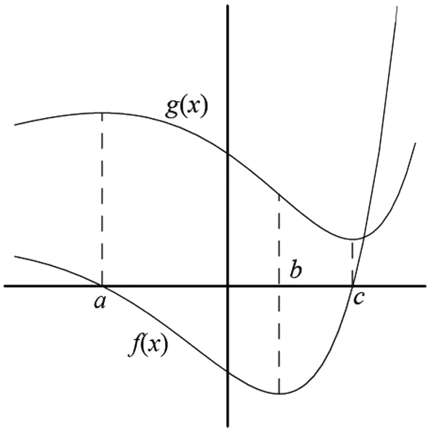
4. Hem escalonat la matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals, $A \cdot X = b$, i hem obtingut:

$$\left(A|b\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & a+2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 3 \end{array}\right)$$

a) Discutiu aquest sistema en funció del paràmetre a.
b) Resoleu-lo quan $a = 2$.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

5. En la figura següent es representen dues funcions. L'una és la derivada de l'altra. Decidiu si la funció $f(x)$ és la derivada de la funció $g(x)$ o és a l'inrevés, estudiant què passa en els punts $x = a$, $x = b$ i $x = c$.



[2 punts]

6. Siguin $\vec{u}_1 = (-1, 3, 2)$, $\vec{u}_2 = (2, -1, 4)$ i $\vec{u}_3 = (a+1, a-1, 4a+2)$ tres vectors de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$.

a) Trobeu el valor del paràmetre a per al qual el vector $\vec{u}_3$ és combinació lineal dels vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$.
b) Comproveu que per a $a = 0$ el conjunt $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ és linealment independent.

[1 punt per cada apartat]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2009-2010

Matemàtiques

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu un sistema qualsevol de dues equacions amb tres incògnites. Responeu raonadament a les qüestions següents:

a) És possible que el sistema considerat sigui compatible determinat?
b) Pot ser incompatible?

[1 punt per cada apartat]

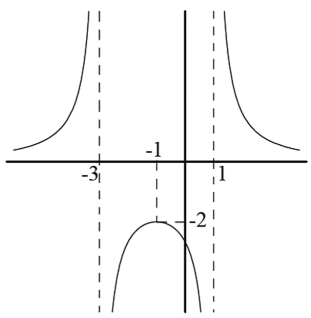
2. Donats el punt $P = (1, 0, -2)$ i la recta $r: \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+3}{-3}$:

a) Trobeu l'equació contínua de la recta que passa pel punt P i talla perpendicularment la recta r.
b) Calculeu la distància del punt P a la recta r.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

3. Determineu el valor dels paràmetres a, b i c perquè la gràfica de la funció

$f(x) = \dfrac{a}{x^2 + bx + c}$ sigui la següent:



[2 punts]

4. Siguin A, B i C matrius quadrades d'ordre n.

a) Expliqueu raonadament si és possible que det $A \neq 0$, det $B \neq 0$ i det $(A \cdot B) = 0$. Si és possible, poseu-ne un exemple.

b) Si sabem que det $A \neq 0$ i que $A \cdot B = A \cdot C$, expliqueu raonadament si podem assegurar que $B = C$.

[1 punt per cada apartat]

5. Siguin r i s dues rectes d'equacions

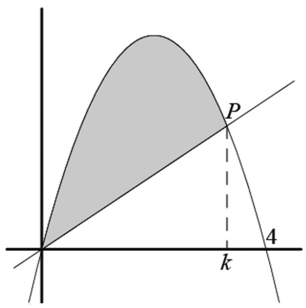
$$r:(x,y,z)=(-4,3,4)+t(2,-1,1)\ ,\quad s: x+1=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-a}{3}\,.$$

a) Trobeu el valor del paràmetre a perquè aquestes rectes es tallin.

b) En el cas en què es tallen, trobeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que les conté.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

3. En la figura es mostra la corba $y = x(4 - x)$ i una recta r que passa per l'origen i talla la corba en un punt P d'abscissa k, amb $0 < k < 4$.



a) Trobeu l'àrea ombrejada, delimitada per la corba i la recta, en funció de k.

b) Trobeu per a quin valor de k l'àrea de la regió ombrejada és la meitat de l'àrea del recinte limitat per la corba i l'eix OX.

[1 punt per apartat]

SÈRIE 1

1.- Trobeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que conté la recta $r_1 : \dfrac{x-1}{2} = y = 2 - z$ i és palal·lel a la recta $r_2 : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

[2 punts]

Solució

Anomenem π al pla que ens demanen. Cal trobar un vector director per cada una de les rectes; aquests vectors són els generadors de π. Busquem l'equació contínua de la recta r_1,

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1} \ ,$$

per tenir el vector director $v_1 = (2, 1, -1)$. A més a més, tenim que $P = (1, 0, 2) \in r_1$ i, per tant, també $P \in \pi$.

El vector director de r_2 és

$$v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -2, -1) \ .$$

L'equació de π és

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & x-1 \\ 1 & -2 & y-0 \\ -1 & -1 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

és a dir, $3x - 5y + z - 5 = 0$.

2.- Donat el sistema d'equacions lineals $\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = -1 \\ 2x + y + z = 4 \\ x - y + (p-3)z = 5 \end{array}\right\}$ ***:***

(a) ***Estudieu-ne el caràcter (és a dir, si és compatible o no i si és determinat o no) en funció del paràmetre*** p.

(b) ***Comproveu que si*** $p \neq 5$ ***la solució del sistema no depèn del valor d'aquest paràmetre.***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Escalonem la matriu del sistema,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & p-3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & p-2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & p-5 & 0 \end{array}\right) .$$

A partir d'aquí,

- Si $p \neq 5$ el rang de la matriu del sistema i el de l'ampliada valen 3, que és igual al número d'incògnites. Per tant, el sistema és compatible determinat.
- Quan $p = 5$, els rangs valen 2, menor que el número d'incògnites. Per tant, el sistema és compatible indeterminat.

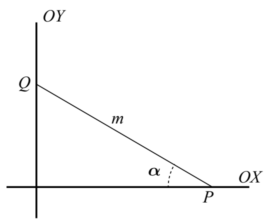
La qüestió es pot resoldre també buscant el determinant de la matriu del sistema, que dóna $15 - 3p$; en igualar-lo a zero, resulta $p = 5$ com a cas a estudiar. Si es fa així, en el cas $p = 5$ cal estudiar el rang de la matriu ampliada arribant a la conclusió de què rang $A =$ rang $(A|b) = 2$.

(b) D'acord amb l'escalonament anterior, si $p \neq 5$ el sistema a resoldre és

$$\left.\begin{array}{c} x+2y-z=-1 \\ -y+z=2 \\ (p-5)z=0 \end{array}\right\} .$$

que té per solució $z=0$, $y=-2$ i $x=3$, independentment del valor de p, sempre que $p \neq 5$.

3.- Un segment de longitud fixada m recolza sobre els eixos de coordenades. Calculeu el valor de l'angle α que forma el segment amb l'eix OX perquè el triangle rectangle determinat pel segment amb els eixos i del qual m és la hipotenusa tingui àrea màxima. Comproveu que es tracta realment d'un màxim.



[2 punts]

Solució 1

Siguin $P=(x,0)$ i $Q=(0,y)$ els punts on el segment toca als eixos de coordenades. Llavors, és evident que $x^2+y^2=m^2$ i que $A=\dfrac{x\cdot y}{2}$. De la primera igualtat, $y=\sqrt{m^2-x^2}$. Substituint aquest valor a la fórmula que ens dóna l'àrea, ens queda $A=\dfrac{x\cdot\sqrt{m^2-x^2}}{2}$. Ara cal trobar el valor de la derivada, o bé de la funció $A(x)$ o bé de la funció $B(x)=[A(x)]^2$, la qual permet simplificar el càlcul de la derivada, sense canviar el resultat.

$$A'(x)=\frac{\sqrt{m^2-x^2}}{2}-\frac{x^2}{2\sqrt{m^2-x^2}}=\frac{m^2-2x^2}{2\sqrt{m^2-x^2}} \ ; \quad B'(x)=\frac{2x(m^2-x^2)-2x^3}{4}=\frac{x(m^2-2x^2)}{2} \ .$$

$A'(x)=0$ té com a solució $x=\pm\dfrac{m}{\sqrt{2}}$ i $B'(x)=0$ admet a més a més, la solució $x=0$. Tant la solució nul·la com la negativa no tenen sentit en aquest exercici. Per tant, ha de ser $x=\dfrac{m}{\sqrt{2}}$. Llavors,

$$y=\sqrt{m^2-x^2}=\sqrt{m^2-\frac{m^2}{2}}=\sqrt{\frac{m^2}{2}}=\frac{m}{\sqrt{2}} \ .$$

Així, el triangle amb àrea màxima és isòsceles ($x=y$). O sigui, $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ $(=45^o)$.

Ara cal comprovar que es tracta realment d'un màxim. Per fer-ho calcularem la derivada segona de $A(x)$ o de $B(x)$, segons quina funció s'hagi utilitzat.

$$A''(x)=\frac{2x^3-3m^2x}{2(m^2-x^2)^{3/2}} \quad \text{d'on} \quad A''(m/\sqrt{2})=-2<0 \ ;$$

$$B''(x)=\frac{m^2-6x^2}{2} \quad \text{i, per tant,} \quad B''(m/\sqrt{2})=-m^2<0 \ .$$

D'una manera o de l'altra, la derivada segona negativa indica que es tracta d'un màxim.

Solució 2

Aquesta solució utilitza trigonometria, que no entra específicament al temari de les proves d'accés, però que l'alumne ha cursat al seu primer curs de batxillerat. Sigui P el punt on el segment toca a l'eix OX i Q el punt on el segment toca a l'eix OY. És clar que $P = (m \cdot \cos\alpha,\, 0)$ i que $Q = (0\,, m \cdot \sin\alpha)$. Llavors, l'àrea del triangle rectangle format pels eixos i el segment és

$$A = \frac{(m \cdot \cos\alpha) \cdot (m \cdot \sin\alpha)}{2} = \frac{m^2}{2} \cdot (\sin\alpha \cdot \cos\alpha).$$

Per trobar el seu valor màxim, busquem la derivada de A respecte de α, la igualem a zero i busquem les solucions de l'equació resultant, tenint en compte que ha de ser un angle del primer quadrant.

$$A' = \frac{m^2}{2} \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha) = \frac{m^2}{2} \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \frac{m^2}{2} \cdot \cos(2\alpha)\ .$$

Llavors,

$$A' = 0 \iff \cos(2\alpha) = 0 \iff 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (= 90^o + 180^o k) \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \ (= 45^o + 90^o k).$$

Com que α ha de ser del primer quadrant, la resposta és solament $\alpha = \frac{\pi}{4}$ $(= 45^o)$.

Per comprovar que es tracta d'un màxim, busquem la derivada segona de l'àrea i l'avaluem en el punt trobat,

$$A'' = \frac{m^2}{2}(-\sin(2\alpha) \cdot 2) \Longrightarrow A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -m^2 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = -m^2 < 0\ .$$

En efecte, es tracta d'un màxim.

4.- Donades les rectes $r_1 : \dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-4}$ ***i*** $r_2 : \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0 \\ 2x - y + z + 11 = 0 \end{cases}$ ***:***

(a) ***Comproveu que són paral·leles.***

(b) ***Trobeu l'equació general (és a dir, de la forma*** $Ax + By + Cz + D = 0$***) del pla que les conté.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) El vector director de la primera recta és $v_1 = (3, 2, -4)$ i el de la segona,

$$v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3, 2, -4)\ .$$

Com que els vectors directors són, evidentment, proporcionals, les rectes són paral·leles o coincidents. Per descartar aquesta segona possibilitat, cal comprovar simplement que un punt d'una d'elles no pertany a l'altra. En efecte, el punt $(-5, 1, 2)$, que és un punt de r_1, no compleix la segona equació que defineix la recta r_2 (la primera sí que la compleix!) i, per tant, no pertany a r_2.

(b) Podem trobar un únic pla que conté dues rectes si aquestes es tallen o si són paral·leles no coincidents. Estem en el segon cas, i el pla que les conté tindrà per vectors generadors un director de les rectes i un vector que comenci en un punt de r_1 i acabi en un de r_2. Agafarem $P = (-5, 1, 2) \in r_1$. Per trobar el punt Q pertanyent a r_2, donem un valor qualsevol a alguna de les variables x, y o z. Per exemple, si fem $z = 0$, ens queda el sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 5 = 0 \\ 2x - y + 11 = 0 \end{cases},$$

que té per solució $x = -4$, $y = 3$. Agafem $Q = (-4, 3, 0) \in r_2$. L'equació del pla buscat és

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x+5 \\ 2 & 2 & y-1 \\ -4 & -2 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 4x + 2y + 4z + 10 = 0 \Longrightarrow 2x + y + 2z + 5 = 0 \ .$$

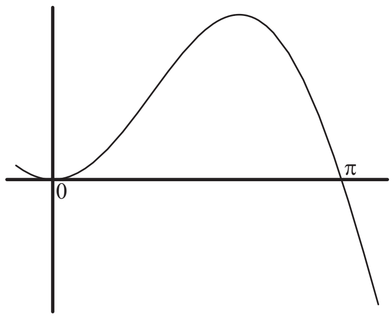
NOTA 1: una altra manera de resoldre aquest apartat és utilitzant el feix de plans que determina la recta r_2; la forma d'aquest feix és $2x + y + 2x + 5 + \lambda(2x - y + z + 11) = 0$, és a dir,

$$(2 + 2\lambda)x + (1 - \lambda)y + (2 + \lambda)z + (5 + 11\lambda) = 0 \ .$$

Imposant que aquest pla passi pel punt $P = (-5, 1, 2)$, ens sortirà que $\lambda = 0$, per la qual cosa el pla buscat és $2x + y + 2x + 5 = 0$.

NOTA 2: la qüestió es pot resoldre molt més senzillament i ràpida; en efecte, com que el punt P pertany al primer pla que defineix la recta r_2, ja podem assegurar que aquest pla, $2x + y + 2z + 5 = 0$, conté les dues rectes.

5.- La gràfica de la funció $f(x) = x \cdot \sin(x)$ és la següent:



(a) ***Trobeu-ne una primitiva.***

(b) ***Aplicant el resultat de l'apartat anterior, calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$ i l'eix d'abscisses des de $x = 0$ fins a $x = \pi$.***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Per calcular $\int x \cdot \sin(x)dx$ utilitzarem el mètode de integració per parts. Agafarem $u = x$ i $dv = \sin(x)dx$; llavors, $du = dx$ i $v = -\cos(x)$.

$$\int x \cdot \sin(x)dx = x[-\cos(x)] - \int [-\cos(x)]dx = -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x)dx = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) \ .$$

No cal sumar cap constant perquè es demana solament **una** primitiva.

(b) Aplicant la regla de Barrow,

$$\int_0^{\pi} x \cdot \sin(x)dx = \Big[-x \cdot \cos(x) + \sin(x) \Big]_0^{\pi} = [-\pi \cdot \cos(\pi) + \sin(\pi)] - [-0 \cdot \cos(0) + \sin(0)] = \pi - 0 = \pi.$$

6.- Sigui $A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$. Trobeu els valors de les variables x i y perquè es compleixi que $A^2 = A$.

[2 punts]

Solució

Busquem el valor de la matriu A^2,

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 6 & 3x + 3y \\ -2x - 2y & -6 + y^2 \end{pmatrix} .$$

La igualtat $A^2 = A$ ens porta al sistema d'equacions

$$x^2 - 6 = x \ ; \quad 3x + 3y = 3 \ ; \quad -2x - 2y = -2 \ ; \quad y^2 - 6 = y \ .$$

De fet, la segona i la tercera equacions són la mateixa, $x + y = 1$. De la primera equació,

$$x^2 - 6 = x \iff x^2 - x - 6 = 0 \iff x = 3 \ \text{ o } \ x = -2 \ .$$

La quarta equació és similar a la primera amb diferent variable. Les solucions són $y = 3$, $y = -2$. En principi, sembla que hi ha quatre solucions diferents,

$$x = 3 \ \text{ amb } \ y = 3; \quad x = 3 \ \text{ amb } \ y = -2; \quad x = -2 \ \text{ amb } \ y = 3; \quad x = -2 \ \text{ amb } \ y = -2.$$

Ara bé, d'aquestes quatre solucions solament dues compleixen l'equació $x + y = 1$:

$$x = 3 \ \text{ amb } \ y = -2 \ ; \quad x = -2 \ \text{ amb } \ y = 3 \ .$$

SÈRIE 4

1.- Donats el pla $\pi : x + 2y + 3z - 4 = 0$ i els punts $P = (3, 1, -2), Q = (0, 1, 2)$:

(a) ***Calculeu l'equació contínua de la recta perpendicular al pla π que passa pel punt P.***

(b) ***Calculeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla perpendicular a π que passa pels punts P i Q.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Qualsevol recta perpendicular al pla π admet, com a vector director, el vector normal al pla. Si anomenem r a la recta buscada, el seu vector director pot ser $v_r = (1, 2, 3)$. Com que ha de passar pel punt $P = (3, 1, -2)$, la seva equació contínua és

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3} \ .$$

(b) Els vectors v_π, normal al pla π, i $\overrightarrow{QP} = P - Q = (3, 0, -4)$ generen el pla buscat. A més a més, aquest pla ha de passar pel punt P (o pel punt Q). Per tant, la seva equació general és

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x-3 \\ 2 & 0 & y-1 \\ 3 & -4 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \iff -8x + 13y - 6z - 1 = 0 \ .$$

2.- Considereu la igualtat matricial $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(a) ***Comproveu si les matrius $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ compleixen o no la igualtat anterior.***

(b) ***En general, donades dues matrius qualssevol A i B quadrades del mateix ordre, expliqueu raonadament si hi ha alguna condició que hagin de complir perquè la igualtat de l'enunciat sigui certa.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Realitzem els càlculs demanats.

$$(A+B)^2 = \left[\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

$$\begin{aligned} A^2 + 2AB + B^2 &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 + 2\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

(b) En realitat, $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2+AB+BA+B^2 \neq A^2+2AB+B^2$, ja que, en general, $AB \neq BA$. Així, la condició que han de complir les matrius A i B perquè es verifiqui la igualtat de l'enunciat és que $AB = BA$.

3.- Sigui $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomi qualsevol de segon grau.

(a) ***Trobeu la relació existent entre els paràmetres a, b i c sabent que es compleix que $P(1) = 0$ i $P(2) = 0$.***

(b) ***Quan es compleix la condició anterior, indiqueu quins valors pot tenir*** $P'(3/2)$.

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Com que $P(1) = a + b + c$ i $P(2) = 4a + 2b + c$, tenim el següent sistema,

$$\left.\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ 4a + 2b + c &= 0 \end{aligned}\right\} \iff b = -3a \ , \quad c = 2a \ .$$

Aquestes són les relacions que s'han de verificar: $b = -3a$, $c = 2a$.

(b) La derivada del polinomi $P(x) = ax^2 - 3ax + 2a$ és $P'(x) = 2ax - 3a$. Per tant, $P'(3/2) = 0$ per tot valor del paràmetre a.

4.- Hem escalonat la matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals, $A \cdot X = b$***, i hem obtingut:***

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 2 \\ 0 & a+2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & | & 3 \end{pmatrix} \ .$$

(a) ***Discutiu aquest sistema en funció del paràmetre*** a***.***

(b) ***Resoleu-lo quan*** $a = 2$***.***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Vist l'enunciat, hi ha dos valors del paràmetre a a estudiar; en efecte,

- Si $a \neq -2$ i $a \neq 1$, tenim que rang A = rang $(A|b) = 3$, que coincideix amb el nombre d'incògnites. Llavors, el sistema és compatible determinat.
- Per $a = 1$, és clar que rang $A = 2$ i rang $(A|b) = 3$. El sistema és, doncs, incompatible (també es pot raonar veient que la tercera equació és $0 = 3$).
- Quan $a = -2$, la matriu no està acabada d'escalonar. Acabant l'escalonament,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & -3 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} ,$$

  es veu que rang A = rang $(A|b) = 2$; el sistema és compatible indeterminat.

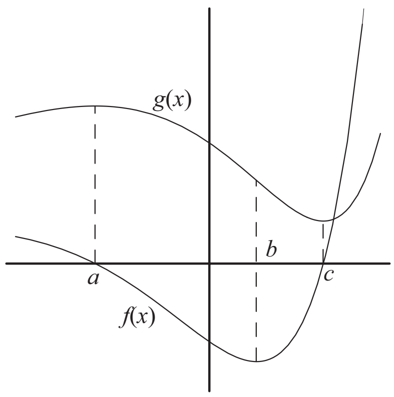
(b) Quan $a = 2$, el sistema d'equacions inicial és equivalent al sistema

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2 \\ 4y + z &= -1 \\ z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

que té per solució $x = -9$, $y = -1$, $z = 3$.

5.- En la figura següent es representen dues funcions. L'una és la derivada de l'altra. Decidiu si la funció $f(x)$ ***és la derivada de la funció*** $g(x)$ ***o és a l'inrevés, estudiant què passa en els punts*** $x = a$***,*** $x = b$ ***i*** $x = c$***.***

[2 punts]



Solució

En $x = a$, la funció $g(x)$ té un màxim relatiu (per tant $g'(a) = 0$) i la funció $f(x)$ val zero ($f(a) = 0$).

En $x = b$ la funció $g(x)$ té un punt d'inflexió; per tant, la seva segona derivada en aquest punt val zero ($g''(b) = 0$). La funció $f(x)$ té un mínim relatiu en aquest mateix punt ($f'(b) = 0$).

Finalment, en $x = c$ la funció $g(x)$ té un mínim relatiu (un altre cop $g'(c) = 0$) i $f(c) = 0$.

Tot això ens permet assegurar que la funció $f(x)$ és la derivada de la funció $g(x)$.

6.- Siguin $\vec{u}_1 = (-1, 3, 2)$***,*** $\vec{u}_2 = (2, -1, 4)$ ***i*** $\vec{u}_3 = (a + 1, a - 1, 4a + 2)$***, tres vectors de l'espai vectorial*** $\mathbb{R}^3$***.***

(a) ***Trobeu el valor del paràmetre*** a ***per al qual*** $\vec{u}_3$ ***és combinació lineal dels vectors*** $\vec{u}_1$ ***i*** $\vec{u}_2$***.***

(b) ***Comproveu que per a*** $a = 0$ ***el conjunt*** $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ ***és linealment independent.***

[1 punt per apartat]

Solució

(a) Quan un vector és combinació lineal dels altres dos, el determinant format per ells és nul.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & a-1 \\ 3 & -1 & a-1 \\ 2 & 4 & 4a+2 \end{vmatrix} = 2a - 4; \quad 2a - 4 = 0 \iff a = 2 \,.$$

O sigui, el vector $\vec{u}_3$ és combinació lineal dels vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ si i sol si $a = 2$.

També es pot fer plantejant l'equació $x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 = \vec{u}_3$; és a dir,

$$x(-1, 3, 2) + y(2, -1, 4) = (a + 1, a - 1, 4a + 2) \iff \left.\begin{array}{r} -x + 2y = a + 1 \\ 3x - y = a - 1 \\ 2x + 4y = 4a + 2 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{r} -x + 2y - a = 1 \\ 3x - y - a = -1 \\ 2x + 4y - 4a = 2 \end{array}\right\}.$$

Aquest sistema es pot considerar com un sistema de tres equacions amb tres incògnites (x, y i a). El resolem pel mètode de Gauss,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ 0 & 8 & -6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right).$$

D'aquí, $a = 2$ (també $x = 1$ i $y = 2$, però no ens interessa).

(b) El conjunt $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ és linealment independent si i sol si el determinant format pels tres vectors és no nul:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \ .$$

També es pot raonar que el determinant dels tres vectors val $2a - 4$, que per $a = 0$ és no nul.

Evidentment, també es pot comprovar que el conjunt és linealment independent igualant una combinació dels tres vectors al vector nul i arribant a què els coeficients han de ser nuls.

SÈRIE 5

1.- Considereu un sistema qualsevol de dues equacions amb tres incògnites. Responeu raonadament les qüestions següents:

(a) ***És possible que el sistema considerat sigui compatible determinat?***

(b) ***Pot ser incompatible?***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Si el sistema té solament dues equacions, el rang màxim que poden tenir la matriu del sistema i la matriu ampliada és 2. Com que hi ha 3 incògnites, és impossible que el sistema sigui compatible determinat.

(b) Sí que pot ser-ho. Per exemple, el sistema $\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$ és incompatible.

2.- Donats el punt $P=(1,0,-2)$ ***i la recta*** $r:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+3}{-3}$ ***:***

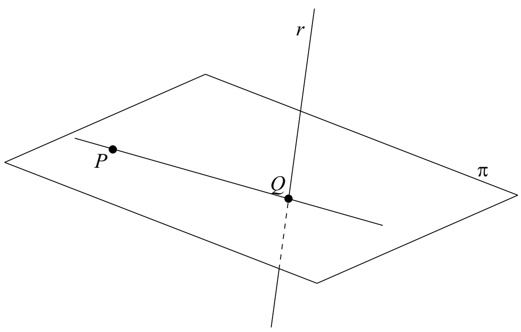
(a) ***Trobeu l'equació contínua de la recta que passa pel punt*** P ***i talla perpendicularment la recta*** r***.***

(b) ***Calculeu la distància del punt*** P ***a la recta*** r***.***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) La recta que passa pel punt $P=(1,0,-2)$ i que talla perpendicularment la recta r ha d'estar dins del pla π que passa per P i és perpendicular a r.



Aquest pla tindrà el seu vector normal proporcional al vector director de la recta. Per més senzillesa, agafarem el mateix. Així, si v_π és el vector normal al pla π i v_r és el director de la recta r, tenim $v_\pi = v_r = (2,2,-3)$.

L'equació del pla amb vector normal $v_\pi=(A,B,C)$ passant per un punt (x_0,y_0,z_0) és

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

En el nostre cas, $\pi: 2(x-1)+2(y-0)-3(z+2)=0$; és a dir, $\pi: 2x+2y-3z-8=0$.

Busquem ara el punt d'intersecció entre el pla π i la recta r. Podem, per exemple, trobar les equacions paramètriques de la recta i substituir-les en l'equació del pla.

$$\left.\begin{array}{r} x=5+2\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=-3-3\lambda \end{array}\right\} \; ; \quad 2(5+2\lambda)+2(3+2\lambda)-3(-3-3\lambda)-8=0 \Longrightarrow \lambda=-1\ .$$

Així, el punt de tall és $Q = (3, 1, 0)$. La recta buscada passa per $P = (1, 0, -2)$ i té com a vector director $\overrightarrow{PQ} = (2, 1, 2)$. L'equació contínua de la recta buscada és

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{2} \ .$$

(b) Utilitzant el punt Q de l'apartat anterior, el càlcul de la distància entre el punt P i la recta r es pot fer trobant la distància entre els punts P i Q,

$$d(P, r) = d(P, Q) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-0)^2 + (0+2)^2} = 3 \ .$$

Aquest apartat també es pot resoldre independentment de l'anterior mitjançant la fórmula

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{PR} \times v_r\|}{\|v_r\|} \ ,$$

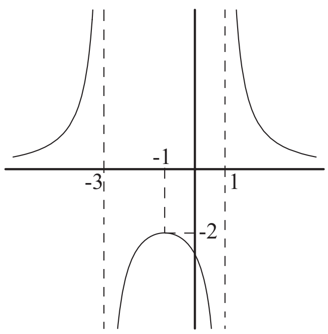
on R és qualsevol punt de la recta r; per exemple, podem agafar $R = (5, 3, -3)$; llavors, $\overrightarrow{PR} = (4, 3, -1)$ i el producte vectorial és

$$\overrightarrow{PR} \times v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-7, 10, 2) \ .$$

Així,

$$d(P, r) = \frac{\|(-7, 10, 2)\|}{\|(2, 2, -3)\|} = \frac{\sqrt{153}}{\sqrt{17}} = \sqrt{9} = 3 \ .$$

3.- Determineu el valor dels paràmetres a, b i c perquè la gràfica de la funció $f(x) = \dfrac{a}{x^2 + bx + c}$ sigui la següent:



[2 punts]

Solució

És evident que la funció té dues asímptotes verticals, $x = -3$ i $x = 1$. Això vol dir que el denominador de la funció s'ha d'anul·lar per aquests valors. Arribem, doncs, al sistema

$$\left.\begin{array}{r} 9 - 3b + c = 0 \\ 1 + b + c = 0 \end{array}\right\}$$

que té per solució $b = 2$, $c = -3$.

També es pot resoldre aquest troç de la qüestió adonant-se'n que el denominador ha de ser

$$(x+3)(x-1) = x^2 + 2x - 3 \ .$$

Ara solament cal fer passar la funció pel punt $(-1,-2)$.

$$f(-1) = -2 \iff \frac{a}{(-1)^2 + 2(-1) - 3} = -2 \iff a = 8 \ .$$

Així el valor dels paràmetres és $a = 8$, $b = 2$, $c = -3$.

Observem que no hem utilitzat en cap moment que el punt $(-1,-2)$ és un màxim relatiu de la funció. Si es vol, es pot comprovar que efectivament és així.

$$f'(x) = -\frac{16(1+x)}{(x^2+2x-3)^2} \Longrightarrow f'(-1) = 0 \ .$$

A més a més, $f'(x) > 0$ si $-3 < x < -1$ i $f'(x) < 0$ si $-1 < x < 1$.

4.- Siguin A, B i C matrius quadrades d'ordre n.

(a) ***Expliqueu raonadament si és possible que*** $\det A \neq 0$***,*** $\det B \neq 0$ ***i*** $\det(A \cdot B) = 0$***. Si és possible, poseu-ne un exemple.***

(b) ***Si sabem que*** $\det A \neq 0$ ***i*** $A \cdot B = A \cdot C$***, expliqueu raonadament si podem assegurar que*** $B = C$***.***

[1 punt per apartat]

Solució

(a) Una de les propietats dels determinants ens assegura que $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$. Per tant, la situació proposada és impossible.

(b) Quan $\det A \neq 0$ podem assegurar que la matriu és invertible. Per tant,

$$A \cdot B = A \cdot C \iff A^{-1}(A \cdot B) = A^{-1}(A \cdot C) \iff (A^{-1} \cdot A)B = (A^{-1} \cdot A)C \iff B = C \ .$$

5.- Siguin r i s dues rectes d'equacions

$$r : (x,y,z) = (-4,3,4) + t(2,-1,1) \ , \qquad s : x+1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-a}{3}.$$

(a) ***Trobeu el valor del paràmetre a perquè aquestes rectes es tallin.***

(b) ***En el cas en què es tallen, trobeu l'equació general (és a dir, de la forma*** $Ax + By + Cz + D = 0$***) del pla que les conté.***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Els vectors directors respectius de les rectes són $v_r = (2,-1,1)$ i $v_s = (1,-1,3)$. Com que no són proporcionals, les dues rectes es creuen o es tallen. Així doncs, busquem el valor del paràmetre a perquè es tallin. Hi ha vàries maneres de trobar aquest valor. Entre elles, per exemple, podem utilitzar les equacions paramètriques de la recta r per substituir el valor de x, y i z a la recta s.

$$(x,y,z) = (-4,3,4) + t(2,-1,1) \iff x = -4+2t, \ y = 3-t, \ z = 4+t \ .$$

Llavors, utilitzant la primera igualtat de s,

$$x+1 = \frac{y-2}{-1} \Longrightarrow (-4+2t+1)\cdot(-1) = 3-t-2 \iff t = 2 \ .$$

El punt de tall, si existeix, és $P=(0,1,6)$. Agafant ara la segona de les igualtats que defineix s,

$$\frac{1-2}{-1}=\frac{6-a}{3} \iff a=3\ .$$

Per tant,

- Si $a\neq 3$ les rectes es creuen.
- Si $a=3$ les rectes es tallen.

Naturalment, aquest apartat es pot resoldre utilitzant el mètode genèric per trobar la posició relativa de dues rectes a l'espai. Així, cal trobar el rang de la matriu que té per columnes (o per files) els vectors $\overrightarrow{PQ}$, v_r i v_s, i el rang de la matriu formada pels dos últims vectors. Siguin $P=(-4,3,4)$ i $Q=(-1,2,a)$. Llavors, les matrius sobre les que hem de treballar són

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ a-4 & 1 & 3\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ -1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\ .$$

Perquè les dues rectes es tallin, cal que rang A = rang $B=2$. Com que és evident que rang $B=2$, solament cal imposar que $\det A=0$.

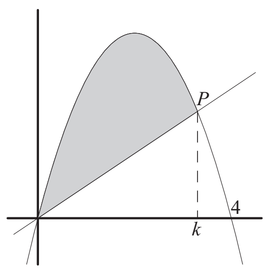
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ a-4 & 1 & 3\end{vmatrix}=3-a\ .$$

O sigui, les rectes es tallen si i sol si $a=3$.

(b) Per a $a=3$ els vectors v_r i v_s generen el pla que, si passa pel punt $(-4,3,4)$ (i també per $(0,1,6)$, per exemple), conté les dues rectes. L'equació general del pla és

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x+4\\ -1 & -1 & y-3\\ 1 & 3 & z-4\end{vmatrix}=0 \iff -2x-5y-z+11=0\ .$$

6.- En la figura es mostra la corba $y=x(4-x)$ i una recta r que passa per l'origen i talla la corba en un punt P d'abscissa k, amb $0<k<4$.



(a) ***Trobeu l'àrea ombrejada, delimitada per la corba i la recta, en funció de k.***

(b) ***Trobeu per a quin valor de k l'àrea de la regió ombrejada és la meitat de l'àrea del recinte limitat per la corba i l'eix OX.***

[1 punt per apartat]

Solució

(a) El punt P de la gràfica té per coordenades $P = (k, 4k - k^2)$. Llavors, l'àrea demanda en aquest primer apartat és l'àrea del recinte que tanca la corba des de $x = 0$ fins a $x = 4$ menys l'àrea del triangle format pels punts $(0, 0)$, $(k, 0)$ i P, que té com a base el valor k i com a altura el valor $4k - k^2$.

$$A = \int_0^k (4x - x^2)dx - \frac{k(4k - k^2)}{2} = \frac{6k^2 - k^3}{3} - \frac{4k^2 - k^3}{2} = \frac{k^3}{6}\ .$$

També és correcte plantejar l'area com la del recinte limitat per la corba i la recta d'equació $y = (4-k)x$ (recta que passa per l'origen i el punt P):

$$A = \int_0^k (4x - x^2 - 4x + kx)dx = \int_0^k (kx - x^2)dx = \left[\frac{kx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^k = \frac{k^3}{6}\ .$$

(b) La corba talla a l'eix OX en els punts on $x = 0$ i $x = 4$. L'àrea del recinte limitat per la corba i l'eix és

$$\int_0^4 (4x - x^2)dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{32}{3}\ .$$

Així, volem que $\dfrac{k^3}{6} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{32}{3} = \dfrac{16}{3}$. La solució d'aquesta equació és $k = \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4}$.

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2009-2010

Matemàtiques

Sèrie 2

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Trobeu les asímptotes de la funció $f(x) = \dfrac{3x^3 - 5x - 2}{x^2 - 4x - 5}$.
[2 punts]

2. Donats el pla $\pi: 5x + y + 3z = 4$ i la recta $r: \begin{cases} ax - y = 2 \\ 2y + z = -3 \end{cases}$, estudieu-ne la posició relativa en funció del paràmetre a.
[2 punts]

3. Considereu tots els prismes rectes de base quadrada amb un volum V fixat. Anomeneu x el costat de la base del prisma i y la seva altura.

a) Trobeu l'expressió del volum i de l'àrea total del prisma en funció de les variables x i y.

b) Comproveu que el que té àrea total mínima és en realitat un cub.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

4. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que compleix la igualtat $A^2 - 5A = I_2$, on I_2 és la matriu identitat d'ordre 2.

b) Utilitzeu aquesta igualtat per a calcular la matriu inversa de A.

c) Resoleu l'equació matricial $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, utilitzant la matriu inversa de A.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 0,75 punts per l'apartat *b*; 0,75 per l'apartat *c*]

5. Sigui $f(x) = \dfrac{8x^2}{2x+1}$. Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica d'aquesta funció, l'eix OX i les rectes $x = 0$ i $x = 2$.

[2 punts]

6. Considereu la recta $r: \dfrac{x+4}{-2} = \dfrac{y-1}{-1} = z-1$.

a) Trobeu els dos punts, A i B, de la recta r que estan situats a una distància $d = \sqrt{6}$ del punt $P = (-1, 1, 2)$.

b) Trobeu l'àrea del triangle de vèrtexs A, B i P.

[1 punt per cada apartat]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

SÈRIE 2

1.- Trobeu les asímptotes de la funció $f(x) = \dfrac{3x^3 - 5x - 2}{x^2 - 4x - 5}$ **.**

[2 punts]

Solució

Comencem buscant les asímptotes verticals. Per fer-ho, igualem el denominador de la funció a zero i resolem l'equació resultant.

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \iff x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-5)}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \iff x = 5 \ \text{ o } \ x = -1\,.$$

Això ens indica que les possibles asímptotes verticals són $x = 5$ i $x = -1$. Comprovem si ho són o no.

- $\displaystyle \lim_{x \to 5^-} \frac{3x^3 - 5x - 2}{x^2 - 4x - 5} = \frac{348}{0^-} = -\infty\ ; \quad \lim_{x \to 5^+} \frac{3x^3 - 5x - 2}{x^2 - 4x - 5} = \frac{348}{0^+} = +\infty\,.$
- $\displaystyle \lim_{x \to -1} \frac{3x^3 - 5x - 2}{x^2 - 4x - 5} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(3x^2 - 3x - 2)}{(x+1)(x-5)} = -\frac{2}{3}\,.$

O sigui, la funció té una sola asímptota vertical, $x = 5$.

Com que $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 5x - 2}{x^2 - 4x - 5} = \infty$ (ja que el grau del numerador és superior al grau del denominador), la funció no té asímptotes horitzontals.

Finalment, busquem si la funció té asímptotes obliqües. Recordem que són de la forma $y = mx + n$ on $m = \displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ i $n = \displaystyle \lim_{x \to \infty} (f(x) - m \cdot x)$. En el nostre cas,

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 - 5x} = 3 \quad \text{i} \quad n = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^3 - 5x - 2}{x^2 - 4x - 5} - 3x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{12x^2 + 10x - 2}{x^2 - 4x - 5} = 12\,.$$

L'asímptota oblíqua és $y = 3x + 12$.

2.- Donats el pla $\pi : 5x + y + 3z = 4$ ***i la recta*** $r : \begin{cases} ax - y = 2 \\ 2y + z = -3 \end{cases}$***, estudieu-ne la posició relativa en funció del paràmetre*** a***.***

[2 punts]

Solució

Un pla i una recta a l'espai $\mathbb{R}^3$ poden ser paral·lels, es poden tallar o la recta pot estar continguda al pla. Per començar a esbrinar-ho en el nostre cas, busquem el vector normal del pla, al que anomenarem v_π, i el director de la recta, v_r.

$$v_\pi = (5, 1, 3)\ ; \quad v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -a, 2a)\,.$$

La recta i el pla es tallen si v_π i v_r no són perpendiculars, és a dir, si $v_\pi \cdot v_r \neq 0$.

$$v_\pi \cdot v_r = (5, 1, 3) \cdot (-1, -a, 2a) = -5 - a + 6a = 5a - 5 \neq 0 \iff a \neq 1\,.$$

També podrien comprovar si el vector director de la recta és o no combinació lineal dels vectors generadors del pla. Per trobar aquests vectors podem fer

$$5x + y + 3z = 4 \iff y = 4 - 5x - 3z \iff \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 - 5\lambda - 3\mu \\ z = \mu \end{cases}$$

Podem agafar $v_1 = (1, -5, 0)$ i $v_2 = (0, -3, 1)$. Llavors,

$$(-1, -a, 2a) = \alpha(1, -5, 0) + \beta(0, -3, 1) \iff \alpha = -1\ , \quad -5\alpha - 3\beta = -a \quad \beta = 2a \Longrightarrow a = 1\,.$$

D'una manera o una altra, per $a \neq 1$ la recta i el pla es tallen.

Quan $a = 1$ encara tenim dues possibilitats: paral·lels o la recta continguda al pla. Per acabar d'estudiar-ho, busquem un punt de la recta; per exemple, fent $y = 0$ queda $x = 2$ i $z = -3$, aconseguint el punt $P = (2, 0, -3)$. Mirem si aquest punt pertany o no al pla π,

$$5 \cdot 2 + 0 + 3 \cdot (-3) = 1 \neq 4\,.$$

O sigui, $P \notin \pi$. Per a $a = 1$, la recta i el pla són paral·lels.

Una forma diferent de resoldre el problema és estudiar el caràcter del sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 5x & + & y & + & 3z & = & 4 \\ ax & - & y & & & = & 2 \\ & & 2y & + & z & = & -3 \end{array}\right\}\,.$$

Comprovem quin és el rang de la matriu del sistema, A, calculant el seu determinant (que existeix per ser una matriu quadrada).

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ a & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 6a - (0 + 0 + a) = 5a - 5\,.$$

Si $5a - 5 \neq 0$ (és a dir, si $a \neq 1$) tenim que rang $A =$ rang $(A|b) = 3$, on $(A|b)$ representa la matriu ampliada del sistema. El sistema és compatible determinat. D'aquí, el pla i la recta es tallen.

Si $a = 1$, calculem el rang de les dues matrius alhora,

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & | & 4 \\ 1 & -1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 2 & 1 & | & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 6 & 3 & | & -6 \\ 0 & 2 & 1 & | & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 2 & 1 & | & -2 \\ 0 & 2 & 1 & | & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 2 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}\,.$$

Llavors, rang $A = 2$ i rang $(A|b) = 3$. El sistema és incompatible i, per tant, la recta i el pla són paral·lels.

3.- Considereu tots els prismes rectes de base quadrada amb un volum V fixat. Anomeneu x el costat de la base del prisma i y a la seva altura. Es demana:

(a) ***Trobeu l'expressió del volum i de l'àrea total del prisma en funció de les variables x i y.***

(b) ***Comproveu que el que té àrea total mínima és en realitat un cub.***

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

Solució

Amb les notacions de l'enunciat,

$$V = x^2 y\ ; \quad A = 2x^2 + 4xy\ .$$

Aïllant el valor de la variable y de l'expressió del volum, $y = V/x^2$. Substituint aquest valor a l'expressió que ens dóna l'àrea obtenim

$$A = 2x^2 + 4x\frac{V}{x^2} = 2x^2 + \frac{4V}{x}\ .$$

Per trobar el valor mínim de l'àrea, derivem aquesta expressió respecte de x i la igualem a zero.

$$A' = 4x - \frac{4V}{x^2}\ ; \quad A' = 0 \iff 4x^3 - 4V = 0 \iff x = \sqrt[3]{V}\ .$$

D'aquí $y = \dfrac{V}{x^2} = \dfrac{V}{\sqrt[3]{V^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{V^3}{V^2}} = \sqrt[3]{V}$. En definitiva, $y = x$ i el prisma és un cub.

Per comprovar que es tracta realment d'un mínim, cal trobar la segona derivada de la funció àrea i veure quin signe té per al valor $x = \sqrt[3]{V}$:

$$A'' = 4 + \frac{8V}{x^3} \Longrightarrow A''(\sqrt[3]{V}) > 0 \ .$$

4.- Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$***.***

(a) ***Comproveu que compleix la igualtat*** $A^2 - 5A = I_2$***, on*** I_2 ***és la matriu identitat d'ordre 2.***

(b) ***Utilitzeu aquesta igualtat per a calcular la matriu inversa de*** A***.***

(c) ***Resoleu l'equació matricial*** $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$***, utilitzant la matriu inversa de*** A ***.***

[0,5 punts per l'apartat a; 0,75 punts per l'apartat b; 0,75 punts per l'apartat c]

Solució

(a) En primer lloc, realitzem els càlculs indicats,

$$A^2 - 5A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 35 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 35 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \, ,$$

tal com volíem.

(b) Per calcular la matriu inversa de A, cal treure factor comú al membre esquerra de la igualtat donada, $A^2 - 5A = I_2 \iff A(A - 5I_2) = I_2$. Recordant que la matriu inversa de A és aquella que multiplicada per ella dóna la identitat, podem assegurar que

$$A^{-1} = A - 5I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} .$$

(c) Tenim que

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \iff X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} .$$

5.- Sigui $f(x) = \dfrac{8x^2}{2x+1}$***. Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica d'aquesta funció, l'eix*** OX ***i les rectes*** $x = 0$ ***i*** $x = 2$ ***.***

[2 punts]

Solució

La funció solament val zero quan $x = 0$. Per tant, l'àrea demanada és $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$. La funció a integrar és una funció racional amb el grau del numerador major que el denominador. Per tant, haurem de començar efectuant la divisió. Ens queda

$$\frac{8x^2}{2x+1} = 4x - 2 + \frac{2}{2x+1} \, .$$

Llavors,

$$\int_0^2 \frac{8x^2}{2x+1}dx = \int_0^2 \left(4x - 2 + \frac{2}{2x+1}\right) dx = \Big[2x^2 - 2x + \ln|2x+1|\Big]_0^2$$

$$= [2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + \ln(2 \cdot 2 + 1)] - [0 - 0 + \ln(0 + 1)] = 4 + \ln 5 \simeq 5{,}60944\,.$$

6.- Considereu la recta $r : \dfrac{x+4}{-2} = \dfrac{y-1}{-1} = z - 1$ **.**

(a) **Trobeu els dos punts,** A **i** B**, de la recta** r **que estan situats a una distància** $d = \sqrt{6}$ **del punt** $P = (-1, 1, 2)$**.**

(b) **Trobeu l'àrea del triangle de vèrtexs** A**,** B **i** P**.**

[1 punt per apartat]

Solució

(a) Els punts de la recta r són de la forma $Q = (x, y, z) = (-4 - 2t, 1 - t, 1 + t)$. La distància d'un d'ells al punt P és

$$d(Q, P) = \sqrt{[-1 - (-4 - 2t)]^2 + [1 - (1 - t)]^2 + [2 - (1 + t)]^2} = \sqrt{10 + 10t + 6t^2}\,.$$

Se'ns demana que $d(Q, P) = \sqrt{6}$. Per tant, l'equació a resoldre és $10 + 10t + 6t^2 = 6$, que té per solucions $t = -1$ i $t = -2/3$. El punts buscats són $A = (-2, 2, 0)$ i $B = (-8/3, 5/3, 1/3)$.

(b) L'àrea del triangle amb vèrtex A, B i P es pot trobar utilitzant la fórmula

$$S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}\| = \frac{1}{2}\|(A - P) \times (B - P)\|\,.$$

Com que $A - P = (-2, 2, 0) - (-1, 1, 2) = (-1, 1, -2)$ i $B - P = (-8/3, 5/3, 1/3) - (-1, 1, 2) = (-5/3, 2/3, -5/3)$, tenim que

$$(A - P) \times (B - P) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -2 \\ -5/3 & 2/3 & -5/3 \end{vmatrix} = (-1/3, 5/3, 1)\,.$$

En definitiva,

$$S = \frac{1}{2}\|(-1/3, 5/3, 1)\| = \frac{\sqrt{35}}{}$$

$$\frac{\overline{6}}{3}\ ; \quad d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{RP} \times v_r\|}{\|v_r\|} = \sqrt{\frac{35}{6}}\,,$$

essent $R = (-4, 1, 1)$ un punt de la recta r. Llavors, $S = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{\dfrac{35}{6}} = \dfrac{\sqrt{35}}{6}$.

Encara hi ha una altra forma de resolució: la fórmula de Heró,

$$S = \sqrt{m(m - a)(m - b)(m - c)}\,,$$

on m és el semiperímetre del triangle i a, b i c les longituds dels costats. En el nostre cas,

$$m = \frac{d(A, P) + d(B, P) + d(A, B)}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{6} + \dfrac{\sqrt{6}}{3}}{2} = \frac{7\sqrt{6}}{6}\,.$$

Per tant,

$$S = \sqrt{\frac{7\sqrt{6}}{6}\left(\frac{7\sqrt{6}}{6} - \sqrt{6}\right)\left(\frac{7\sqrt{6}}{6} - \sqrt{6}\right)\left(\frac{7\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)} = \frac{\sqrt{35}}{6}\,.$$

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2010-2011

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Donada la recta $r: \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$:

a) Trobeu-ne un vector director.

b) Calculeu l'equació contínua de la recta paral·lela a r que passa pel punt $P = (1, 0, -1)$.

[1 punt per cada apartat]

2. Si tenim la matriu invertible $\boldsymbol{A}$ i l'equació matricial $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$:

a) Aïlleu la matriu $\boldsymbol{X}$.

b) Trobeu la matriu $\boldsymbol{X}$ quan $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

[1 punt per cada apartat]

3. Definim les funcions $f(x) = a(1 - x^2)$ i $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{a}$, en què $a > 0$.

a) Comproveu que l'àrea del recinte limitat per les gràfiques de les funcions és:

$$\frac{4(1 + a^2)}{3a}$$

b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè aquesta àrea sigui mínima.

[1 punt per cada apartat]

4. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{aligned} x+2y-az&=-3\\ 2x+(a-5)y+z&=4a+2\\ 4x+(a-1)y-3z&=4 \end{aligned}\right\}$$

a) Calculeu els valors del paràmetre a perquè el sistema no sigui compatible determinat.

b) Hi ha algun valor de a per al qual $x=1$, $y=-3$, $z=-1$ sigui l'única solució del sistema?

[1 punt per cada apartat]

5. Siguin $r_1: x-2=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{1-z}{2}$ i $r_2: \dfrac{x+3}{2}=y+1=\dfrac{z+1}{2}$.

a) Comproveu que r_1 i r_2 són perpendiculars.

b) Comproveu que es tallen mitjançant la determinació del punt de tall.

[1 punt per cada apartat]

6. Sigui $f(x)=x^2\cdot e^{-ax}$ quan $a\neq 0$.

a) Calculeu el valor de a perquè aquesta funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=2$.

b) Quan $a=2$, classifiqueu-ne els extrems relatius.

[1 punt per cada apartat]

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2010-2011

Matemàtiques

Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Calculeu l'àrea del recinte limitat per les corbes d'equació $f(x) = x^2 - x + 2$ i $g(x) = 5 - 3x$.

[2 punts]

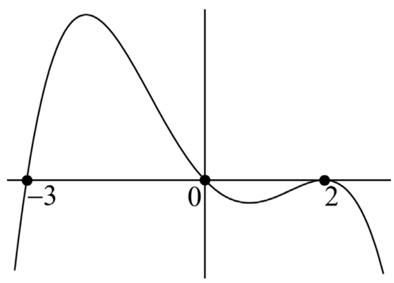
2. Donat el pla $\pi: 2x + y - z = 5$:

a) Calculeu l'equació del pla paral·lel al pla π que passa pel punt $P = (1, 0, -1)$.

b) Determineu també la distància entre el punt P i el pla π.

[1 punt per cada apartat]

3. La gràfica corresponent a la derivada d'una funció $f(x)$ és la següent:



a) Expliqueu raonadament quins valors de x corresponen a màxims o a mínims relatius de $f(x)$.

b) Determineu els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)$.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

4. Analitzeu, segons els valors del paràmetre k, el caràcter (és a dir, si és compatible o no i si és determinat o no) del sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} 2x + y - z = k - 4 \\ (k-6)y + 3z = 0 \\ (k+1)x + 2y = 3 \end{cases}$$

[2 punts]

5. Calculeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax+By+Cz+D=0$) dels plans que contenen la recta $r: \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ i que formen un angle de 45° amb el pla $z=0$.

[2 punts]

6. Dins d'un triangle rectangle, de catets 3 i 4 cm, hi ha un rectangle. Dos costats del rectangle estan situats en els catets del triangle i un dels vèrtexs del rectangle és a la hipotenusa del triangle.

a) Feu un esbós de la situació descrita.

b) Si x és la longitud del costat del rectangle que està situat en el catet petit i y és l'altre costat del rectangle, comproveu que es compleix que $4x+3y=12$.

c) Determineu les dimensions del rectangle perquè l'àrea sigui màxima.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*; 1 punt per l'apartat *c*]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

SÈRIE 1

1.- Donada la recta r: $\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$**:**

(a) Trobeu-ne un vector director.

(b) Calculeu l'equació contínua de la recta que és paral·lela a r ***i que passa pel punt*** $P = (1, 0, -1)$.

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) El vector director de la recta r es pot trobar de diferents maneres. Potser la més senzilla és efectuar el producte vectorial dels vectors normals dels plans que la defineixen. És a dir, si

$$v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i + j + k = (-1, 1, 1)\,,$$

v_r és vector director de la recta r.

Altres formes de buscar el vector director:

- Resolent el sistema de dues equacions amb tres incògnites que defineix la recta, arribem, per exemple, a que $y = -5 - x$ i $z = -1 - x$. Això ens porta a les equacions paramètriques de la recta,
$$x = \lambda\,; \quad y = -5 - \lambda\,; \quad z = -1 - \lambda\,.$$
Així, el vector director és $v_r = (1, -1, -1)$, els coeficients del paràmetre λ.
- Les igualtats $y = -5 - x$ i $z = -1 - x$ es poden transformar en $x = -1 - z = -5 - y$, d'on l'equació contínua de r és
$$\frac{x - 0}{1} = \frac{y + 5}{-1} = \frac{z + 1}{-1}\,.$$
El vector director és $v_r = (1, -1, -1)\,$.
- El vector director de r ha de ser ortogonal als vectors normals dels plans que determinen la recta. Busquem, doncs, (a, b, c) tal que $(a, b, c) \cdot (2, -1, 3) = 0$ i $(a, b, c) \cdot (1, 0, 1) = 0$. D'aquí, $2a - b + 3c = 0$ i $a + c = 0$. La solució d'aquest sistema és, per exemple, $b = -a$, $c = -a$. Per tant, el vector director buscat és de la forma $v_r = (a, -a, -a)$. Qualsevol valor no nul de a ens dóna un vector director.

(b) L'equació contínua de la recta buscada és $\dfrac{x - 1}{-1} = \dfrac{y - 0}{1} = \dfrac{z + 1}{1}\,.$

2.- Si tenim la matriu invertible A **i l'equació matricial** $X \cdot A + B = C$**:**

(a) Aïlleu la matriu X.

(b) Trobeu la matriu X ***quan***

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{\textbf{i}} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Tenim que $X \cdot A + B = C \Longrightarrow X \cdot A = C - B \Longrightarrow X = (C - B) \cdot A^{-1}$.

(b) Com que

$$C - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

ens queda

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Evidentment, també es pot resoldre aquest apartat posant $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i plantejant el sistema

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.- Definim les funcions $f(x) = a(1 - x^2)$ i $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{a}$, en què $a > 0$.

(a) Comproveu que l'àrea del recinte limitat per les gràfiques de les funcions és

$$\frac{4(1 + a^2)}{3a}.$$

(b) Busqueu el valor del paràmetre a perquè aquesta àrea sigui mínima.

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Cal buscar els punts d'intersecció de les dues gràfiques. El valor de l'abscissa en un punt d'intersecció és la solució de l'equació $f(x) = g(x)$; és a dir,

$$a(1 - x^2) = \frac{x^2 - 1}{a}.$$

D'aquí ens queda $(a^2 + 1)(1 - x^2) = 0$. Com que $a^2 + 1$ no és zero per cap valor del paràmetre a, tenim $x = \pm 1$.

Llavors, tenint en compte que en l'interval $[-1, 1]$ es compleix que $f(x) > g(x)$ ja que

$$f(0) = a > g(0) = -\frac{1}{a}, \quad \text{per ser} \quad a > 0,$$

és clar que l'àrea buscada és

$$A = \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))\,, dx = \int_{-1}^{1} \left(a(1 - x^2) - \frac{x^2 - 1}{a} \right) dx = \int_{-1}^{1} \frac{(a^2 + 1)(1 - x^2)}{a}\, dx$$
$$= \frac{(a^2 + 1)}{a} \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{4(1 + a^2)}{3a}.$$

(b) Definim la funció $h(a) = \dfrac{4(1 + a^2)}{3a}$. Perquè el seu valor sigui mínim cal que la primera derivada sigui nul·la. Com que

$$Dh(a) = \frac{4(a^2 - 1)}{3a^2},$$

els valors "candidats" a donar un màxim o un mínim són $a = 1$ i $a = -1$. A l'enunciat ens diuen que $a > 0$. Per tant, l'únic valor possible és $a = 1$. A més a més, és fàcil veure que

$$D^2h(a) = \frac{8}{3a^3} \quad \text{i, per tant,} \quad D^2h(1) = \frac{8}{3} > 0.$$

És a dir, es tracta d'un mínim, tal com es volia.

Si es vol, l'estudi de si en $a = 1$ hi ha realment un mínim es pot realitzar buscant els signes de la primera derivada abans i després d'aquest valor:

$$Dh(0{,}5) = \frac{4(0{,}5^2 - 1)}{3(0{,}5)^2} = -4 < 0\,; \quad Dh(1{,}5) \simeq 0{,}74 > 0\,.$$

Com que la funció derivada és negativa a l'esquerra (funció decreixent) i positiva a la dreta (funció creixent), en $a = 1$ hi ha un mínim.

4.- Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x &+& 2y &-& az &=& -3 \\ 2x &+& (a-5)y &+& z &=& 4a+2 \\ 4x &+& (a-1)y &-& 3z &=& 4 \end{array}\right\}$$

(a) Calculeu els valors del paràmetre a perquè el sistema no sigui compatible determinat.

(b) Hi ha algun valor de a per al qual $x = 1$, $y = -3$, $z = -1$, sigui l'única solució del sistema?

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Com que la matriu del sistema és quadrada d'ordre 3, els valors del paràmetre que fan que el sistema no sigui compatible determinat són aquells que anul·len el seu determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ 2 & a-5 & 1 \\ 4 & a-1 & -3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ 0 & a-9 & 2a+1 \\ 0 & a-9 & 4a-3 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} a-9 & 2a+1 \\ a-9 & 4a-3 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} a-9 & 2a+1 \\ 0 & 2a-4 \end{vmatrix} = (a-9)(2a-4)\,.$$

Les operacions elementals fetes a cada pas han estat:

(1) $F_2 - 2F_1$; $F_3 - 4F_1$. (2) Desenvolupament per la primera columna. (3) $F_2 - F_1$.

Com que $\det A = 0$ si i sol si $a = 2$ o $a = 9$, aquest són els valors per als quals el sistema no és compatible determinat.

Aquest estudi es pot fer també escalonant la matriu ampliada (o inclús sense ampliar) del sistema,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a & | & -3 \\ 2 & a-5 & 1 & | & 4a+2 \\ 4 & a-1 & -3 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a & | & -3 \\ 0 & a-9 & 2a+1 & | & 4a+8 \\ 0 & a-9 & 4a-3 & | & 16 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a & | & -3 \\ 0 & a-9 & 2a+1 & | & 4a+8 \\ 0 & 0 & 2a-4 & | & 8-4a \end{pmatrix}.$$

Els valors que fan que $\operatorname{rang} A \neq 3$ són, evidentment, $a = 2$ i $a = 9$.

(b) Quan $x = 1$, $y = -3$ i $z = -1$, el sistema es transforma en

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 1 &-& 6 &+& a &=& -3 \\ 2 &-& 3(a-5) &-& 1 &=& 4a+2 \\ 4 &-& 3(a-1) &+& 3 &=& 4 \end{array}\right\}.$$

Les tres equacions donen el mateix valor per al paràmetre: $a = 2$. És molt important comprovar que a les tres equacions surt el mateix valor de a; si no es comprova, l'apartat està mal resolt.

Per tant, quan $a = 2$, els valors proposats formen una solució del sistema. Ara bé, a l'apartat anterior hem vist que per $a = 2$ el sistema no és compatible determinat. Això vol dir que per a $a = 2$ el sistema és compatible indeterminat.

En definitiva, no existeix cap valor del paràmetre a per al qual els valors proposats siguin solució única.

5.- Siguin $r_1\colon x - 2 = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{1-z}{2}$ i $r_2\colon \dfrac{x+3}{2} = y + 1 = \dfrac{z+1}{2}$.

(a) Comproveu que r_1 i r_2 són perpendiculars.

(b) Comproveu que es tallen mitjançant la determinació del punt de tall.

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Posem l'equació de la recta r_1 en forma contínua (la recta r_2 ja està donada en aquesta forma):

$$r_1\colon \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{-2}\,.$$

Els vectors directors respectius són $v_1 = (1, 2, -2)$ i $v_2 = (2, 1, 2)$. Com que el seu producte escalar és

$$(1, 2, -2) \cdot (2, 1, 2) = 2 + 2 - 4 = 0\,,$$

podem assegurar que els vectors són ortogonals i, per tant, les rectes r_1 i r_2 són perpendiculars.

(b) Les equacions de les rectes donen lloc a un sistema de quatre equacions lineals amb tres incògnites,

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & & & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 4 \\ x & - & 2y & & & = & -1 \\ x & & & - & z & = & -2 \end{array}\right\}\,.$$

De la primera equació, $y = 2x - 1$; substituint aquest valor a les altres tres equacions obtenim

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x & + & z & = & 5 \\ -3x & & & = & -3 \\ x & - & z & = & -2 \end{array}\right\}$$

La segona equació d'aquest sistema reduït ens porta a què $x = 1$. Llavors, les altres dues equacions són equivalents, amb solució $z = 3$. Així, les rectes es tallen i el punt de tall és el $(1, 1, 3)$.

També es pot comprovar que les rectes es tallen trobant el rang de les matrius $(v_r\ v_s)$ i $(v_r\ v_s\ \overrightarrow{PQ})$, on $P = (2, 3, 1)$ és un punt de la recta r_1 i $Q = (-3, -1, -1)$ és un punt de la recta r_2. Per tal que es tallin, cal que el rang de les dues matrius sigui 2. Aquest mètode no és el que es demana a l'enunciat i, a més a més, no ens dóna el punt de tall, que encara hauríem de calcular.

6.- Sigui $f(x) = x^2 e^{-ax}$, quan $a \neq 0$.

(a) Calculeu el valor de a perquè aquesta funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = 2$.

(b) Quan $a = 2$, classifiqueu-ne els extrems relatius.

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) La condició necessària perquè una funció tingui un extrem relatiu en un punt és que la primera derivada en ell valgui zero. Busquem la primera derivada de la funció $f(x)$.

$$Df(x) = 2xe^{-ax} + x^2(-ae^{-ax}) = e^{-ax}(2x - ax^2)\,.$$

Llavors, $Df(x) = 0$ si i sol si $x = 0$ o $x = 2/a$ ja que la funció exponencial és sempre diferent de zero. Si volem que la funció tingui un extrem relatiu en $x = 2$, cal que $a = 1$.

NOTA: De fet és necessari encara comprovar que $D^2 f(2) \neq 0$. Com que $D^2 f(x) = e^{-ax}(2-4ax+a^2x^2)$, és clar que per $a = 1$ el valor de $D^2 f(2)$ no és zero.

(b) Podem aprofitar la feina feta a l'apartat anterior: quan $a = 2$, tenim que la funció pot tenir extrems en $x = 0$ i en $x = 2/2 = 1$.

D'altra banda, quan $a = 2$, $D^2 f(x) = e^{-2x}(2 - 8x + 4x^2)$. Com que $D^2 f(0) = 2 > 0$, en el punt d'abscissa $x = 0$ hi ha un mínim; així mateix la desigualtat $D^2 f(1) = -2e^{-2} < 0$ ens diu que en el punt d'abscissa $x = 1$ hi ha un màxim.

Igual que a la qüestió 3, la classificació dels extrems es pot realitzar estudiant el signe de la derivada abans i després dels punts trobats.

SÈRIE 4

1.- Calculeu l'àrea del recinte limitat per les corbes d'equació $f(x) = x^2 - x + 2$ ***i*** $g(x) = 5 - 3x$ **.**

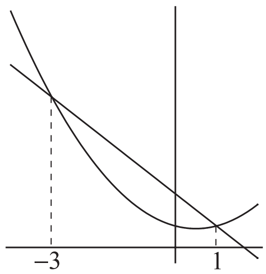
[2 punts]

Solució

Cal començar buscant les abscisses dels punts d'intersecció d'ambdues corbes. Per fer-ho, plantejem l'equació $f(x) = g(x)$,

$$f(x) = g(x) \iff x^2 - x + 2 = 5 - 3x \iff x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x = 1 \ \text{ o } \ x = -3\,.$$

La gràfica de les dues funcions és



Com que $f(0) = 2$ i $g(0) = 5$, podem assegurar que, en l'interval que ens interessa, $g(x) \geq f(x)$. L'àrea demanada és

$$\int_{-3}^{1} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-3}^{1} (3 - 2x - x^2)\,dx = \left[3x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{1} = \left(3 - 1 - \frac{1}{3}\right) - (-9 - 9 + 9) = \frac{32}{3}\,.$$

2.- Donat el pla $\pi\colon 2x + y - z = 5$***:***

(a) Calculeu l'equació del pla paral·lel al pla π ***que passa pel punt*** $P = (1, 0, -1)$ **.**

(b) Determineu també la distància entre el punt P ***i el pla*** π***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Hi ha dues maneres de trobar el pla demanat. La primera consisteix en escriure la forma general dels plans paral·lels a π, $\pi'\colon 2x + y - z + D = 0$, i trobar el valor del paràmetre D perquè passi pel punt P,

$$P \in \pi' \iff 2 \cdot 1 + 0 - (-1) + D = 0 \iff D = -3\,.$$

El pla buscat és $2x + y - z - 3 = 0$.

La segona forma consisteix en utilitzar la fórmula del pla que passa per un punt amb un vector normal conegut.

$$2(x - 1) + (y - 0) - (z + 1) = 0 \iff 2x + y - z - 3 = 0\,.$$

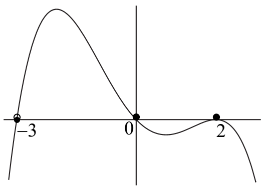
(b) La distància d'un punt $P = (x_0, y_0, z_0)$ a un pla $\pi\colon Ax + By + Cz + D = 0$ es pot calcular per la fórmula

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,.$$

En el nostre cas,

$$d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 0 - (-1) - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}\,.$$

3.- La gràfica corresponent a la derivada d'una funció $f(x)$ és la següent:



(a) Expliqueu raonadament quins valors de x corresponen a màxims o a mínims relatius de $f(x)$.

(b) Determineu els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)$.

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Perquè la funció $f(x)$ tingui un extrem relatiu en un punt, és necessari que la seva derivada valgui zero en aquest punt. D'acord amb la gràfica, això passa per $x = -3$, $x = 0$ i $x = 2$.

Abans del punt $x = -3$, la funció derivada és negativa i després és positiva; això vol dir que en aquest punt hi tenim un mínim relatiu.

Amb un raonament paral·lel podem comprovar que en $x = 0$ la funció $f(x)$ té un màxim relatiu i en el punt $x = 2$ no hi ha ni màxim ni mínim (la derivada és negativa als dos costats); de fet, en aquest punt hi ha un punt d'inflexió.

(b) D'acord amb els signes de la derivada,

- La funció $f(x)$ és creixent a l'interval $(-3, 0)$.
- La funció $f(x)$ és decreixent a $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$.

4.- Analitzeu, segons els valors del paràmetre k, el caràcter (és a dir, si és compatible o no i si és determinat o no) del sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{c} 2x + y - z = k - 4 \\ (k-6)y + 3z = 0 \\ (k+1)x + 2y = 3 \end{array}\right\}$$

[2 punts]

Solució

La matriu del sistema és quadrada. Busquem el seu determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & k-6 & 3 \\ k+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(k+1) - [-(k+1)(k-6) + 12] = k^2 - 2k - 15\,.$$

Busquem els valors de k perquè aquest determinant valgui zero,

$$k^2 - 2k - 15 = 0 \Longrightarrow k = -3 \quad \text{o} \quad k = 5\,.$$

També es pot realitzar aquest estudi escalonant la matriu, ampliada o no, del sistema,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & k-4 \\ 0 & k-6 & 3 & 0 \\ k+1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & k-4 \\ 0 & k-6 & 3 & 0 \\ 0 & 3-k & k+1 & 10+3k-k^2 \end{array}\right).$$

A partir d'aquí, l'escalonament es fa molt feixuc. Per això la millor forma d'acabar és veient per a quins punts les files segona i tercera de la matriu sense ampliar són proporcionals.

$$\frac{k-6}{3-k} = \frac{3}{k+1} \iff k=-3 \;\text{ o }\; k=5\,.$$

D'una o altra manera, tenim:

- Si $k \neq -3$ i $k \neq 5$, el rang de la matriu del sistema és 3; el de l'ampliada també és tres. Així, en aquest cas, el sistema és compatible determinat.
- Quan $k=-3$, escalonem la matriu ampliada del sistema,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right).$$

  Clarament, rang $A = 2$ i rang $(A|b) = 3$; el sistema és incompatible.

- Finalment, pel valor $k=5$,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

  Ara, rang $A = \text{rang}\,(A|b) = 2 < 3$. El sistema és compatible indeterminat.

Observeu que si s'ha realitzat l'escalonament de la matriu, l'estudi dels casos $k=-3$ i $k=5$ se simplifiquen, substituint el valor de la k a la matriu que ja està mig escalonada.

5.- Trobeu l'equació general (o sigui de la forma $Ax+By+Cz+D=0$) dels plans que contenen la recta $r: \begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases}$ i formen un angle de 45^o amb el pla $z=0$.

[2 punts]

Solució 1

Qualsevol punt de la forma $P=(a,2,1)$ pertany a la recta r. Per simplicitat, agafarem $P=(0,2,1)$.
El vector director de la recta és $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,0)$. El vector normal del pla $z=0$ és $v_z=(0,0,1)$.

Si el pla buscat és $\pi' : Ax+By+Cz+D=0$, tenim que el seu vector normal és $v_{\pi'} = (A,B,C)$. Com que conté la recta r, sabem que $v_{\pi'}$ és perpendicular a v_r; per formar 45^o amb el pla $z=0$ cal que $\cos(\widehat{v_{\pi'},v_z}) = \sqrt{2}/2$. És a dir,

$$v_{\pi'}\cdot v_r = (A,B,C)\cdot(1,0,0) = A = 0\;; \qquad \frac{v_{\pi'}\cdot v_r}{\|v_{\pi'}\|\cdot\|v_z\|} = \frac{(0,B,C)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{B^2+C^2}\cdot 1} = \frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La solució és $A=0$, $B^2=C^2$ ($\iff$ $C=B$ o $C=-B$). Podem posar, sense perdre generalitat, $B=1$. Així, tenim dos plans que compleixen les condicions, $y+z=D_1$ i $y-z=D_2$. Fent que passin pel punt P (condició perquè continguin la recta r), ens queda

$$y+z=3\,, \qquad y-z=1\,.$$

Solució 2

La qüestió es pot resoldre també utilitzant l'equació del feix de plans que passa per la recta r,

$$(y-2)+\lambda(z-1)=0\,.$$

El vector director d'un pla qualsevol d'aquest feix és $v_\pi = (0, 1, \lambda)$. Llavors, s'ha de complir que

$$\frac{(0,1,\lambda)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{1+\lambda^2}\cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

Aquesta equació ens porta a que $\lambda = \pm 1$. Llavors, els plans buscats són:

- Per $\lambda = 1$, $(y-2)+(z-1)=0$; és a dir, $y+z=3$.
- Per $\lambda = -1$, $(y-2)-(z-1)=0$; per tant, $y-z=1$.

6.- Dins d'un triangle rectangle, de catets 3 i 4 cm, hi ha un rectangle. Dos costats del rectangle estan situats en els catets del triangle i un dels vèrtex del rectangle és a la hipotenusa del triangle.

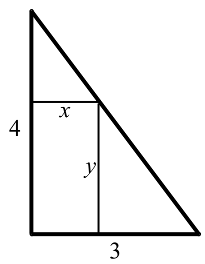
(a) Feu un esbós de la situació descrita.

(b) Si x és la longitud del costat del rectangle que està situat en el catet petit i y és l'altre costat del rectangle, comproveu que es compleix que $4x+3y=12$.

(c) Determineu les dimensions del rectangle perquè la seva àrea sigui màxima.

[2 punts]

(a) La gràfica de la situació és



(b) Per semblança de triangles, $\dfrac{4}{3} = \dfrac{4-y}{x}$. És a dir, $4x+3y=12$. Hi ha altres relacions de semblança que ens porten a la mateixa relació; per exemple, $\dfrac{4}{3} = \dfrac{y}{3-x}$.

També es pot arribar a la relació entre x i y utilitzant geometria en el pla. En efecte, podem considerar com a eixos de coordenades les rectes que contenen els catets. Llavors, la recta que conté la hipotenusa passa pels punts $(3,0)$ i $(0,4)$; per tant, la seva equació és

$$\frac{x-3}{0-3} = \frac{y-0}{4-0}\,,\quad \text{és a dir,}\quad 4x+3y=12\,.$$

Com que el punt (x,y) pertany a aquesta recta, ha de complir la seva equació.

(c) De la relació trobada a l'apartat anterior se'n dedueix, per exemple, que $y = \dfrac{12-4x}{3}$. Llavors, l'àrea del rectangle és

$$A = x\cdot y = x\cdot\frac{12-4x}{3} = \frac{12x-4x^2}{3}\,.$$

Per tenir un valor màxim, cal que la primera derivada sigui nul·la.

$$A' = \frac{12-8x}{3}\,;\quad A'=0 \iff 12-8x=0 \iff x=\frac{3}{2}\,.$$

Llavors, $y = \dfrac{12-4(3/2)}{3} = 2$. Les dimensions del rectangle buscat són 3/2 de base i 2 d'altura.

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2010-2011

Matemàtiques

Sèrie 2

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Donada la matriu $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{pmatrix}$:

a) Calculeu els valors del paràmetre k per als quals la matriu $\boldsymbol{M}$ no és invertible.
b) Per a $k=0$, calculeu $\boldsymbol{M}^{-1}$.
[1 punt per cada apartat]

2. Donada la recta $\left.\begin{aligned} 2x-y+3z=2 \\ x+z+1=0 \end{aligned}\right\}$, calculeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax+By+Cz+D=0$) del pla perpendicular a la recta que passa pel punt $P=(1, 0, -1)$.
[2 punts]

3. Donada la funció $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$:
a) Determineu la relació que han de complir els paràmetres a, b i c perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=-1$.
b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè hi hagi un punt d'inflexió de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=0$.
c) Determineu la relació entre els paràmetres a, b i c sabent que la gràfica de $f(x)$ talla l'eix OX en el punt d'abscissa $x=-2$.
d) Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c perquè es compleixin les tres propietats anteriors alhora.
[0,5 punts per cada apartat]

4. Sigui la matriu $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu $\boldsymbol{A}^2$ i $\boldsymbol{A}^3$.
b) Deduïu el valor de $\boldsymbol{A}^{101}$.
NOTA: Treballeu amb radicals; no utilitzeu la representació decimal dels elements de la matriu.
[1 punt per cada apartat]

5. Considereu la recta $r:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=z-a$ i el pla $\pi: 2x+y-5z=5$.

a) Estudieu la posició relativa de la recta r i el pla π en funció del paràmetre a.
b) Quan $a=3$, calculeu la distància de la recta r al pla π.
[1 punt per cada apartat]

6. Sigui $f(a)=\int_0^{1/a}(a^2+x^2)dx$ per $a>0$.

a) Comproveu que $f(a)=\dfrac{1}{3a^3}+a$.

b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè la funció $f(a)$ tingui un mínim relatiu.
[1 punt per cada apartat]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

SÈRIE 2

1.- Donada la matriu $M = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{pmatrix}$***,***

(a) Calculeu els valors del paràmetre k ***per als quals la matriu*** M ***no és invertible.***

(b) Per a $k = 0$***, calculeu*** M^{-1}***.***

[1 punt per apartat]

Solució

(a) Sabem que una matriu és invertible si i sol si el seu determinant és no nul. Busquem, doncs, el determinant de la matriu M,

$$\det M = \begin{vmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & 0 & -k-1 \end{vmatrix} = (k+1)(k-2)(-k-1) = -(k+1)^2(k-2)\,.$$

Aquest determinant val zero quan $k = -1$ o $k = 2$; aquests són els valors per als que la matriu no és invertible.

(b) Per $k = 0$ la matriu és $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ i la seva inversa es pot calcular utilitzant el mètode de Gauss-Jordan,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

També es pot calcular utilitzant la matriu complementària (matriu adjunta transposta).

La matriu inversa és

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.- Donada la recta $\left.\begin{array}{r} 2x - y + 3x = 2 \\ x + z + 1 = 0 \end{array}\right\}$***, calculeu l'equació general (és a dir, de la forma*** $Ax + By + Cz + D = 0$***) del pla perpendicular a la recta que passa pel punt*** $P = (1, 0, -1)$ ***.***

[2 punts]

Solució

Perquè el pla buscat i la recta donada siguin perpendiculars, el vector normal del pla i el director de la recta han de ser paral·lels; el més senzill és agafar-los iguals. Busquem, doncs, el vector director de la recta,

$$v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i + j + k = (-1, 1, 1)\,.$$

L'equació del pla π amb vector normal $v_\pi = (A, B, C)$, passant pel punt $P = (x_0, y_0, z_0)$ és

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0\,.$$

En el nostre cas, ens queda

$$(-1)(x-1)+1(y-0)+1(z+1)=0, \quad \text{és a dir,} \quad -x+y+z+2=0\,.$$

3.- Donada la funció $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$:

(a) Determineu la relació que han de complir els paràmetres a, b i c perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=-1$.

(b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè hi hagi un punt d'inflexió de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=0$.

(c) Determineu la relació entre els paràmetres a, b i c sabent que la gràfica de $f(x)$ talla l'eix OX en el punt d'abscissa $x=-2$.

(d) Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c perquè es compleixin les tres propietats anteriors alhora.

[0,5 punts per cada apartat]

Solució

(a) Perquè hi pugui haver un extrem relatiu de la funció en $x=-1$, cal que $f'(-1)=0$. Com que $f'(x)=3x^2+2ax+b$, la relació buscada és $3-2a+b=0$.

(b) En un punt d'inflexió la segona derivada ha de ser zero. Tenim que $f''(x)=6x+2a$; per tant, $f''(0)=2a=0$. Llavors, $a=0$.

(c) És clar que la condició és $f(-2)=-8+4a-2b+c=0$.

(d) Cal resoldre el sistema $3-2a+b=0$, $a=0$, $-8+4a-2b+c=0$. La solució és $a=0$, $b=-3$ i $c=2$.

4.- Sigui la matriu $A=\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **.**

(a) Calculeu A^2 i A^3.

(b) Deduïu el valor de A^{101}.

NOTA***: treballeu amb radicals; no utilitzeu la representació decimal dels elements de la matriu.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Tenim que

$$A^2=\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3\,.$$

(b) Com que $101=33\cdot 3+2$, ens queda

$$A^{101}=A^{33\cdot 3+2}=\left(A^3\right)^{33}\cdot A^2=(I_3)^{33}\cdot A^2=A^2=\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.- Considereu la recta $r : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = z - a$ **i el pla** $\pi : 2x + y - 5z = 5$ **.**

(a) Estudieu la posició relativa de la recta r **i el pla** π **en funció del paràmetre** a**.**

(b) Quan $a = 3$**, trobeu la distància de la recta** r **al pla** π**.**

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) El vector director de la recta és $v_r = (3, -1, 1)$; el punt $P = (1, -2, a)$ pertany a la recta r. Per altra banda, el vector normal del pla π és $v_\pi = (2, 1, -5)$. Comprovem si v_r i v_π són o no ortogonals,

$$v_r \cdot v_\pi = (3, -1, 1) \cdot (2, 1, -5) = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-5) = 0 \ .$$

Efectivament, ho són. Per tant, la recta és paral·lela al pla o la recta està continguda en el pla. Per acabar-ho de decidir, mirem si el punt P pertany o no al pla.

$$P \in \pi \iff 2 \cdot 1 + (-2) - 5a = 5 \iff a = -1 \ .$$

En definitiva,

- Si $a = -1$, la recta està continguda al pla.
- Si $a \neq -1$, la recta i el pla són paral·lels.

(b) Per trobar la distància entre una recta i un pla paral·lels, n'hi ha prou en calcular la distància d'un punt qualsevol de la recta al pla. Així,

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + (-2) - 5 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-5)^2}} = \frac{20}{\sqrt{30}} \ .$$

6.- Sigui $f(a) = \displaystyle\int_0^{1/a} (a^2 + x^2)dx$ **per** $a > 0$ **.**

(a) Comproveu que $f(a) = \dfrac{1}{3a^3} + a$ **.**

(b) Calculeu el valor del paràmetre a **perquè la funció** $f(a)$ **tingui un mínim relatiu.**

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) $f(a) = \displaystyle\int_0^{1/a} (a^2 + x^2)dx = \left[a^2 x + \frac{x^3}{3}\right]_0^{1/a} = a^2 \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{3a^3} = a + \frac{1}{3a^3} \, .$

(b) Perquè la funció $f(a)$ tingui un mínim, és necessari que $f'(a) = 0$. Així,

$$f'(a) = 1 - \frac{1}{a^4} = 0 \Longrightarrow a^4 = 1 \Longrightarrow a = \pm 1 \, .$$

La condició $a > 0$ fa que ens quedem solament amb $a = 1$.

La derivada segona de la funció és $f''(a) = 4/a^5$. Llavors, $f''(1) > 0$, la qual cosa indica que per a $a = 1$ hi ha un mínim.

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2011-2012

Matemàtiques

Sèrie 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Digueu per a quin valor del paràmetre m els plans

$$\pi_1 : x - y + mz = 1,\ \pi_2 : x - y + z = m \text{ i } \pi_3 : my + 2z = 3$$

tenen com a intersecció una recta.

[2 punts]

2. Donades la recta $y = 3x + b$ i la paràbola $y = x^2$,

a) Calculeu l'abscissa del punt on la recta tangent a la paràbola és paral·lela a la recta donada.

b) Calculeu el valor del paràmetre b perquè la recta sigui tangent a la paràbola.

[1 punt per apartat]

3. Donats el pla $\pi : x - y + 2z - 5 = 0$ i la recta $r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}$,

a) Calculeu el punt d'intersecció entre el pla i la recta.

b) Trobeu l'equació contínua de la recta s continguda en el pla π, que és perpendicular a la recta r i talla la recta r.

[1 punt per apartat]

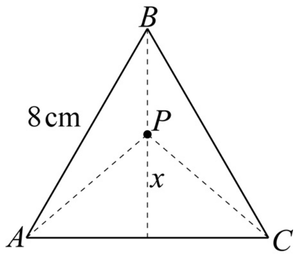
4. Donades les matrius $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

a) Comproveu que es compleix la igualtat $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\,(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$.

b) És certa aquesta igualtat per a qualsevol parell de matrius quadrades $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ del mateix ordre? Responeu raonadament utilitzant les propietats generals de les operacions entre matrius, sense utilitzar matrius $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ concretes.

[1 punt per apartat]

5. Un triangle equilàter de vèrtexs A, B i C té els costats de 8 cm. Situem un punt P sobre una de les altures del triangle, a una distància x de la base corresponent.



a) Calculeu l'altura del triangle de vèrtexs A, B i C.

b) Indiqueu la distància del punt P a cadascun dels vèrtexs (en funció de x).

c) Determineu el valor de x perquè la suma dels quadrats de les distàncies del punt P a cadascun dels tres vèrtexs sigui mínima.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*; 1 punt per l'apartat *c*]

6. Donats els punts $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 2, 0)$, $R = (0, 0, 3)$ i $S = (1, 2, 3)$,

a) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax+By+Cz+D=0$) del pla que conté els punts P, Q i R.

b) Comproveu si els quatre punts són coplanaris (és a dir, si els quatre estan continguts en un mateix pla).

[1 punt per apartat]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2011-2012

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

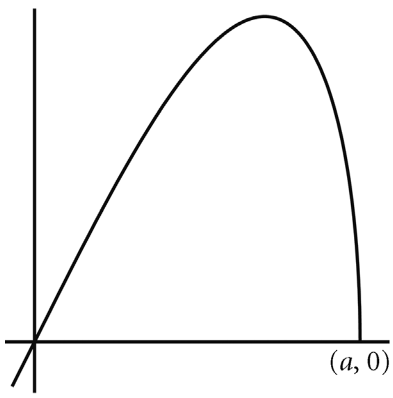
1. Donats els plans $\pi_1: 3x+y-2z+15=0$ i $\pi_2: x+y+2z-103=0$,

***a*)** Comproveu que són perpendiculars.

***b*)** Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax+By+Cz+D=0$) del pla perpendicular a π_1 i π_2, que passa pel punt $P=(1, 3, 2)$.

[1 punt per cada apartat]

2. La gràfica de la funció $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$ és la següent:



***a*)** Trobeu el punt de tall, $(a, 0)$, de la funció amb la part positiva de l'eix OX.

***b*)** Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de $f(x)$ i l'eix OX en el primer quadrant.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

3. Sigui $\boldsymbol{A}$ una matriu quadrada d'ordre n de manera que $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$, en què $\boldsymbol{O}$ és la matriu nul·la (la formada completament per zeros).

***a*)** Comproveu que $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n)^2=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n$.

***b*)** Comproveu que les matrius $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n$ són l'una inversa de l'altra.

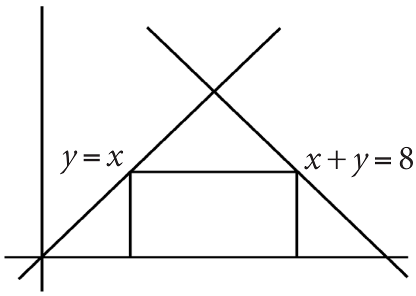
[1 punt per cada apartat]

4. Un rectangle és inscrit en el triangle que té els costats en les rectes d'equacions

$$y=x,\quad x+y=8,\quad y=0,$$

i té un costat sobre la recta $y=0$. Trobeu-ne els vèrtexs perquè la superfície sigui màxima.

[2 punts]



5. Contesteu les preguntes següents:

***a*)** Expliqueu raonadament si una matriu d'ordre 3 i una matriu d'ordre 2 poden tenir el mateix determinant.

***b*)** Considereu les matrius següents:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & p\\ 1 & 1-p & 2\\ 1 & 2 & p\end{pmatrix}\text{ i }\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & p\\ 0 & p & 4\end{pmatrix}$$

Calculeu, si és possible, el valor del paràmetre p perquè $\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{B}$.

[1 punt per cada apartat]

6. Siguin $\pi\colon x-3y+2z=1$ i $r\colon\begin{cases}3x+y=1\\ 2x-y+mz=1\end{cases}$. Estudieu-ne la posició relativa segons el valor del paràmetre m.

[2 punts]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

SÈRIE 3

1.- Digueu per a quin valor del paràmetre m els plans

$$\pi_1 : x - y + mz = 1 \ , \qquad \pi_2 : x - y + z = m \ , \qquad \pi_3 : my + 2z = 3 \ ,$$

tenen com a intersecció una recta.

[2 punts]

Solució

Els tres plans es tallen en una única recta si i solament si el sistema

$$\left.\begin{array}{c} x - y + mz = 1 \\ x - y + z = m \\ my + 2z = 3 \end{array}\right\}$$

és compatible indeterminat amb un grau de llibertat. Calculem el determinant de la matriu de coeficients d’aquest sistema,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} = m^2 - m \ .$$

Aquest determinant val zero si $m = 0$ o $m = 1$.

L’estudi també es pot fer escalonant la matriu,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 1 & m \\ 0 & m & 2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & 1 \\ 0 & 0 & 1-m & m-1 \\ 0 & m & 2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & 1 \\ 0 & m & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1-m & m-1 \end{array}\right)$$

i veient que hi pot haver problemes per a $m = 0$ (en aquest cas la matriu encara no està escalonada) i per a $m = 1$.

- Per a $m = 0$, l’escalonament de la matriu ampliada del sistema ens condueix a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \ .$$

  El sistema és incompatible i, per tant, els tres plans no tenen cap punt en comú. La seva intersecció no és una recta.

- Per a $m = 1$, l’escalonament de la matriu ampliada del sistema és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \ .$$

  Ara el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

En definitiva, els tres plans es tallen en una sola recta si i sol si $m = 1$.

2.- Donades la recta $y = 3x + b$ i la paràbola $y = x^2$,

(a) ***Calculeu l’abscissa del punt on la recta tangent a la paràbola és paral·lela a la recta donada.***

(b) ***Trobeu el valor del paràmetre b perquè la recta sigui tangent a la paràbola.***

[1 punt per apartat]

Solució

Posarem $y_1(x) = 3x + b$ i $y_2(x) = x^2$.

(a) Una condició necessària i suficient perquè dues rectes siguin paral·leles és que els seus pendents siguin iguals. Com que el pendent de la recta és $m_r = y_1'(x) = 3$ (també es pot trobar directament com a coeficient de la variable x, ja que es dóna l'equació explícita de la recta) i la derivada de la paràbola és $y_2'(x) = 2x$, la recta donada i la recta tangent són paral·leles en el punt on $3 = 2x$, és a dir, en el punt on l'abscissa valgui $x = 3/2$.

(b) L'únic punt on la recta i la paràbola podem ser tangents és el punt d'abscissa $x = 3/2$. Ho seran si i sol si $y_1(3/2) = y_2(3/2)$, que succeeix quan $b = -9/4$.

3.- Donants el pla $\pi\colon x - y + 2z - 5 = 0$ ***i la recta*** $r\colon \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}$

(a) ***Calculeu el punt d'intersecció entre el pla i la recta.***

(b) ***Trobeu l'equació contínua de la recta s continguda al pla π, que és perpendicular a la recta r i talla a la recta r.***

[1 punt per apartat]

Solució

(a) La forma que sembla més senzilla per a la resolució d'aquest apartat és construir un sistema de tres equacions amb tres incògnites i resoldre'l. El sistema és

$$\left.\begin{array}{c} x - y + 2z - 5 = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{array}\right\},$$

que té per solució el punt $P = (4, -3, -1)$.

Hi ha altres formes de resolució, tal com trobar les equacions paramètriques de la recta i substituir-les al pla.

(b) El vector director de la recta s ha de ser perpendicular al director de r i al característic de π. Comencem per calcular el vector director de la recta r,

$$v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 1, -3).$$

Una forma de trobar el director de s és efectuar el producte vectorial dels dos vectors, $v_\pi = (1, -1, 2)$ i v_r.

$$v_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (1, 7, 3).$$

Com que la recta s (que ha d'estar continguda a π) ha de tallar a la recta r, el punt de tall és el mateix que el de tall entre r i π. Per tant, l'equació contínua de la recta s és

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{7} = \frac{z+1}{3}.$$

4.- Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **i** $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(a) **Comproveu que es compleix la igualtat** $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ **.**

(b) **És certa aquesta igualtat per a qualsevol parell de matrius quadrades** A **i** B **del mateix ordre? Responeu raonadament utilitzant les propietats generals de les operacions entre matrius, sense utilitzar matrius** A **i** B **concretes.**

[1 punt per apartat]

Solució

(a) Fem els càlculs que ens demanen,

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ -8 & -8 \end{pmatrix};$$
$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}.$$

Efectivament, són iguals.

Aquest apartat es pot fer també comprovant que les matrius donades compleixen que $AB = BA$,

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Llavors,

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - BA + BA - B^2 = A^2 - B^2 .$$

(b) La igualtat proposada no és certa sempre, ja que

$$(A+B)(A-B) = AA - AB + BA - BB = A^2 - AB + BA - B^2 ,$$

i la matriu $-AB + BA$ no és, en general, la matriu nul·la, perquè el producte de matrius no és commutatiu.

5.- Un triangle equilàter de vèrtexs A**,** B **i** C **té els costats de** $8\,cm$**. Situem un punt** P **sobre una de les altures del triangle a una distància** x **de la base corresponent.**

(a) Calculeu l'altura del triangle de vèrtexs A**,** B **i** C**.**

(b) Indiqueu la distància del punt P **a cada un dels vèrtexs (en funció de** x**).**

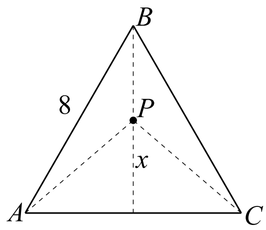
(c) Determineu el valor de x **perquè la suma dels quadrats de les distàncies del punt** P **a cadascun dels tres vèrtexs sigui mínima.**

[0,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c]

Solució

(a) Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle resultant d'agafar la meitat del triangle equilàter, tindrem que

$$h = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}\,.$$



També podem treballar amb trigonometria,

$$\sin 60^o = \frac{h}{8} \iff h = 8\sin 60^o = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\,.$$

(b) Les distàncies demanades són

$$d(P,A) = d(P,C) = \sqrt{4^2 + x^2} = \sqrt{16 + x^2}\,; \quad d(P,B) = h - x = 4\sqrt{3} - x\,.$$

(c) La funció que es vol fer mínima és $f(x) = (d(P,A))^2 + (d(P,B))^2 + (d(P,C))^2$, és a dir,

$$f(x) = 2(16 + x^2) + (4\sqrt{3} - x)^2 = 3x^2 - 8\sqrt{3}x + 80\,.$$

Per tal de trobar el mínim d'aquesta funció, cal igualar la seva deriva a zero. Com que $f'(x) = 6x - 8\sqrt{3}$, l'equació $f'(x) = 0$ proporciona $x = \dfrac{8\sqrt{3}}{6} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Per ser $f''(x) = 6 > 0$, podem assegurar que es tracta realment d'un mínim, tal com es volia.

6.- Donats els punts $P = (1,0,0)$***,*** $Q = (0,2,0)$***,*** $R = (0,0,3)$ ***i*** $S = (1,2,3)$***,***

(a) ***Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma*** $Ax + By + Cz + D = 0$***) del pla que conté els punts*** P***,*** Q ***i*** R***.***

(b) ***Comproveu si els quatre punts són coplanaris (és a dir, si els quatre estan continguts en un mateix pla).***

[1 punt per apartat]

Solució

(a) Hi ha diferents formes de trobar l'equació del pla que conté els punts P, Q i R. Aquí se'n presenten tres.

- Buscant els vectors $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$. Aquests vectors són generadors del pla. El seu producte vectorial és un vector característic o normal del pla buscat,

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6,3,2)\,.$$

  Amb això, el pla és de la forma $6x + 3y + 2z + D = 0$. Imposant que passi per P (o per Q o per R) s'obté que $D = -6$. En definitiva, $\pi\colon 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

- Plantejant l'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ i imposant que la compleixin els tres punts, s'arriba a un sistema d'equacions lineal,

$$\left.\begin{array}{r} A + D = 0 \\ 2B + D = 0 \\ 3C + D = 0 \end{array}\right\}\,,$$

que ens porta a $A = -D$, $B = -D/2$ i $C = -D/3$. Si fem $D = -6$, ens queda $A = 6$, $B = 3$ i $C = 2$. L'equació buscada és $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

- Agafant els vectors $\overrightarrow{PQ} = (-1, 2, 0)$ i $\overrightarrow{PR} = (-1, 0, 3)$ com a generadors del pla (es poden agafar qualssevol altres vectors formats pels punts P, Q, R, sempre que no es considerin un vector i el seu oposat). Llavors, l'equació del pla és

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \iff 6(x-1) + 2z + 3y = 0\,.$$

  La matriu de la qual es calcula el determinant pot ser, evidentment, la transposada de la que s'ha utilitzat aquí; igualment, el punt que es resta a (x, y, z) pot ser qualsevol dels tres donats.

(b) Els quatre punts són coplanaris si el punt S pertany al pla que acabem de trobar. Per tant, cal que el punt $(1, 2, 3)$ compleixi l'equació del pla. Però, com que

$$6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 6 \neq 0\,,$$

podem assegurar que els quatre punts no són coplanaris.

Aquest apartat també es pot fer, per exemple, calculant el volum del tetraedre amb vèrtexs als quatre punts. Si dóna zero, són coplanaris; si no dóna zero, no ho són

$$V = \frac{1}{6}|\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS})| = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}| = 2 \neq 0\,.$$

No són coplanaris

SÈRIE 1

1.- Donats els plans $\pi_1: 3x + y - 2z + 15 = 0$ ***i*** $\pi_2: x + y + 2z - 103 = 0$***,***

(a) Comproveu que són perpendiculars.

(b) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$***) del pla que és perpendicular a*** π_1 ***i*** π_2***, passant pel punt*** $P = (1, 3, 2)$ ***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Dos plans són perpendiculars si ho són els seus vectors normals. Aquests vectors normals són, respectivament, $v_1 = (3, 1, -2)$ i $v_2 = (1, 1, 2)$. Com que

$$v_1 \cdot v_2 = (3, 1, -2) \cdot (1, 1, 2) = 3 + 1 - 4 = 0\,,$$

els plans són perpendiculars.

(b) Podem trobar el vector normal al pla buscat fent el producte vectorial dels vectors normals dels plans π_1 i π_2.

$$v_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4i - 8j + 2k = (4, -8, 2)\,.$$

L'equació del pla π amb vector normal $v_\pi = (A, B, C)$, passant pel punt $P = (x_0, y_0, z_0)$ és

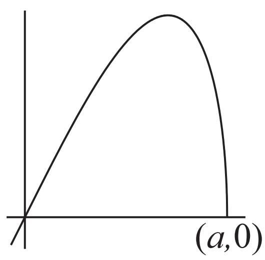
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0\,.$$

En el nostre cas, ens queda

$$4(x - 1) - 8(y - 3) + 2(z - 2) = 0\,, \quad \text{és a dir,} \quad 4x - 8y + 2z + 16 = 0$$

o, simplificat, $2x - 4y + z + 8 = 0$.

2.- La gràfica de la funció $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$ ***és la següent:***



(a) ***Trobeu el punt de tall,*** $(a, 0)$***, de la funció amb la part positiva de l'eix*** OX ***.***

(b) ***Calculeu l'àrea limitada per la gràfica de*** $f(x)$ ***i l'eix*** OX ***en el primer quadrant.***

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

(a) El paràmetre a és l'abscissa del punt de tall de la corba amb l'eix OX. És a dir, és una de les solucions de l'equació $x\sqrt{9 - x^2} = 0$, que són $x = 0$, $x = \pm 3$. Com que ha de ser $a > 0$, és evident que $a = 3$.

(b) Per aquest segon apartat, descriurem dues solucions.

Solució 1

Com que la funció és positiva a l'interval [0, 3], l'àrea buscada és $A = \int_0^3 f(x)\,dx$. Busquem una primitiva per a la funció $f(x)$, amb el canvi $t = 9 - x^2$, la qual cosa fa que $dt = -2x\,dx$.

$$\int f(x)\,dx = \int x\sqrt{9-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{9-x^2}(-2x)dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt$$
$$= -\frac{t^{3/2}}{3} = -\frac{(9-x^2)^{3/2}}{3}.$$

Llavors,

$$A = \left[-\frac{(9-x^2)^{3/2}}{3}\right]_0^3 = -0 + \frac{9^{3/2}}{3} = \frac{27}{3} = 9\,.$$

Evidentment, també es pot realitzar el càlcul sense desfer el canvi al final, sempre que es posin els límits d'integració que corresponen (per $x = 0$, queda $t = 9$; per $x = 9$, és $t = 0$):

$$A = \int_0^3 f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_9^0 \sqrt{t}\,dt = \left[-\frac{t^{3/2}}{3}\right]_9^0 = -0 + \frac{9^{3/2}}{3} = \frac{27}{3} = 9\,.$$

Solució 2

Podem utilitzar la fórmula d'integració immediata $\int u^a\,du = \frac{u^{a+1}}{a+1}$. Llavors,

$$A = \int_0^3 f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^3 (9-x^2)^{1/2}(-2x)dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{(9-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^3 = 9\,.$$

NOTA: No es pot donar per bo coses per l'estil de $\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx = 1/2\int_0^3 \sqrt{t}\,dt$.

3.- Sigui A una matriu quadrada d'ordre n de manera que $A^2 = O$, essent O la matriu nul·la (la formada completament per zeros).

(a) **Comproveu que $(A + I_n)^2 = 2A + I_n$.**

(b) **Comproveu que les matrius $B = I_n - A$ i $C = A + I_n$ són l'una inversa de l'altra.**

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Tenim que

$$(A + I_n)^2 = (A + I_n)(A + I_n) = A^2 + A + A + I_n = O + 2A + I_n = 2A + I_n\,.$$

S'ha utilitzat la propietat distributiva del producte de matrius.

(b) Per comprovar que B i C són l'una inversa de l'altra, efectuarem els dos productes possibles entre elles. Ambdós productes han de donar la identitat.

$$BC = (I_n - A)(A + I_n) = I_nA + I_nI_n - AA - AI_n = A + I_n - A^2 - A = I_n - O = I_n\,,$$
$$CB = (A + I_n)(I_n - A) = AI_n - AA + I_nI_n - I_nA = A - A^2 + I_n - A = -O + I_n = I_n\,,$$

tal com volíem.

NOTES:

• De què $A^2 = O$, no se'n pot deduir que la matriu A és la matriu nul·la. Considerar $A = O$ és un error molt greu.

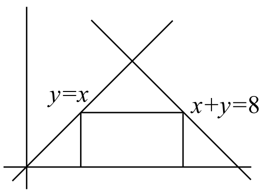
• Si s'utilitza la fórmula $(A + I_n)^2 = A^2 + 2AI_n + I_n^2$ (que és incorrecta el general), cal justificar que les matrius A i I_n "commuten" entre elles.

• En l'apartat (b) n'hi ha prou en comprovar una de les dues igualtats, ja que es pot demostrar que llavors l'altra també és certa.

4.- Un rectangle està inscrit en el triangle que té els costats en les rectes d'equacions

$$y = 3x\,, \quad x + y = 6\,, \quad y = 0\,,$$

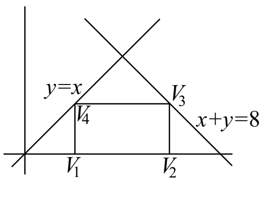
i té un costat sobre la recta $y = 0$ ***. Trobeu-ne els vèrtexs perquè la superfície sigui màxima.***



[2 punts]

Solució 1

Siguin $V_1 = (a, 0)$ i $V_2 = (b, 0)$ els vèrtexs del rectangle que es troben a l'eix OX (la recta $y = 0$), amb $a < b$. Llavors, el vèrtex que es troba a la recta $y = x$, és de la forma $V_4 = (a, a)$; l'altre vèrtex, el que es troba a la recta $x + y = 8$, és de la forma $V_3 = (b, 8 - b)$. Com que els vèrtexs V_3 i V_4 han d'estar a la mateixa altura, cal que $a = 8 - b$.



La longitud de la base del rectangle és $b - a$ i la seva altura és $a = 8 - b$. En conseqüència la seva superfície és

$$S = (b - a) \cdot a = (b - 8 + b) \cdot (8 - b) = -2b^2 + 24b - 64\,.$$

Per trobar el màxim, derivem la funció superfície i igualem la derivada a zero.

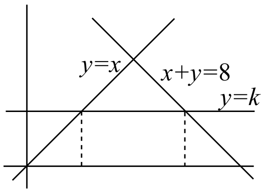
$$S'(b) = 24 - 4b\,; \quad 24 - 4b = 0 \Longrightarrow b = 6 \Longrightarrow a = 2\,.$$

Podem comprovar que el valor $b = 6$ correspon a un màxim utilitzant la segona derivada ($S''(b) = -24 < 0$), o bé argumentant que la funció superfície té per gràfica una paràbola amb coeficient de x^2 negatiu. També es pot fer comprovant el signe de la funció derivada abans (surt positiu) i després (és negatiu) del punt $b = 6$.

Els quatre vèrtex són $V_1 = (2,0)$, $V_2 = (6,0)$, $V_3 = (6,2)$, $V_4 = (2,2)$.

Solució 2

Sigui $y = k$ la recta on està el costat del rectangle paral·lel al que es troba a l'eix OX.



Els vèrtexs sobre la recta $y = k$ són (k,k) i $(8-k,k)$. Les seves projeccions ortogonals sobre l'eix OX, que són els altres dos vèrtexs, donen $(k,0)$ i $(8-k,0)$. La base del rectangle és $(8-k)-k = 8-2k$ i la seva altura és, evidentment, k. Llavors, la funció que ens dóna l'àrea del rectangle és

$$f(k) = (8-2k)k = 8k - 2k^2\,.$$

La seva derivada és $f'(k) = 8 - 4k$. Quan la igualem a zero, s'obté $k = 2$. Els quatre vèrtexs són els trobats a la solució 1. La comprovació de què es tracta realment d'un màxim es realitza de la mateixa forma que en la solució anterior.

5.- Contesteu les preguntes següents:

(a) ***Expliqueu raonadament si una matriu d'ordre 3 i una matriu d'ordre 2 poden tenir el mateix determinant.***

(b) ***Considereu les matrius següents:***

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & 1-p & 2 \\ 1 & 2 & p \end{pmatrix} \quad \textbf{\textit{i}} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & p \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculeu, si és possible, el valor del paràmetre p ***perquè*** $\det A = \det B$ ***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) El determinant de qualsevol matriu quadrada és un número (un escalar) i no depèn en absolut de l'ordre de la matriu. Així el determinant d'una matriu d'ordre 3 i el d'una d'ordre dos poden ser iguals.

Per exemple, $\det(I_3) = 1$ i $\det(I_2) = 1$.

(b) Tenim que $\det A = p - 2$ i $\det B = 4 - p^2$. Aquests determinants són iguals si $p - 2 = 4 - p^2$, equació que té com a solucions $p = -3$ i $p = 2$.

6.- Siguin $\pi\colon x - 3y + 2z = 1$ ***i*** $r : \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - y + mz = 1 \end{cases}$ ***. Estudieu-ne la posició relativa segons el valor del paràmetre*** m ***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució 1

Comencem buscant un vector normal o característic, v_π , del pla π i un vector director, v_r , de la recta r .

$$v_\pi = (1,-3,2)\,; \quad v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = (m,-3m,-5)\,.$$

Comprovem si aquests dos vectors són perpendiculars (condició perquè el pla i la recta siguin paral·lels o perquè la recta estigui continguda al pla) per algun valor del paràmetre.

$$(1,-3,2)\cdot(m,-3m,-5) = 10m-10 = 0 \Longrightarrow m = 1\,.$$

- Per $m \neq 1$, el pla i la recta es tallen.
- Quan $m = 1$, escollim qualsevol punt de la recta i mirem si compleix l'equació del pla. Per exemple, per $x = 0$ obtenim que $y = 1$ i $-y+z = 1$; és a dir, $y = 1$ i $z = 2$. Aquest punt és el $P = (0,1,2)$. Llavors, com que $x-3y+2z = 0-3+4 = 1$, el punt és del pla i, per tant, $r \subset \pi$.

Solució 2

Estudiem el caràcter del sistema format per l'equació del pla i les dues equacions de la recta. Si el sistema és compatible determinat el pla i la recta es tallen; si és compatible indeterminat la recta està continguda al pla; si és incompatible, el pla i la recta són paral·lels.

El sistema és

$$\begin{cases} x-3y+2z = 1 \\ 3x+y = 1 \\ 2x-y+mz = 1 \end{cases}$$

Busquem el determinant de la matriu del sistema,

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = 10m-10\,,$$

i trobem el valor del paràmetre perquè valgui zero.

$$10m-10 = 0 \Longrightarrow m = 1\,.$$

Ja podem assegurar que per a $m \neq 1$ el sistema és compatible determinat i, per tant, el pla i la recta es tallen.

Per a $m = 1$, l'esglaonament de la matriu ampliada és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -6 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Les operacions elementals realitzades han estat

(1) F_2-3F_1 ; F_3-2F_1 .

(2) $F_2/2$; $2F_3-F_2$.

En aquest cas, el sistema és compatible indeterminat. La recta està continguda al pla.

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2011-2012

Matemàtiques

Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Determineu el rang de la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en funció del paràmetre k.

[2 punts]

2. Sigui $f(x) = \dfrac{ax^2}{x+b}$, en què $a \neq 0$.

a) Determineu si té alguna asímptota vertical, en funció del paràmetre b.

b) Indiqueu el valor dels paràmetres a i b perquè la funció $f(x)$ tingui la recta $y = 2x - 4$ com a asímptota obliqua a $+\infty$.

[1 punt per cada apartat]

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left.\begin{aligned} x + y - 3z &= 2 \\ 2x + ay - 5z &= 2a + 3 \\ 2x - 3y + (a-2)z &= 9 \end{aligned}\right\}$$

a) Calculeu el valor o els valors del paràmetre a per al qual o per als quals el sistema és compatible indeterminat.

b) Quantes solucions té aquest sistema quan $a = -3$?

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

4. Una fàbrica produeix diàriament x tones d'un producte A i $(40-5x)/(10-x)$ tones d'un producte B. La quantitat màxima de producte A que es pot produir és 8 tones. El preu de venda del producte A és 100€ per tona i el del producte B és 250€ per tona.

a) Construïu la funció de la variable x que ens proporciona els ingressos diaris, suposant que es ven tota la producció.

b) Calculeu quantes tones de cada producte s'han de produir diàriament per a obtenir el màxim d'ingressos, i comproveu que és realment un màxim relatiu.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

5. Considereu les rectes de l'espai següents:

$$r: \frac{x+1}{2} = y-1 = \frac{z-1}{-1}, \quad s: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

a) Comproveu que són secants.

b) Calculeu l'equació contínua de la recta que les talla i que és perpendicular a totes dues.

[1 punt per cada apartat]

6. Donades la recta $y = ax + 1$ i la paràbola $y = 3x - x^2$,

a) Calculeu els valors del paràmetre a perquè siguin tangents.

b) Calculeu els punts de tangència.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

SÈRIE 4

1.- Determineu el rang de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ***en funció del valor del paràmetre*** k.

[2 punts]

Solució

En ser la matriu quadrada, començarem calculant el seu determinant.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} k+2 & k+2 & k+2 \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} k+2 & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & 0 \\ k & 1-k & 1-k \end{vmatrix}$$
$$= (k+2)(k-1)(1-k) = -(k+2)(k-1)^2.$$

En (1) s'ha fer $F_1 + F_2 + F_3$, ja que així s'aconsegueix que tots els elements de la primera fila siguin iguals. En (2) s'ha fet $C_2 - C_1$ i $C_3 - C_1$.

Si $\det A \neq 0$, el rang de la matriu A és 3; en cas contrari, és menor que 3 . Resolem, doncs, l'equació $\det A = 0$.

$$-(k+2)(k-1)^2 = 0 \iff k = -2 \text{ o } k = 1\,.$$

Es pot arribar a la mateixa conclusió escalonant la matriu,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 \end{pmatrix}.$$

i resolent $2 - k - k^2 = 0$.

Per tant,

- Si $k \neq -2$ i $k \neq 1$, tenim que rang $A = 3$.
- Si $k = -2$, la matriu A és

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  En aquest cas, rang $A = 2$.
- Finalment, per $k = 1$, la matriu A és

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

  que té, evidentment, rang 1.

2.- Sigui $f(x) = \dfrac{ax^2}{x+b}$***, en què*** $a \neq 0$.

(a) Determineu si té alguna asímptota vertical, en funció del paràmetre b.

(b) Indiqueu el valor dels paràmetres a ***i*** b ***perquè la funció*** $f(x)$ ***tingui la recta*** $y = 2x - 4$ ***com a asímptota obliqua a*** $+\infty$.

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) La funció, per ser racional, pot tenir una asímptota vertical en el valor de la variable x que anul·li el denominador, $x = -b$. Llavors,

- Si $b \neq 0$, $\lim\limits_{x\to -b} \dfrac{ax^2}{x+b} = \dfrac{ab^2}{0} = \infty$ (el signe d'aquest "límit" depèn de si es realitza per la dreta o per l'esquerra, però no ens interessa). En aquest cas, la recta $x = -b$ és una asímptota vertical.
- Si $b = 0$, $\lim\limits_{x\to -b} \dfrac{ax^2}{x+b} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ax^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} ax = 0$. Llavors, la funció no té cap asímptota vertical.

(b) **Solució 1**

Una asímptota obliqua al $+\infty$ és de la forma $y = mx + n$ amb

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - mx)\,.$$

En el nostre cas,

- $m = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\dfrac{ax^2}{x+b}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{ax^2}{x^2+bx} = a\,.$
- $n = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{ax^2}{x+b} - ax\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-abx}{x+b} = -ab\,.$

Si l'asímptota obliqua a $+\infty$ ha de ser $y = 2x - 3$, cal que $a = 2$ i $-ab = -4$. Per tant, la resposta és

$$a = 2 \quad \text{i} \quad b = 2\,.$$

Solució 2

Com que la funció donada és racional, podem efectuar el seu quocient, obtenint que

$$\frac{ax^2}{x+b} = ax - ab + \frac{ab^2}{x+b}\,,$$

d'on l'asímptota obliqua és $y = ax - ab$. Llavors, $a = 2$ i $-ab = -4$ i es segueix igual que abans.

3.- Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left.\begin{aligned} x + y - 3z &= 2 \\ 2x + ay - 5z &= 2a + 3 \\ 2x - 3y + (a-2)z &= 9 \end{aligned}\right\}\,.$$

(a) ***Calculeu el valor o els valors del paràmetre a per al qual o per als quals el sistema és compatible indeterminat.***

(b) ***Quantes solucions té el sistema quan $a = -3$?***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Calculem el determinant de la matriu del sistema,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 2 & -3 & a-2 \end{vmatrix} = a^2 + 2a - 3\,.$$

Aquest determinant val zero quan $a = 1$ o $a = -3$.

Evidentment, aquest apartat es pot resoldre també aplicant el mètode de Gauss a la matriu ampliada del sistema,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & 2 \\ 2 & a & -5 & | & 2a+3 \\ 2 & -3 & a-2 & | & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & 2 \\ 0 & a-2 & 1 & | & 2a-1 \\ 0 & -5 & a+4 & | & 5 \end{pmatrix} .$$

A partir d'aquí l'escalonament es torna bastant complicat; llavors, podem analitzar si les dues últimes files de la matriu del sistema (no ampliada) són proporcionals (per tal que rang $A \neq 3$),

$$\frac{a-2}{-5} = \frac{1}{a+4} \iff (a-2)(a+4) = -5 \iff a^2 + 2a - 3 = 0 \iff a = 1 \ \text{ o } \ a = -3 \,,$$

tal com surt per l'altre mètode.

• Per $a = 1$, l'escalonament de la matriu ampliada del sistema ens dóna

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & 2 \\ 2 & 1 & -5 & | & 5 \\ 2 & -3 & -1 & | & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -5 & 5 & | & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} .$$

El sistema és compatible indeterminat.

• Quan $a = -3$, queda la matriu ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & | & 2 \\ 2 & -3 & -5 & | & -3 \\ 2 & -3 & -5 & | & 9 \end{pmatrix} ,$$

que ens assegura que el sistema és incompatible, a la vista de les dues darreres files. Així, el sistema és compatible indeterminat si i sol si $a = 1$.

(b) D'acord amb l'apartat anterior, per $a = -3$ el sistema és incompatible i, per tant, no té cap solució.

4.- Una fàbrica produeix diàriament x tones d'un producte A i $(40-5x)/(10-x)$ tones d'un producte B. La quantitat màxima de producte A que es pot produir és 8 tones. El preu de venda del producte A és 100€ per tona i el del producte B és 250€ per tona.

(a) ***Construïu la funció de la variable x que ens proporciona els ingressos diaris, suposant que es ven tota la producció.***

(b) ***Calculeu quantes tones de cada producte s'han de produir diàriament per a obtenir el màxim d'ingressos, i comproveu que és realment un màxim relatiu.***

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) D'acord amb l'enunciat, la funció que ens dóna els guanys diaris és

$$f(x) = 100x + 250\,\frac{40-5x}{10-x} .$$

(b) Per tal de localitzar el màxim benefici cal derivar la funció anterior i igualar la derivada a zero.

$$f(x) = 100x + 250\,\frac{40-5x}{10-x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{100x^2 - 2000x + 7500}{(10-x)^2} .$$

Llavors,

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 100x^2 - 2000x + 7500 = 0 \Longrightarrow x^2 - 20x + 75 = 0 \Longrightarrow x = 5\,,\ x = 15\,.$$

- Si $b \neq 0$, $\lim\limits_{x\to -b} \dfrac{ax^2}{x+b} = \dfrac{ab^2}{0} = \infty$ (el signe d'aquest "límit" depèn de si es realitza per la dreta o per l'esquerra, però no ens interessa). En aquest cas, la recta $x = -b$ és una asímptota vertical.
- Si $b = 0$, $\lim\limits_{x\to -b} \dfrac{ax^2}{x+b} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ax^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} ax = 0$. Llavors, la funció no té cap asímptota vertical.

(b) **Solució 1**

Una asímptota obliqua al $+\infty$ és de la forma $y = mx + n$ amb

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - mx)\,.$$

En el nostre cas,

- $m = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\dfrac{ax^2}{x+b}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{ax^2}{x^2+bx} = a\,.$
- $n = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{ax^2}{x+b} - ax \right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-abx}{x+b} = -ab\,.$

Si l'asímptota obliqua a $+\infty$ ha de ser $y = 2x - 3$, cal que $a = 2$ i $-ab = -4$. Per tant, la resposta és

$$a = 2 \quad \text{i} \quad b = 2\,.$$

Solució 2

Com que la funció donada és racional, podem efectuar el seu quocient, obtenint que

$$\frac{ax^2}{x+b} = ax - ab + \frac{ab^2}{x+b}\,,$$

d'on l'asímptota obliqua és $y = ax - ab$. Llavors, $a = 2$ i $-ab = -4$ i es segueix igual que abans.

3.- Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left. \begin{array}{r} x + y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = 2a + 3 \\ 2x - 3y + (a-2)z = 9 \end{array} \right\}.$$

(a) ***Calculeu el valor o els valors del paràmetre*** a ***per al qual o per als quals el sistema és compatible indeterminat.***

(b) ***Quantes solucions té el sistema quan*** $a = -3$***?***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Calculem el determinant de la matriu del sistema,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 2 & -3 & a-2 \end{vmatrix} = a^2 + 2a - 3\,.$$

Aquest determinant val zero quan $a = 1$ o $a = -3$.

La solució d'aquest sistema és $x = 1,\ y = 2,\ z = 0$. Atenció: és molt important que es vegi clar que aquesta és la solució de **tot** el sistema. És a dir, agafant tres de les equacions n'hi ha prou per trobar la solució, però cal comprovar que també es verifica l'altra equació.

Solució 2b. Una vegada construït el sistema, es pot comprovar si és o no compatible (determinat) calculant el rang de la matriu de coeficients i el de l'ampliada. Això exigeix treballar amb una matriu d'ordre 4, que no entra en els requisits de les proves, però que es pot utilitzar.

Solució 3. Construïm la matriu $A = (v_r, v_s, \overrightarrow{PQ})$, essent v_r el vector director de la recta r, v_s el de s, P un punt de la recta r i Q un punt de la recta s. Per exemple,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les rectes es tallen si i sol si rang $A < 3$ (ja que no són ni paral·leles ni coincidents per tenir els seus vectors directors no proporcionals). Calculem, doncs, el determinant de la matriu A,

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Les rectes es tallen.

(b) Com que les rectes es tallen, la recta perpendicular que les talla passa pel seu punt de tall, que és $P_1 = (-1 + 2\lambda,\ 1 + \lambda,\ 1 - \lambda) = (1, 2, 0)$. Si l'apartat ($a$) s'ha fet de la segona o tercera forma, ara farà falta calcular aquest punt d'intersecció.

El vector director de la recta buscada és

$$v = v_r \times v_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (1, -7, -5)\,.$$

L'equació contínua de la recta buscada és

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z-0}{-5}\,.$$

6.- Donades la recta $y = ax + 1$ i la paràbola $y = 3x - x^2$,

(a) ***Calculeu els valors del paràmetre a perquè siguin tangents.***

(b) ***Calculeu els punts de tangència.***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Posem $y_1 = ax + 1$ i $y_2 = 3x - x^2$.

<u>Solució 1</u>

Perquè siguin tangents en un punt d'abscissa x, cal que $y_1(x) = y_2(x)$ i $y_1'(x) = y_2'(x)$. És a dir,

$$ax + 1 = 3x - x^2\,; \qquad a = 3 - 2x\,.$$

Substituint el valor de a, donat a la segona equació, dins la primera equació, ens queda que $x = \pm 1$. Per $x = 1$ el valor de a és $a = 1$ i per $x = -1$ ens queda $a = 5$.

Solucio2

Es pot imposar que la recta i la paràbola es "tallin" en un sol punt doble. Perquè això sigui així, l'equació $ax + 1 = 3x - x^2$ ha de tenir una sola solució; és a dir, el seu discriminant ha de ser nul. L'equació és $x^2 + (a-3)x + 1 = 0$ i el discriminant $\Delta = (a-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$. Llavors,

$$(a-3)^2 - 4 = 0 \iff a^2 - 6a + 5 = 0 \iff a = 1 \quad \text{o} \quad a = 5\,.$$

(b) D'acord amb els valors de la variable x trobats a l'apartat anterior (solució 1) o els que es podem trobar donant a a els valors 1 i 5 (solució 2), tenim

- Per a $a = 1$ (corresponent a $x = 1$), el punt de tangència és $P_1 = (1, 2)$.
- Quan $a = 5$ (que correspon a $x = -1$), el punt de tangència és $P_2 = (-1, -4)$.

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2012-2013

Matemàtiques

Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Sabem que el vector $(2, 1, -1)$ és una solució del sistema

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= a + c \\ bx - y + bz &= a - b - c \\ cx - by + 2z &= b \end{aligned}\right\}$$

Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c.

[2 punts]

2. La corba $y = x^2$ i la recta $y = k$, amb $k > 0$, determinen una regió plana.

a) Calculeu el valor de l'àrea d'aquesta regió en funció del paràmetre k.

b) Trobeu el valor de k perquè l'àrea limitada sigui $\sqrt{6}\,u^2$.

[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

3. Sigui $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.

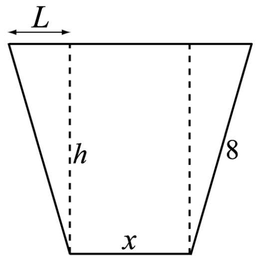
a) Què significa que la matriu $\boldsymbol{B}$ sigui la matriu inversa de $\boldsymbol{A}$?

b) Trobeu el valor del paràmetre p perquè la matriu inversa de $\boldsymbol{A}$ i la matriu transposada de $\boldsymbol{A}$ coincideixin.

Nota: No aproximeu les arrels mitjançant valors amb decimals; treballeu amb els radicals.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

4. Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplària superior del canal sigui el doble de l'amplària inferior i que els costats no paral·lels siguin de 8 metres. A la dreta teniu un esquema de la secció del canal.



a) Trobeu el valor del segment L de la gràfica en funció de la variable x (amplària inferior del canal).

b) Sabem que l'àrea d'un trapezi és igual a l'altura multiplicada per la semisuma de les bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció és donada per

$$A(x)=\frac{3x\sqrt{256-x^2}}{4}$$

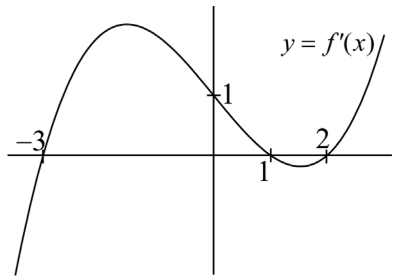
c) Calculeu el valor de x perquè l'àrea de la secció del canal sigui màxima (no cal que comproveu que és realment un màxim).

[0,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*; 1 punt per l'apartat *c*]

5. Donats els punts $P=(1,\ 0,\ -1)$ i $Q=(-1,\ 2,\ 3)$, trobeu un punt R de la recta $r\colon \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$ que compleixi que el triangle de vèrtexs P, Q i R és isòsceles, en què $\overline{PR}$ i $\overline{QR}$ són els costats iguals del triangle.

[2 punts]

6. La funció $f(x)$ és derivable i passa per l'origen de coordenades. La gràfica de la funció derivada és la que veieu aquí dibuixada, essent $f'(x)$ creixent als intervals $(-\infty, -3]$ i $[2, +\infty)$.



a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$.

b) Indiqueu les abscisses dels extrems relatius de la funció $f(x)$ i classifiqueu aquests extrems.

[1 punt per cada apartat]

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2012-2013

Matemàtiques

Sèrie 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Sigui π: $3x - 2y + z = 10$.

a) Trobeu l'equació contínua de la recta r perpendicular a π que passa pel punt $P = (-1, 3, 2)$.

b) Trobeu també l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla π_1 paral·lel a π que passa pel mateix punt P.

[1 punt per cada apartat]

2. Considereu la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{bmatrix}$. Sigui $\boldsymbol{I}$ la matriu identitat d'ordre 2.

a) Trobeu el valor del paràmetre a perquè es compleixi que $\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

b) Calculeu la matriu inversa de la matriu $\boldsymbol{A}$ quan $a = -2$.

[1 punt per cada apartat]

3. Donada la funció $f(x) = \sqrt{x-1}$ i la recta horitzontal $y = k$, amb $k > 0$,

a) Feu un esbós del recinte limitat per les gràfiques de la funció i la recta, i els eixos de coordenades.

b) Trobeu el valor de k sabent que l'àrea d'aquest recinte és igual a 14/3.

[0,5 per l'apartat *a*; 1,5 per l'apartat *b*]

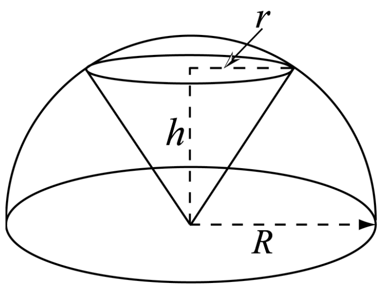
4. Un triangle d'àrea 3/2 té dos dels vèrtexs als punts $P = (0, 0, 0)$ i $Q = (2, 0, 1)$. El tercer vèrtex, R, és un punt de la recta

$$r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

i té la primera coordenada no nul·la. Calculeu les coordenades del vèrtex R.

[2 punts]

5. En una semiesfera de radi R inscrivim un con situant el vèrtex al centre de la semiesfera, tal com es veu en el dibuix.



***a*)** Sabent que el volum d'un con és igual a l'àrea de la base multiplicada per l'altura i dividida per 3, comproveu que, en aquest cas, podem expressar el volum com

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3}(R^2 - h^2)$$

***b*)** Trobeu les dimensions d'aquest con (el radi de la base i l'altura) perquè el seu volum sigui màxim i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

6. Sigui $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Sabem que la gràfica d'aquesta funció és tangent a la recta r: $y = x + 3$ en el punt d'abscissa $x = -1$, i que en el punt d'abscissa $x = 1$ la recta tangent és paral·lela a la recta r.

Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c.

[2 punts]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2012-2013

Matemàtiques

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Siguin π_1 el pla $2x + 3y - z = 4$ i π_2 el pla $x - 2y - 4z = 10$.

a) Comproveu que els plans π_1 i π_2 són perpendiculars.

b) Trobeu l'equació contínua de la recta paral·lela als plans π_1 i π_2 i que passa pel punt $P = (-1, 3, 2)$.

[1 punt per cada apartat]

2. La matriu de coeficients d'un sistema d'equacions lineals homogeni és

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 4 & 1 & 2a+2 \end{bmatrix}$$

a) Per a quins valors del paràmetre a el sistema té una sola solució? Quina és aquesta solució única?

b) Resoleu el sistema si $a = 2$.

[1 punt per cada apartat]

3. Donats els punts $P = (1, -1, 2)$, $Q = (2, 0, 1)$ i $R = (3, 2, -1)$,

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que determinen.

b) Trobeu un punt S pertanyent a la recta $r: \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-5}{-3}$, de manera que el tetraedre de vèrtexs P, Q, R i S tingui un volum igual a 1/2.

[1 punt per cada apartat]

4. Per a $x \geq 1$, considereu la funció $f(x) = +\sqrt{x-1}$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa igual a 10.

b) Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de $f(x)$, la recta d'equació $x = 5$ i l'eix OX.

[1 punt per cada apartat]

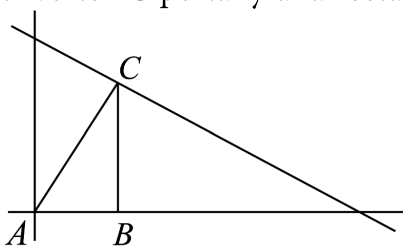
5. Considereu els punts $A = (-1, 2, 4)$ i $B = (3, 0, -2)$.

a) Trobeu l'equació del pla format per tots els punts que equidisten de A i B.

b) Donat un punt $C = (x, y, z)$, dividim el segment $\overline{AC}$ en tres parts iguals i obtenim els punts A, A_1, B i C. Trobeu el punt C.

[1 punt per cada apartat]

6. Un triangle rectangle situat en el primer quadrant té el vèrtex A en l'origen de coordenades, el vèrtex $B = (x, 0)$ en el semieix positiu d'abscisses i el vèrtex C pertany a la recta $x + 2y = 8$. L'angle recte és el que correspon al vèrtex B.



a) Comproveu que l'àrea del triangle es pot expressar de la manera següent: $A(x) = 2x - \dfrac{x^2}{4}$.

b) Trobeu els vèrtexs B i C perquè l'àrea del triangle sigui màxima i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

[1 punt per cada apartat]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

SÈRIE 4

1.- Sabem que el vector $(2,1,-1)$ és solució del sistema

$$\left.\begin{array}{rl} ax + by + cz = & a+c \\ bx - \ y \ + bz = & a-b-c \\ cx - by + 2z = & b \end{array}\right\} .$$

Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c.

[2 punts]

Solució

Si $(2,1,-1)$ és solució del sistema, s'ha de complir que

$$\left.\begin{array}{rl} 2a+b-c = & a+c \\ 2b-1-b = & a-b-c \\ 2c-b-2 = & b \end{array}\right\} ,$$

que és un sistema d'equacions on a, b i c són les variables. La seva solució és $a=3$, $b=1$, $c=2$.

2.- La corba $y=x^2$ i la recta $y=k$, amb $k>0$, determinen una regió plana.

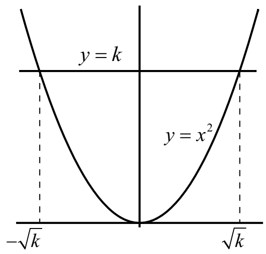
(a) ***Calculeu l'àrea d'aquesta regió en funció del paràmetre k.***

(b) ***Trobeu el valor de k perquè l'àrea limitada sigui $\sqrt{6}\,u^2$.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

La gràfica de la situació descrita és



(a) Les abscisses dels punts d'intersecció entre la corba i la recta són $x=\pm\sqrt{k}$. Per tant, per a qualsevol valor de k,

$$A = \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \left(k - x^2\right)\, dx = \left[kx - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} = \frac{4k\sqrt{k}}{3} .$$

(b) Volem que $\dfrac{4k\sqrt{k}}{3} = \sqrt{6}$. Elevant al quadrat els dos membres d'aquesta equació ens queda

$$\frac{16k^3}{9} = 6 \Longrightarrow k = \frac{3}{2} .$$

3.- Sigui $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.

(a) ***Què significa que la matriu B sigui la inversa de A?***

(b) ***Trobeu el valor del paràmetre p perquè la matriu inversa de A i la seva matriu transposada coincideixin.***

Nota: ***no aproximeu les arrels per valors amb decimals; treballeu amb els radicals.***

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) La matriu B és la inversa de la matriu A si i sol si $A \cdot B = I$ i $B \cdot A = I$, on I és la matriu identitat del mateix ordre que la matriu A (i B).

(b) **Solució 1**

La forma més senzilla de resoldre el problema és realitzar el producte de la matriu A per la seva transposada i igualar el resultat a la identitat.

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & p \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{p}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{p}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} & 0 & p^2 + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per tant, s'ha complir que $p/\sqrt{2} - 1/2 = 0$ i que $p^2 + 1/2 = 1$. La solució comuna a aquestes dues equacions és $p = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Solució 2

Evidentment, la qüestió es pot resoldre també trobant la matriu inversa de A i igualar el resultat a la matriu A^T. Com que

$$A^{-1} = \frac{1}{-\left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2p}{\sqrt{6}} & -\frac{p\sqrt{6}+\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{p}{\sqrt{3}} & \frac{p\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$

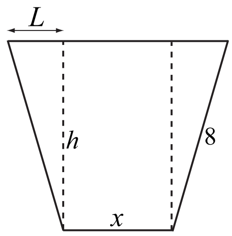
la igualació $A^{-1} = A^T$ dóna lloc a vuit equacions. Una d'elles,

$$\frac{1}{-\left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ens permet assegurar que $p = 1/\sqrt{2}$. S'ha de comprovar que aquest valor fa que els altres equacions es converteixin en identitats.

És clar que aquesta segona forma de resoldre la qüestió és bastant més llarga i propensa a equivocacions.

4.- Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplada superior del canal sigui el doble de l'amplada inferior i que els costats no paral·lels siguin de 8 metres. Sota hi teniu un esquema de la secció del canal.



(a) ***Trobeu el valor del segment assenyalat com a L en el dibuix, en funció de la variable x (amplada inferior del canal).***

(b) ***Sabem que l'àrea d'un trapezi és igual a la seva altura multiplicada per la semisuma de les seves bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció ve donada per***

$$A(x) = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}\,.$$

(c) ***Calculeu el valor de x perquè l'àrea de la secció del canal sigui màxima (no cal que comproveu que és realment un màxim).***

[0,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c]

Solució

(a) Siguin $b_1 = x$ i $b_2 = 2x$ les dues bases del trapezi. Es compleix que $L + b_1 + L = b_2$. Per tant, $L = x/2$.

(b) L'altura del trapezi, d'acord amb el teorema de Pitàgores, compleix que $h^2 + L^2 = 8^2$. D'aquí se'n dedueix que

$$h(x) = \frac{\sqrt{256 - x^2}}{2}\,.$$

Llavors, l'àrea és

$$A(x) = \frac{b_1 + b_2}{2}\,h = \frac{3x}{2}\cdot\frac{\sqrt{256 - x^2}}{2} = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}\,,$$

tal com volíem.

(c) La derivada de la funció $A(x)$ és

$$A'(x) = \frac{3}{4}\left[\sqrt{256 - x^2} + \frac{x}{2\sqrt{256 - x^2}}\,(-2x)\right] = \frac{3(256 - 2x^2)}{4\sqrt{256 - x^2}}\,.$$

Llavors, $A'(x) = 0$ implica que $x = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$.

També és possible treballar amb la funció $f(x) = x^2(256 - x^2)$, resultat d'haver elevat la funció àrea al quadrat i haver eliminar els factors constants.

5.- Donats els punts $P=(1,0,-1)$ i $Q=(-1,2,3)$, trobeu un punt R de la recta $r: \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$ tal que el triangle de vèrtexs P, Q, R és isòsceles, essent $\overline{PR}$ i $\overline{QR}$ els costats iguals del triangle.

[2 punts]

Solució 1

El punt R de la recta és de la forma $R=(-3+2\lambda,-4+3\lambda,3-\lambda)$ (equacions paramètriques de la recta). Volem que $d(P,R)=d(Q,R)$.

$$d(P,R) = \sqrt{(-3+2\lambda-1)^2+(-4+3\lambda-0)^2+(3-\lambda+1)^2}=\sqrt{14\lambda^2-48\lambda+48}\,;$$
$$d(Q,R) = \sqrt{(-3+2\lambda+1)^2+(-4+3\lambda-2)^2+(3-\lambda-3)^2}=\sqrt{14\lambda^2-44\lambda+40}\,.$$

Cal que $14\lambda^2-48\lambda+48=14\lambda^2-44\lambda+40$. La solució d'aquesta equació és $\lambda=2$. El punt buscat és $R=(1,2,1)$.

Solució 2

Busquem l'equació del pla que passa pel punt mig del segment $\overline{PQ}$ amb vector característic $\overrightarrow{PQ}$; tots els punts d'aquest pla equidisten de P i Q. Després es busca la intersecció entre aquest pla i la recta r.

Punt mig: $M=\dfrac{P+Q}{2}=(0,1,1)$.

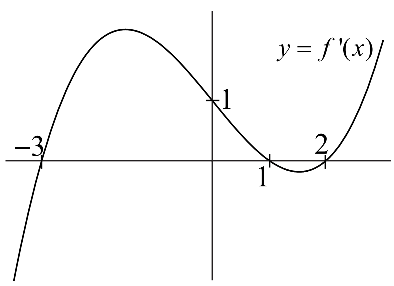
Vector característic: $\overrightarrow{PQ}=Q-P=(-2,2,4)$.

Equació del pla: $-2(x-0)+2(y-1)+4(z-1)=0 \Longrightarrow x+y+2z+3=0$.

Substituint l'expressió general dels punts de la recta r, $R=(-3+2\lambda,-4+3\lambda,3-\lambda)$ en l'equació del pla, obtenim que $\lambda=2$, igual que en l'apartat anterior.

També es pot acabar aquest segon procediment resolent el sistema d'equacions lineals format per dues equacions obtingudes de la recta r i l'equació del pla que hem trobat.

6.- La funció $f(x)$ és derivable i passa per l'origen de coordenades. La gràfica de la seva funció derivada és la que veieu aquí dibuixada, essent $f'(x)$ creixent als intervals $(-\infty,-3]$ i $[2,+\infty)$.



(a) **Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=0$.**

(b) ***Indiqueu les abscisses dels extrems relatius de la funció $f(x)$, classificant aquests extrems.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) L'equació de la recta tangent a la gràfica de $y = f(x)$ en el punt d'abscissa a és $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. De l'enunciat, sabem que $f(0) = 0$ ("passa per l'origen de coordenades") i de la gràfica en deduïm que $f'(0) = 1$. Llavors, l'equació de la recta buscada és $y = 0 + 1(x - 0)$; és a dir, $y = x$.

(b) Com que la funció $f(x)$ és derivable, els punts candidats a ser els seus extrems relatius tindran la derivada igual a zero. D'acord amb el gràfic, les abscisses d'aquests punts són $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ i $x_3 = 2$.

• En $x_1 = -3$ hi tenim un mínim, ja que en ell la funció derivada passa de ser negativa a ser positiva (és a dir, la funció $f(x)$ passa de ser decreixent a ser creixent).

• En $x_2 = 1$ hi ha un màxim. En efecte, la derivada passa de ser positiva (funció creixent) a ser negativa (funció decreixent).

• En $x_3 = 2$ torna a haver un mínim, per la mateixa raó que en x_1.

SÈRIE 3

1.- Sigui $\pi : 3x - 2y + z = 10$ **.**

(a) ***Trobeu l'equació contínua de la recta*** r ***perpendicular a*** π ***que passa pel punt*** $P = (-1, 3, 2)$**.**

(b) ***Trobeu també l'equació cartesiana (és a dir, de la forma*** $Ax + By + Cz + D = 0$***) del pla*** π_1 ***paral·lel a*** π ***que passa pel mateix punt*** P**.**

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Podem agafar com a vector director de la recta el vector característic del pla. Amb això,

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1} .$$

(b) Els plans paral·lels a π tenen per equació $3x - 2y + z + D = 0$. Com que ha de passar pel punt P, cal que

$$3(-1) - 2 \cdot 3 + 2 + D = 0 .$$

D'aquí, $D = 7$. L'equació cartesiana del pla π_1 és $3x - 2y + z + 7 = 0$.

També es pot utilitzar la fórmula $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$; és a dir,

$$3(x + 1) - 2(y - 3) + (z - 2) = 0 .$$

2.- Considereu la matriu $A = \begin{bmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{bmatrix}$***. Sigui*** I_2 ***la matriu identitat d'ordre 2 .***

(a) ***Trobeu el valor del paràmetre*** a ***perquè es compleixi que*** $A^2 - 2A = I_2$ **.**

(b) ***Calculeu la matriu inversa de la matriu*** A ***quan*** $a = -2$ **.**

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Tenim que

$$A^2 - 2A = \begin{bmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2-4a+4 & 2a-2 \\ 2a-2 & a^2 \end{bmatrix} .$$

Perquè $A^2 - 2A = I$ cal que $a^2 - 4a + 4 = 1$, $2a - 2 = 0$, $a^2 = 1$. De la segona equació en deduïm que $a = 1$. Això sí: cal comprovar que aquest valor també és solució de les altres dues equacions.

(b) Comprovem primer si la matriu $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ és invertible, calculant el seu determinant.

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3)(-1) - 1 \cdot 1 = 2 \neq 0 .$$

Com que el determinant és no nul, la matriu és invertible.

Per a calcular la inversa, podem utilitzar diferents mètodes:

• Mètode dels adjunts,

$$A_{11} = -1 \, ; \quad A_{12} = -1 \, ; \quad A_{21} = -1 \, ; \quad A_{22} = -3 \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} .$$

• Mètode de Gauss,

$$\left[\begin{array}{rr|rr} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$
$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -3/2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & -3/2 \end{array}\right]$$

D'aquí, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -3/2 \end{bmatrix}$.

• Recordant que si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, llavors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

3.- Donada la funció $f(x) = \sqrt{x-1}$ i la recta horitzontal $y = k$, amb $k > 0$,

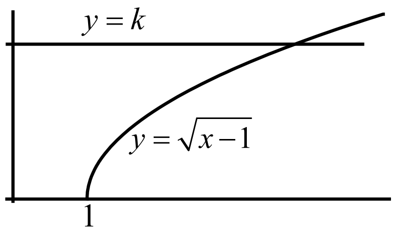
(a) ***Feu un esbós del recinte limitat per les gràfiques de la funció i la recta, i els eixos de coordenades.***

(b) ***Trobeu el valor de k sabent que l'àrea d'aquest recinte és igual a $14/3$.***

[0,5 per l'apartat a; 1,5 per l'apartat b]

Solució

(a) L'esquema demanat és a la figura que es troba a la pàgina següent.



(b) La gràfica de $f(x)$ talla a l'eix d'abscisses en el punt $(1,0)$. Busquem el punt de tall entre la gràfica de la funció i la de la recta,

$$\sqrt{x-1} = k \Longrightarrow x = k^2 + 1\,.$$

L'àrea del recinte és igual a l'àrea del rectangle de base k^2+1 i altura k menys l'àrea que deixa "per sota" la gràfica de la funció; és a dir,

$$A = k(k^2+1) - \int_1^{k^2+1} (x-1)^{1/2}\,dx = k^3 + k - \left[\frac{(x-1)^{3/2}}{3/2}\right]_1^{k^2+1} = k^3 + k - \frac{2k^3}{3} = \frac{k^3}{3} + k.$$

Naturalment, el càlcul també es pot fer com

$$A = \int_0^{k^2+1} k\,dx - \int_1^{k^2+1} (x-1)^{1/2}\,dx = [kx]_0^{k^2+1} - \left[\frac{(x-1)^{3/2}}{3/2}\right]_1^{k^2+1} = k^3 + k - \frac{2k^3}{3} = \frac{k^3}{3} + k.$$

Igualment, el càlcul de la integral de la funció $f(x)$ entre 1 i k^2+1 es pot realitzar pel canvi de variable $x - 1 = t^2$ (d'on $dx = 2t\,dt$). En aquest cas, però, serà necessari fer el canvi de límits d'integració corresponent,

$$\int_1^{k^2+1} \sqrt{x-1}\,dx = \int_0^k \sqrt{t^2}\,2t\,dt = 2\int_0^k t^2\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^k = \frac{2k^3}{3}\,.$$

S'admet també com a correcte el realitzar la primitiva (la integral sense definir) i avaluar-la posteriorment.

$$\int \sqrt{x-1}\,dx = \cdots = \frac{2t^3}{3} + C = \frac{2\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{3} + C \Longrightarrow \int_1^{k^2+1} \sqrt{x-1}\,dx = \left[\frac{2\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{3}\right]_1^{k^2+1} = \frac{2k^3}{3}\,.$$

L'equació $\dfrac{k^3}{3} + k = \dfrac{14}{3}$ es pot escriure també com $k^3 + 3k - 14 = 0$, que té com a única solució (buscada amb el mètode de Ruffini) $k = 2$.

4.- Un triangle d'àrea $3/2$ té dos dels seus vèrtexs als punts $P = (0,0,0)$ i $Q = (2,0,1)$. El tercer vèrtex, R, és un punt de la recta

$$r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

i té la primera coordenada no nul·la. Calculeu les coordenades del vèrtex R.

[2 punts]

De les equacions que defineixen la recta r, es dedueix que qualsevol punt de la recta ha de ser, per exemple, de la forma $R = (-1-z, 1, z)$ (també és possible, evidentment, posar $R = (x, 1, -1-x)$). Hi ha altres formes d'arribar a la mateixa expressió, tal com buscar el vector director de la recta r,

$$v_r = (1,1,1) \times (0,1,0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -i + k = (-1,0,1)\,,$$

un punt de la recta, com $A = (-1,1,0)$ (i molts altres), i construir les equacions paramètriques de la recta, $x = -1-\lambda$, $y = 1$, $z = \lambda$; amb això, $R = (-1-\lambda, 1, \lambda)$.

Una vegada localitzat el punt R, hi ha al menys dos camins per acabar el problema.

Solució 1

L'àrea d'un triangle de vèrtexs P, Q i R es pot calcular mitjançant la fórmula $A = \dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\|$. Amb això,

$$A = \frac{1}{2}\|(2,0,1) \times (-1-z,1,z)\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ -1-z & 1 & z \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\|(-1,-3z-1,2)\| = \frac{1}{2}\sqrt{9z^2+6z+6}\,.$$

Volem que aquesta àrea sigui $3/2$. Per tant, cal resoldre l'equació $\sqrt{9z^2+6z+6} = 3$. Elevant al quadrat i realitzant les operacions adequades, arribem a l'equació $9z^2 + 6z - 3 = 0$, que té com a solucions $z = -1$ i $z = 1/3$.

D'entrada, doncs, hi ha dos possibles punts R,

$$R_1 = (0,1,-1) \;\text{ i }\; R_2 = \left(-\frac{4}{3}, 1, \frac{1}{3}\right).$$

D'acord amb l'enunciat, ens hem de quedar amb el que té la primera component no nul·la. És a dir, $R = (-4/3, 1, 1/3)$.

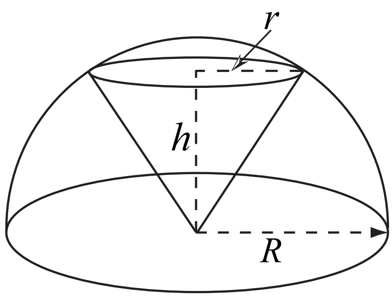
Solució 2

El problema es pot resoldre també buscant una base i l'altura corresponent del triangle. Per exemple, podem fer

$$b = d(P,Q) = \sqrt{2^2+0^2+1^2} = \sqrt{5}\ ; \quad h = d(R,\overline{PQ}) = \frac{\|\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PQ}\|}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{\sqrt{9z^2+6z+6}}{\sqrt{5}}\,.$$

Llavors, $\dfrac{bh}{2} = \dfrac{3}{2}$ ens porta a $\sqrt{9z^2+6z+6} = 3$. A partir d'aquí, se segueix com a la solució 1.

5.- En una semiesfera de radi R inscrivim un con situant el seu vèrtex al centre de la semiesfera, tal com es veu en el dibuix.



(a) ***Sabent que el volum d'un con és igual a l'àrea de la seva base multiplicada per la seva altura i dividida per tres, comproveu que, en aquest cas, podem expressar el volum com*** $V = \dfrac{\pi\cdot h}{3}\left(R^2-h^2\right)$.

(b) ***Trobeu les dimensions d'aquest con (radi de la base i altura) perquè el seu volum sigui màxim, comprovant que es tracta realment d'un màxim.***

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) D'acord amb el que se'ns recorda a l'enunciat, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Al dibuix hi podem trobar un triangle rectangle de catets h i r i hipotenusa R. Llavors,

$$h^2+r^2 = R^2 \Longrightarrow r^2 = R^2-h^2 \Longrightarrow V(h) = \frac{1}{3}\pi(R^2-h^2)h\,,$$

tal com volíem.

(b) Busquem la derivada de la funció volum respecte de la variable h,

$$V(h) = \frac{\pi}{3}\left(R^2h-h^3\right) \Longrightarrow V'(h) = \frac{\pi}{3}\left(R^2-3h^2\right).$$

L'equació $V'(h)=0$ ens porta a què $h = \pm\dfrac{R}{\sqrt{3}} = \pm\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$. No considerem la solució negativa perquè dins del problema no té cap significat.

Amb això, $r = \sqrt{R^2-h^2} = \sqrt{R^2-\dfrac{R^2}{3}} = R\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{R\sqrt{6}}{3}\,.$

Per comprovar que és realment un màxim, calculem la derivada segona de la funció volum, $V''(h) = -2\pi h$, i analitzem el seu signe en el valor trobar per a l'altura. Com que $V''\left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right) < 0$, es tracta d'un màxim.

La comprovació que és un màxim es pot realitzar també estudiant el signe de la primera derivada abans i després del valor trobat per a h (abans ha de ser positiva i després negativa).

6.- Sigui $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$***. Sabem que la gràfica d'aquesta funció és tangent a la recta*** $r : y = x + 3$ ***en el punt d'abscissa*** $x = -1$ ***i que en el punt d'abscissa*** $x = 1$ ***la recta tangent és paral·lela a la recta*** r***.***

Calculeu el valor dels paràmetres a***,*** b ***i*** c***.***

[2 punts]

Solució

Una recta és tangent a una corba en un punt si recta i corba tenen el mateix valor i la mateixa derivada en el punt. Per tant,

$$f(-1) = 2 \;\text{ i }\; f'(-1) = 1\,.$$

El que en $x = 1$ la tangent sigui paral·lela a la recta que ens han donat (és a dir, que aquesta nova tangent tingui el mateix pendent que $y = x + 3$) ens permet assegurar que $f'(1) = 1$.

Com que $f'(x) = 3x^2 + 2a + b$, tenim que

$$f(-1) = 2 \Longrightarrow -1 + a - b + c = 2\,; \quad f'(-1) = 1 \Longrightarrow 3 - 2a + b = 1\,; \quad f'(1) = 1 \Longrightarrow 3 + 2a + b = 1\,.$$

El sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{array}{rrrl} a & -\,b & +\,c = & 3 \\ -2a & +\,b & = & -2 \\ 2a & +\,b & = & -2 \end{array}\right\}$$

té per solució $a = 0$, $b = -2$, $c = 1$.

SÈRIE 5

1.- Siguin π_1 el pla $2x+3y-z=4$ i π_2 el pla $x-2y-4z=10$.

(a) **_Comproveu que els plans π_1 i π_2 són perpendiculars._**

(b) **_Trobeu l'equació contínua de la recta paral·lela als plans π_1 i π_2 i que passa pel punt $P=(-1,3,2)$._**

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Un vector característic de cada un dels plans és $v_1=(2,3,-1)$ i $v_2=(1,-2,-4)$, respectivament. Els plans són perpendiculars si els seus vectors característics també ho són, és a dir, si el producte escalar dels vectors característics dóna zero.

$$v_1 \cdot v_2 = 2\cdot 1 + 3(-2) + (-1)(-4) = 2-6+4 = 0\,.$$

(b) Si la recta r és paral·lela als dos plans, el seu vector director v_r és perpendicular als vectors característics del dos plans. Per tant, podem agafar

$$v_r = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -14i+7j-7k = (-14,7,-7)\,,$$

o qualsevol proporcional a ell com, per exemple, $(2,-1,1)$. L'equació buscada és

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1}\,.$$

2.- La matriu de coeficients d'un sistema d'equacions lineals homogeni és

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 4 & 1 & 2a+2 \end{bmatrix}\,.$$

(a) **_Per a quins valors del paràmetre a el sistema té una sola solució? Quina és aquesta solució única?_**

(b) **_Resoleu el sistema si $a=2$._**

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Els sistemes homogenis (aquells en què tots el termes independents són nuls) són sempre compatibles. Per tant, cal buscar el valor de a perquè sigui determinat. És a dir, els valors de a perquè rang $A=3$. Ho podem fer calculant el determinant d'aquesta matriu.

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 4 & 1 & 2a+2 \end{vmatrix} = 2a^2+4a-16\,.$$

L'equació $2a^2+4a-16=0$ té com a solucions $a=-4$, $a=2$. Llavors, si $a\neq -4$ i $a\neq 2$, el rang de la matriu A és igual a 3 , el sistema és compatible determinat i l'única solució és la solució trivial, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

També es pot resoldre la qüestió buscant el rang de la matriu A mitjançant el mètode de Gauss,

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 4 & 1 & 2a+2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5-a & 6 \\ 0 & 9 & 2a+14 \end{bmatrix}$$

Aconseguida aquesta nova matriu, el mètode de Gauss es fa bastant feixuc i el millor és imposar la proporcionalitat de les files segona i tercera,

$$\frac{5-a}{9} = \frac{6}{2a+14} \Longrightarrow 2a^2 + 4a - 16 = 0 \Longrightarrow a = 2\,, \quad a = -4$$

Atenció: per imposar la proporcionalitat estem suposant que $a \neq 7$, la qual cosa es confirma quan es resol l'equació. De fet, per a $a = 7$ les files considerades no són proporcionals.

(b) Per $a = 2$, la matriu de coeficients del sistema es transforma en

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 9 & 18 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema $-x + 2y + 3z = 0$, $y + 2z = 0$ és equivalent a l'original. Si prenem z com a paràmetre, la solució és $x = -z$, $y = -2z$.

3.- Donats els punts $P = (1, -1, 2)$ ***,*** $Q = (2, 0, 1)$ ***i*** $R = (3, 2, -1)$***,***

(a) ***Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma*** $Ax + By + Cz + D = 0$***) del pla que determinen.***

(b) ***Trobeu un punt*** S ***pertanyent a la recta*** $r : \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-5}{-3}$ ***, de manera que el tetraedre de vèrtexs*** P ***,*** Q ***,*** R ***,*** S ***tingui volum 1/2 .***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) L'equació cartesiana del pla, $Ax + By + Cz + D$, ha de ser satisfeta pels tres punts donats. Per tant,

$$\left.\begin{aligned} A\cdot 1 + B(-1) + C\cdot 2 + D &= 0 \\ A\cdot 2 + B\cdot 0 + C\cdot 1 + D &= 0 \\ A\cdot 3 + B\cdot 2 + C(-1) + D &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

La solució d'aquest sistema d'equacions és $A = 0$, $B = -D$, $C = -D$. Fent $D = 1$, l'equació del pla buscat és $y + z - 1 = 0$.

Aquest apartat es pot resoldre d'altres maneres. Per exemple, trobant directament l'equació fent

$$\begin{vmatrix} 2-1 & 3-1 & x-1 \\ 0+1 & 2+1 & y+1 \\ 1-2 & -1-2 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \iff y + z - 1 = 0\,.$$

(b)

Solució 1

El punt S, per pertànyer a la recta r, és de la forma $S=(5+2\lambda,1-\lambda,5-3\lambda)$. El volum del tetraedre de vèrtexs P , Q , R i S és

$$V=\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PS}\right)\right|=\frac{1}{6}|\begin{vmatrix}1&2&4+2\lambda\\1&3&2-\lambda\\-1&-3&3-3\lambda\end{vmatrix}|=\frac{1}{6}|5-4\lambda|\,.$$

Com que volem que $V=1/2$, ens queda $|5-4\lambda|=3$. Això ens dóna dues possibilitats:

- $5-4\lambda=3$; • $5-4\lambda=-3$.

De la primera, $\lambda=\dfrac{1}{2}$ i el punt és $S_1=\left(6,\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{2}\right)$; de la segona, $\lambda=2$ i el punt buscat és $S_2=(9,-1,-1)$. Com que solament es demana un punt, la solució és qualsevol dels dos punts.

Solució 2

Sigui $S=(x,y,z)$ el punt buscat. El volum dels tetraedre és

$$V=\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PS}\right)\right|=\frac{1}{6}|\begin{vmatrix}1&2&x-1\\1&3&y+1\\-1&-3&z-2\end{vmatrix}|=\frac{1}{6}|y+z-1|\ ;\ \ V=\frac{1}{2}\iff|y+z-1|=3\,.$$

De l'expressió contínua de l'equació de la recta se'n treuen dues equacions; per exemple, $x+2y=7$, $3y-z=-2$. Amb elles i la que ens proporciona el volum del tetraedre podem muntar dos sistemes,

$$\left.\begin{array}{l}y+z-1=3\\x+2y=7\\3y-z=-2\end{array}\right\}$$

que té per solució $x=6$, $y=1/2$, $z=7/2$, i

$$\left.\begin{array}{l}y+z-1=-3\\x+2y=7\\3y-z=-2\end{array}\right\}$$

amb la solució $x=9$, $y=-1$, $z=-1$.

Solució 3

Ja que tenim l'equació del pla determinat pels punts P, Q i R, podem buscar el volum del tetraedre amb la fórmula $V=\dfrac{A_b\cdot h}{3}$, essent A_b l'àrea del triangle base i h l'altura del tetraedre.

$$A_b=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\|=\|(0,1,1)\|=\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

$$h=d(S,\pi)=\frac{|y+z-1|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\frac{|y+z-1|}{\sqrt{2}}\,.$$

Llavors,

$$V=\frac{A_b\cdot h}{3}=\frac{1}{6}|y+z-1|\,.$$

A partir d'aquí se segueix com a la solució 2 . Evidentment, el procés és igualment correcte agafant $S=(5+2\lambda,1-\lambda,5-3\lambda)$.

4.- Per a $x \geq 1$, considereu la funció $f(x) = +\sqrt{x-1}$.

(a) ***Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa igual a 10 .***

(b) ***Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de $f(x)$, la recta d'equació $x = 5$ i l'eix OX.***

[1 punt per cada apartat]

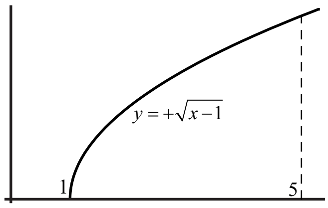
Solució

(a) L'equació de la recta tangent a la gràfica d'una funció $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = a$ és $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. En el nostre cas, i com que $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$, tenim

$$a = 10\,; \qquad f(10) = \sqrt{10-1} = 3\,; \qquad f'(10) = \frac{1}{2\sqrt{10-1}} = \frac{1}{6}\,.$$

L'equació buscada és $y = 3 + \dfrac{1}{6}(x - 10)$ o, en forma implícita, $x - 6y + 8 = 0$.

(b) Busquem la intersecció entre l'eix OX i la corba. L'equació $y = 0$ és la que correspon a aquest eix. Per tant el punt de tall és la solució de $+\sqrt{x-1} = 0$, és a dir, $x = 1$.



L'àrea buscada és

$$A = \int_1^5 \sqrt{x-1}\,dx = \int_1^5 (x-1)^{1/2}\,dx = \left[\frac{(x-1)^{3/2}}{3/2}\right]_1^5 = \frac{2}{3}\,\left[(5-1)^{3/2} - 0\right] = \frac{16}{3}\,.$$

Aquesta integral es pot calcular també per canvi de variable, fent $x - 1 = t^2$. D'aquí, $dx = 2\,dt$, per $x = 1$ la nova variable val $t = 0$ i quan $x = 5$, llavors $t = 2$; per tant,

$$\int_1^5 \sqrt{x-1}\,dx = \int_0^2 \sqrt{t^2}\cdot 2t\,dt = 2\int_0^2 t^2\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}\,.$$

Quan es fa el canvi de variable és molt important canviar també els límits.

Si no es vol canviar els límits, es pot treballar la integral com a primitiva ("integral indefinida") i desfer el canvi al final. És a dir,

$$\int \sqrt{x-1}\,dx = \int \sqrt{t^2}\cdot 2t\,dt = 2\int t^2\,dt = \frac{2t^3}{3} + C = \frac{2\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{3} + C\,.$$

Amb això,

$$\int_1^5 \sqrt{x-1}\,dx = \left[\frac{2\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{3}\right]_1^5 = \frac{2}{3}\left(\left(\sqrt{5-1}\right)^3 - 0\right) = \frac{16}{3}\,.$$

5.- Considereu els punts $A = (-1, 2, 4)$ i $B = (3, 0, -2)$.

(a) **Trobeu l'equació del pla format per tots els punts que equidisten de A i B.**

(b) **Donat un punt $C = (x, y, z)$, dividim el segment $\overline{AC}$ en tres parts iguals, obtenint els punts A, A_1, B i C. Trobeu el punt C.**

[1 punt per cada apartat]

(a) Descriurem dues solucions.

Solució 1

Els punts X que equidisten de A i B compleixen que $d(A, X) = d(B, X)$. És a dir,

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + (z+2)^2}\,.$$

Elevant al quadrat els dos membres de l'equació, fent les operacions indicades i les simplificacions adequades, arribem a $2x - y - 3z + 2 = 0$, que és l'equació del pla buscat.

Solució 2

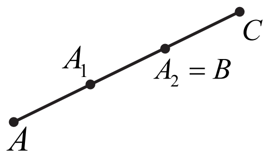
El pla buscat és el que passa pel punt mig del segment $\overline{AB}$, amb vector característic $\overrightarrow{AB}$. El punt mig és $M = \dfrac{A+B}{2} = (1, 1, 1)$, i el vector és $\overrightarrow{AB} = (4, -2, -6)$. L'equació del pla es pot escriure com

$$4(x-1) - 2(y-1) - 6(z-1) = 0\,; \quad \text{és a dir,} \quad 2x - y - 3z + 2 = 0\,.$$

(b) Explicitarem tres solucions.

Solució 1

Quan dividim un segment $\overline{AC}$ en tres parts iguals, obtenim dos nous punts A_1 i A_2 de manera que $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_2C}$.



A l'enunciat ens diuen que $A_2 = B$. Llavors,

$$\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AA_1} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{AC} = 3 \cdot \overrightarrow{AA_1}\,.$$

D'aquí, $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(B - A) = \frac{1}{2}(4, -2, -6) = (2, -1, -3)\,; \quad \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(x+1, y-2, z-4)\,.$$

Finalment, de que $\dfrac{1}{3}(x+1, y-2, z-4) = (2, -1, -3)$ se'n dedueix $x = 5$, $y = -1$ i $z = -5$. El punt buscat és $C = (5, -1, -5)$.

Solució 2

L'equació vectorial de la recta que passa pels punts A i B és

$$X = A + \lambda\overrightarrow{AB}\,, \quad \text{és a dir,} \quad X = (-1, 2, 4) + \lambda(4, 2, -6).$$

És evident que per $\lambda = 1$, tenim que $X = B$. Llavors, per $\lambda = 3/2$ obtindrem el punt C,

$$C = A + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 4) + \frac{3}{2}(4, -2, -6) = (5, -1, -5).$$

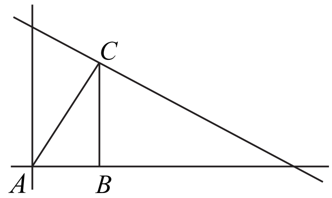
Solució 3

Podem observar que A_1 és el punt mig del segment $\overline{AB}$ i que B és el punt mig del segment $\overline{A_1C}$. Llavors,

$$A_1 = \frac{A+B}{2} = (1, 1, 1) \quad \text{i} \quad B = \frac{A_1 + C}{2} \Longrightarrow (3, 0, -2) = \frac{1}{2}(x+1, y+1, z+1).$$

La solució és $x = 5$, $y = -1$ i $z = -5$.

6.- Un triangle rectangle situat en el primer quadrant té el vèrtex A en l'origen de coordenades, el vèrtex $B = (x, 0)$ en el semieix positiu d'abscisses i el vèrtex C pertany a la recta $x + 2y = 8$. L'angle recte és el que correspon al vèrtex B.



(a) ***Comproveu que l'àrea del triangle es pot expressar com $A(x) = 2x - \dfrac{x^2}{4}$.***

(b) ***Trobeu els vèrtexs B i C perquè l'àrea del triangle sigui màxima i comproveu que es tracta realment d'un màxim.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Sigui $B = (x, 0)$. Llavors el punt C és $C = (x, f(x)) = \left(x, \dfrac{8-x}{2}\right)$. Com que el triangle és rectangle, podem agafar com a base el costat $\overline{AB}$ i com a altura el costat $\overline{BC}$ (els catets del triangle). Llavors,

$$A(x) = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{x \cdot \frac{8-x}{2}}{2} = \frac{8x - x^2}{4} = 2x - \frac{x^2}{4}.$$

(b) Per trobar els extrems d'aquesta funció, trobarem els punts on la seva derivada és nul·la.

$$A'(x) = 2 - \frac{x}{2}; \qquad A'(x) = 0 \iff x = 4.$$

Llavors, els vèrtexs del triangle són $B = (4, 0)$ i $C = (4, 2)$.

Comprovem ara que és un màxim. Calculem la segona derivada de la funció àrea, $A''(x) = -\dfrac{1}{2} < 0$. Com que aquest valor és negatiu, es tracta d'un màxim.

Una altra manera de decidir que és un màxim consisteix en estudiar el signe de $A'(x)$ abans del valor $x = 4$ (signe positiu) i després d'aquest valor (signe negatiu).

També es pot raonar que la funció $A(x)$ és una paràbola amb el coeficient de x^2 negatiu i que, per tant, el seu vèrtex (l'extrem relatiu) correspon a un màxim.

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2012-2013

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Sigui $V = \{(-1, 1, 1), (-2, -1, 0), (1, 2, a)\}$ un conjunt de vectors de $\mathbb{R}^3$.

a) Trobeu el valor o els valors de a perquè V sigui linealment dependent.

b) Quan $a = 4$, expresseu el vector $\vec{v} = (3, 9, 14)$ com a combinació lineal dels vectors de V.

[1 punt per cada apartat]

2. De la funció polinòmica $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ sabem que

— té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -3$;

— la integral definida en l'interval $[0, 1]$ val $-\dfrac{5}{4}$.

Calculeu el valor dels paràmetres a i b.

[2 punts]

3. Donats el pla π: $x + 2y - z = 3$ i la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z+m}{4}$,

a) Comproveu que el vector característic (o normal) de π i el vector director de r són perpendiculars.

b) Estudieu la posició relativa de π i r en funció del paràmetre m.

[1 punt per cada apartat]

4. Siguin les matrius

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & b & 4 \\ 3 & c & 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 5 & b & 8 \\ 1 & c & 3 \\ 4 & a & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 5 & 5 \\ -b & -a & -2 \end{bmatrix},$$

on a, b i c són paràmetres reals. Calculeu el valor d'aquests paràmetres perquè cap de les tres matrius tingui inversa.

[2 punts]

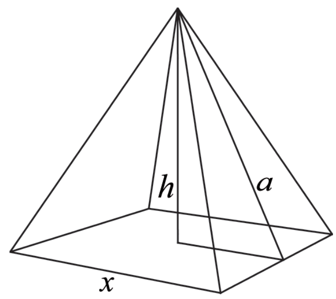
5. Donats el pla π: $2x - y + 3z - 8 = 0$ i el punt $P = (6, -3, 7)$,

a) Trobeu l'equació contínua de la recta que passa per P i és perpendicular a π.

b) Trobeu el punt del pla π que està més proper al punt P.

[1 punt per cada apartat]

6. Volem construir una tenda en forma de piràmide regular de base quadrada. Disposem de 300 m² de tela per a la fabricació de les quatre cares de la tenda (se suposa que en l'elaboració de les cares no es perd gens de tela). Designem x la longitud d'un costat de la base de la tenda.



a) Sabent que el volum d'una piràmide és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura, comproveu que, en aquest cas,

$$V(x) = \frac{x\sqrt{(9\times 10^4) - x^4}}{6}$$

b) Determineu el valor de x perquè el volum sigui el més gran possible (no cal que comproveu que el valor obtingut correspon realment a un màxim).

[1 punt per cada apartat]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

SÈRIE 1

1.- Sigui $V = \{(-1,1,1),(-2,-1,0),(1,2,a)\}$ ***un conjunt de vectors de*** $\mathbb{R}^3$.

(a) **Trobeu el valor o valors de** a **perquè** V **sigui linealment dependent.**

(b) **Quan** $a = 4$**, expresseu el vector** $\vec{v} = (3,9,14)$ **com a combinació lineal dels vectors de** V**.**

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Hi ha diferents formes de comprovar la dependència lineal de V. Per exemple, podem calcular el determinant de la matriu formada pels tres vectors,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \Longrightarrow \det A = 3a - 3\,.$$

Aquest determinant val zero si i sol el conjunt V és linealment dependent. Com que l'equació $3a-3=0$ té per solució $a = 1$, aquest és el valor demanat.

Podem buscar també el rang de la matriu A, que haurà de ser menor que 3 si volem que el conjunt V sigui linealment dependent

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & a+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & a+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix}.$$

Les transformacions elementals realitzades han estat: (1) $F_2 + F_1$ i $F_3 + F_1$; (2) $F_2/3$ (3) $F_3 - 2F_2$.

El rang de la matriu A és diferent de tres si i sol si $a = 1$.

Un altre camí de resolució és utilitzar directament la definició de conjunt linealment dependent. Cal plantejar l'equació vectorial

$$\alpha(-1,1,1) + \beta(-2,-1,0) + \gamma(1,2,a) = (0,0,0).$$

Si podem trobar valors per a les variables α, β i γ que no siguin tots nuls, el conjunt V serà linealment dependent. Ens queda el sistema

$$\left.\begin{array}{l} -\alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma \ = 0 \\ \alpha + a\gamma \quad\ = 0 \end{array}\right\}$$

De la tercera equació en traiem que $\alpha = -a\gamma$. Portant aquest valor a les altres dues,

$$\left.\begin{array}{l} -2\beta + (a+1)\gamma = 0 \\ -\beta + (2-a)\gamma \ = 0 \end{array}\right\}$$

Aïllant el valor de β a la segona d'aquestes equacions i substituint-lo a la primera obtenim $(-3+3a)\gamma = 0$. Com que volem que $\gamma \neq 0$ (si aquesta variable fos nul·la també ho serien les altres dues), necessitem que $-3+3a = 0$; és a dir, $a = 1$.

La qüestió es pot resoldre també buscant el valor del paràmetre a perquè el tercer vector sigui combinació lineal dels altres dos (amb la qual cosa el conjunt V seria linealment dependent).

$$\alpha(-1,1,1) + \beta(-2,-1,0) = (1,2,a) \Longrightarrow \alpha = 1\,,\ \beta = -1\,,\ a = 1\,.$$

(b) Plantegem l'equació vectorial $\alpha(-1,1,1) + \beta(-2,-1,0) + \gamma(1,2,4) = (3,9,14)$, que ens porta al sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{array}{l} -\alpha - 2\beta + \gamma = \ 3 \\ \alpha - \beta + 2\gamma \ = \ 9 \\ \alpha + 4\gamma \quad\ = 14 \end{array}\right\},$$

Aquest sistema té per solució $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 3$. Per tant, la resposta a aquest apartat és

$$\vec{v} = 2(-1,1,1) - (-2,-1,0) + 3(1,2,4)\,.$$

PAUTES DE CORRECCIÓ

Apartat (a)

0,5 punts per plantejar qualsevol dels mètodes descrits (o per un altre si és correcte).

0,5 punts per arribar al valor de $a = 1$.

Apartat (b)

0,5 punts pel planteig de l'equació vectorial a resoldre o si escriuen directament el sistema d'equacions lineals.

0,25 punts per trobar el valor dels coeficients.

0,25 punts per posar el vector $\vec{v}$ igual a la combinació lineal dels vectors de V.

2.- De la funció polinòmica $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ sabem que

- ***té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -3$.***
- ***la integral definida en l'interval $[0,1]$ val $-\dfrac{5}{4}$.***

Calculeu el valor dels paràmetres a i b.

[2 punts]

Solució

Si la funció té un extrem relatiu en el punt on $x = -3$ sabem que $P'(-3) = 0$. Com que $P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, ens queda l'equació

$$3(-3)^2 + 2a(-3) + b = 0\,.$$

Per altra banda, tenim que

$$\int_0^1 (x^3 + ax^2 + bx + 2)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 2 = -\frac{5}{4}\,.$$

En definitiva, hem obtingut el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcl} -6a & + & b & = & -27 \\ \dfrac{a}{3} & + & \dfrac{b}{2} & = & -\dfrac{7}{2} \end{array}\right\}\,,$$

que té per solució $a = 3$ i $b = -9$.

PAUTES DE CORRECCIÓ

0,5 punts per saber interpretar la condició per tenir un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -3$.

0,25 punts pel planteig de la integral.

0,5 punts pel càlcul de la primitiva.

0,25 punts per l'aplicació de la regla de Barrow, arribant a la segona equació.

0,5 punts per la resolució del sistema.

3.- Donats el pla $\pi\colon x+2y-z=3$ **i la recta** $r\colon \dfrac{x-1}{2}=y=\dfrac{z+m}{4}$ **,**

(a) ***Comproveu que el vector característic (o normal) de*** π ***i el vector director de*** r ***són perpendiculars.***

(b) ***Estudieu la posició relativa de*** π ***i*** r ***en funció del paràmetre*** m***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) El vector característic del pla és $v_\pi=(1,2,-1)$; el vector director de la recta és $v_r=(2,1,4)$. Aquests vectors seran perpendiculars si i sol si el seu producte escalar és nul.

$$(1,2,-1)\cdot(2,1,4)=1\cdot 2+2\cdot 1+(-1)\cdot 4=2+2-4=0\,,$$

(b) Tenint en compte l'apartat anterior, la recta i el pla solament poden ser paral·lels o incidents (la recta està continguda dins del pla). En aquest segon cas, qualsevol punt de la recta ha de complir l'equació del pla. Agafem el punt $P=(1,0,-m)$; aquest punt pertany al pla si i sol si $1+2\cdot 0-(-m)=3$; és a dir, si i sol si $m=2$.

En definitiva, si $m=2$, la recta està continguda al pla; si $m\neq 2$, la recta i el pla són paral·lels.

Pautes de Correcció

Apartat a

0,5 punts per localitzar el vector característic del pla i el director de la recta.

0,25 punts per efectuar el producte escalar.

0,25 punts per concloure que són perpendiculars perquè el seu producte escalar val zero.

Apartat b

0,5 punts per raonar, a la vista del resultat anterior, que el pla i la recta solament poden ser paral·lels o incidents (recta continguda al pla).

0,25 punts per raonar que, si són incidents, qualsevol punt de la recta ha de ser del pla.

0,25 punts per arribar al valor $m=2$ i discutir quina és la posició relativa en funció de m.

4.- Siguin les matrius $A=\begin{bmatrix}2&a&1\\1&b&4\\3&c&5\end{bmatrix}$**,** $B=\begin{bmatrix}5&b&8\\1&c&3\\4&a&3\end{bmatrix}$ **i** $C=\begin{bmatrix}2&4&7\\-1&5&5\\-b&-a&-2\end{bmatrix}$**, on** a**,** b **i** c **són paràmetres reals. Calculeu el valor d'aquests paràmetres perquè cap de les tres matrius tingui inversa.**

[2 punts]

Solució

Una matriu quadrada no té inversa si i sol si el seu determinant val zero. Tenim

$$\det A=7a+7b-7c\,;\qquad \det B=-7a+9b-17c\,;\qquad \det C=17a+15b-28\,.$$

Les tres matrius seran no invertibles quan el valor de cada paràmetre sigui la solució del sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 7a & + & 7b & - & 7c & = & 0 \\ -7a & + & 9b & - & 17c & = & 0 \\ 17a & + & 15b & & & = & 28 \end{array}\right\} ,$$

és a dir, quan $a = -1$, $b = 3$ i $c = 2$.

Pautes de Correcció

0,25 punts per raonar que els determinants han de ser nuls.

0,25 punts pel càlcul de cada un dels determinants ($3 \times 0,25 = 0,75$).

0,5 punts per la construcció del sistema.

0,5 punts per la seva resolució.

5.- Donats el pla $\pi : 2x - y + 3z - 8 = 0$ i el punt $P = (6, -3, 7)$,

(a) Trobeu l'equació contínua de la recta que passa per P i és perpendicular a π.

(b) Trobeu el punt del pla π que està més proper al punt P.

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Podem agafar com a vector director de la recta que busquem el vector característic del pla π; llavors, l'equació contínua de la recta és

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-7}{3} \,.$$

(b) El punt del pla més proper al punt P és el que es troba a la recta perpendicular al pla passant per P. Així, el punt que estem buscant és la solució de les equacions

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-7}{3}, \quad \text{juntament amb} \quad 2x - y + 3z - 8 = 0 \,.$$

Hi ha vàries formes de resoldre el sistema. Una d'elles és convertint l'equació contínua de la recta en dues equacions,

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y+3}{-1} \Longrightarrow x + 2y = 0 \,; \qquad \frac{y+3}{-1} = \frac{z-7}{3} \Longrightarrow 3y + z = -2 \,.$$

Ajuntant aquestes dues equacions amb la del pla ens queda un sistema,

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & & & = & 0 \\ & & 3y & + & z & = & -2 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 8 \end{array}\right\} ,$$

que té per solució $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$.

Una altra forma és passar l'equació de la recta a la forma paramètrica,

$$x = 6 + 2\lambda \ , \quad y = -3 - \lambda \ , \quad z = 7 + 3\lambda \ ,$$

i substituir aquests valors a l'equació del pla,

$$2x - y + 3z - 8 = 0 \Longrightarrow 2(6 + 2\lambda) - (-3 - \lambda) + 3(7 + 3\lambda) - 8 = 0 \Longrightarrow 14\lambda + 28 = 0 \Longrightarrow \lambda = -2\,.$$

Les coordenades del punt són $x = 6 + 2(-2) = 2$, $y = -3 - (-2) = -1$, $z = 7 + 3(-2) = 1$.

D'una manera o altra, el punt buscat és $Q = (2, -1, 1)$.

Pautes de Correcció

Apartat a

0,5 punts per raonar que podem agafar com a vector director de la recta el vector característic del pla.

0,5 punts per l'equació en forma contínua de la recta. Encara que és difícil que ho facin, si donen com a solució qualsevol altra forma de l'equació de la recta, compteu solament 0,25 punts.

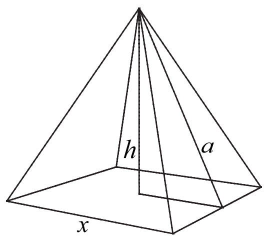
Apartat b

0,5 punts per raonar que el punt buscat és la intersecció entre el pla π i la recta trobada a l'apartat anterior.

0,5 punts per trobar el punt més proper.

Si es "llancen" a fer el punt d'intersecció sense explicar el perquè, no compteu res d'aquest apartat. La raó és que es demana el punt més proper, no el punt d'intersecció.

6.-Volem construir una tenda en forma de piràmide regular de base quadrada. Disposem de $300\,m^2$ de tela per a la fabricació de les quatre cares de la tenda (se suposa que en l'elaboració de les cares no es perd gens de tela). Designem x la longitud d'un costat de la base de la tenda.



(a) ***Sabent que el volum d'una piràmide és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura, comproveu que, en aquest cas,***

$$V(x) = \frac{x\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}{6}\,.$$

(b) ***Determineu el valor de x perquè el volum sigui el més gran possible (no cal que comproveu que el valor obtingut correspon realment a un màxim).***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Anomenem a a l'altura d'una de les cares de la tenda, tal com està indicat al dibuix. Llavors, la superfície total de les quatre cares de la tenda és $S(x) = 4\left(\dfrac{ax}{2}\right) = 2ax$. Com que aquesta superfície és de $300\,m^2$, tenim que $2ax = 300$, és a dir, $a = \dfrac{150}{x}$.

Per altra banda, d'acord amb el teorema de Pitàgores, $a^2 = h^2 + (x/2)^2$. Per tant,

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{150}{x}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}{2x}.$$

Amb això,

$$V(x) = \frac{1}{3}x^2 h = \frac{x\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}{6}.$$

(b) Per a determinar el valor de x que fa màxim el volum, hem de derivar la funció volum i determinar els punts on la derivada s'anul·li.

$$V'(x) = \frac{1}{6}\left[\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4} + \frac{x}{2\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}\left(-4x^3\right)\right] = \frac{3 \cdot 10^4 - x^4}{2\sqrt{9 \cdot 10^4 - x^4}}.$$

Aquesta derivada val zero quan $x = \sqrt[4]{3 \cdot 10^4} = 10\sqrt[4]{3} \simeq 13,1607$.

També es pot treballar amb la funció $f(x) = x^2(9 \cdot 10^4 - x^4)$, resultat d'haver descartat els factors constants i haver elevat al quadrat la funció volum. Amb ella,

$$f'(x) = 18 \cdot 10^4 x - 6x^5\,; \quad f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \;\text{ o }\; x = 10\sqrt[4]{3}.$$

La primera d'aquestes solucions és absurda (si $x = 0$ no hi ha tenda) i la segona és la resposta correcta.

Pautes de Correcció

Apartat a

0,25 punts per la relació $2ax = 300$.

0,25 punts per la relació entre h, a i x.

0,25 punts per trobar el valor de h en funció de x.

0,25 punts per l'expressió definitiva de la funció volum.

Apartat b

0,5 punts pel càlcul de la derivada, tant si treballen amb $V(x)$ o amb la funció "quadrat", $f(x)$.

0,5 punts per trobar el valor de x.

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2014

Matemàtiques

Sèrie 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu la matriu $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$, per a $a \in \mathbb{R}$.

a) Calculeu el rang de la matriu $\boldsymbol{M}$ en funció dels valors del paràmetre a.

[1 punt]

b) Discutiu i resoleu el sistema d'equacions lineals

$$\boldsymbol{M} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

segons els valors del paràmetre a.

[1 punt]

2. Considereu el punt $A = (1, 2, 3)$.

a) Calculeu el punt simètric del punt A respecte de la recta d'equació

$$r: (x, y, z) = (3 + \lambda, 1, 3 - \lambda).$$

[1 punt]

b) Calculeu el punt simètric del punt A respecte del pla que té per equació

$$\pi: x + y + z = 3.$$

[1 punt]

3. Un nedador és al mar en un punt N, situat a 3 km d'una platja recta, i just al davant d'un punt S, situat a la platja arran de l'aigua; i vol anar a un punt A, situat també arran de l'aigua i a 6 km del punt S, de manera que el triangle NSA és rectangle en el vèrtex S. El nedador neda a una velocitat constant de 3 km/h i camina a una velocitat constant de 5 km/h.

a) Si P és un punt entre el punt S i el punt A que està a una distància x de S, demostreu que el temps, en hores, que necessita el nedador per a nedar del punt N al punt P i caminar des del punt P fins al punt A és determinat per l'expressió $t(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\dfrac{6-x}{5}$.

[1 punt]

b) Calculeu el valor de x que determina el temps mínim que cal per a anar del punt N al punt A, passant per P. Quin és el valor d'aquest temps mínim?

[1 punt]

4. Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada en el primer quadrant per les gràfiques de les funcions $y=x^2$, $y=4x^2$ i $y=9$.

[2 punts]

5. Siguin r i s les rectes de $\mathbb{R}^3$ d'equacions $r\colon \dfrac{x-2}{3}=y=\dfrac{z+1}{4}$ i $s\colon (x,y,z)=(1+2\alpha, 3-\alpha, 4+3\alpha)$, amb $\alpha\in\mathbb{R}$.

a) Comproveu que els punts mitjans dels segments que tenen un extrem situat sobre la recta r i l'altre extrem situat sobre la recta s formen un pla.

[1 punt]

b) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax+By+Cz=D$) del pla de l'apartat anterior.

[1 punt]

6. Responeu a les qüestions següents:

a) Demostreu que si $\boldsymbol{A}$ és una matriu quadrada que satisfà la igualtat $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$, on $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat, aleshores $\boldsymbol{A}$ és invertible i $\boldsymbol{A}^{-1}$ satisfà $(\boldsymbol{A}^{-1})^2=\boldsymbol{I}$.

[1 punt]

b) Calculeu l'expressió general de les matrius de la forma $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ amb $b\neq 0$ que satisfan la igualtat $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$.

[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2014

Matemàtiques

Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu la funció $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$.

a) Calculeu les asímptotes verticals, horitzontals i obliqües de la funció *f*.

[1 punt]

b) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció *f* en aquells punts en què la recta tangent sigui paral·lela a la recta $y=-5x+4$.

[1 punt]

2. Responeu a les qüestions següents:

a) Discutiu el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} (k-1)y+(k^2-1)z=0 \\ (4k+1)x-y-7z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

en funció dels valors de *k*.

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per a $k=1$.

[1 punt]

3. Siguin els punts $P=(1,1,0)$, $Q=(1,0,1)$ i $R=(0,1,1)$ i el pla π: $x+y+z=4$.

a) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax+By+Cz=D$) del pla que passa pels punts *P*, *Q* i *R*.

[1 punt]

b) Si *S* és un punt de π, comproveu que el volum del tetraedre de vèrtexs *P*, *Q*, *R* i *S* no depèn del punt *S*.

[1 punt]

4. Donats els plans $\pi_1: x - 4y + z = 2m - 1$ i $\pi_2: 2x - (2m + 2)y + 2z = 3m + 1$,

a) Determineu els valors de m perquè els plans π_1 i π_2 s'intersequin en una recta i calculeu un vector director de la recta resultant que no depengui de m.

[1 punt]

b) Sigui el pla $\pi: 3x - 2y + 3z = 8$. Estudieu la posició relativa del pla π amb la recta r definida per la intersecció dels plans π_1 i π_2 quan $m = 1$.

[1 punt]

5. Responeu a les qüestions següents:

a) Si $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ són dues matrius quadrades d'ordre n, demostreu que

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}.$$

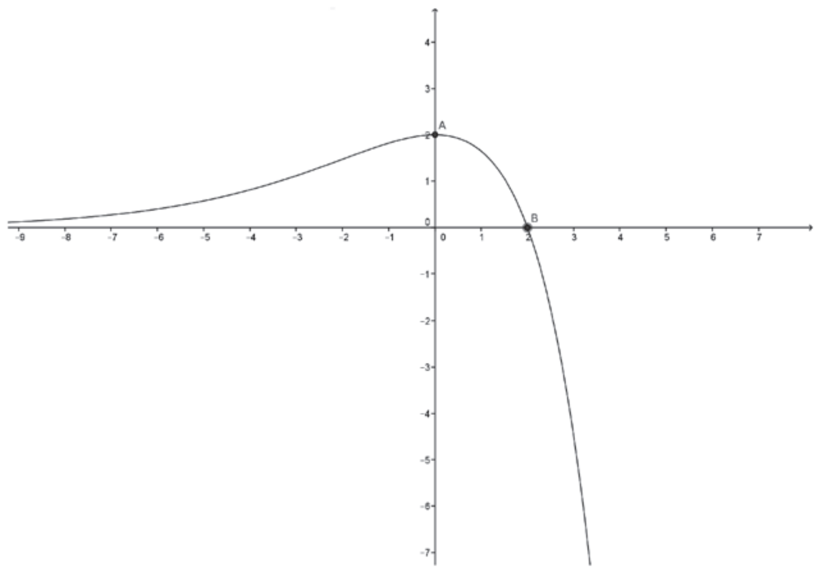
[1 punt]

b) Si $\boldsymbol{M}_1$ i $\boldsymbol{M}_2$ són dues matrius de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, amb $a, b \in \mathbb{R}$, comproveu que el producte $\boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{M}_2$ té també la mateixa forma i que $\boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{M}_2 \cdot \boldsymbol{M}_1$.

[1 punt]

6. Responeu a les qüestions següents:

a) La funció $f(x) = (b - x)e^{ax}$, amb a i b constants, té la representació gràfica següent



i sabem que passa pels punts $A = (0, 2)$ i $B = (2, 0)$, i que en el punt A la recta tangent a la gràfica és horitzontal. Calculeu els valors de a i b.

[1 punt]

b) Calculeu $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

SÈRIE 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix},$$

per a $a \in \mathbb{R}$.

a) Calculeu el rang de la matriu M en funció dels valors del paràmetre a.
[1 punt]

b) Discutiu i resoleu el sistema d'equacions lineals

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

segons els valors del paràmetre a.
[1 punt]

Resolució:

a) Per a calcular el rang de la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$ aplicarem transformacions elementals per a triangular la matriu (mètode de Gauss)

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & (a+1)^2 - a^2 \\ 0 & -1 & (a-1)^2 - a^2 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\rightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & -1 & -2a+1 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Una vegada hem fet les següents transformacions:

(1) A la segona fila restar-li la primera
A la tercera fila restar-li la primera
(2) Operar a les files segona i tercera
(3) A la tercera fila sumar-li la segona

Per tant, podem veure que independentment del valor de a, la matriu M és sempre equivalent amb una de triangular amb tres files no nul·les i per tant $rang(M) = 3$.

b) El sistema $M\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ té per matriu associada la matriu M, quadrada i de rang màxim i igual al nombre d'incògnites. Per tant, per a qualsevol valor del paràmetre a el sistema serà compatible determinat, amb solució única. La solució la podem obtenir aplicant el mètode de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\1 & a+1 & (a+1)^2\\1 & a-1 & (a-1)^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\1 & a+1 & (a+1)^2\\1 & a-1 & (a-1)^2\end{vmatrix}}=1,\ y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & a^2\\1 & 1 & (a+1)^2\\1 & 1 & (a-1)^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\1 & a+1 & (a+1)^2\\1 & a-1 & (a-1)^2\end{vmatrix}}=0,\ z=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & 1\\1 & a+1 & 1\\1 & a-1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\1 & a+1 & (a+1)^2\\1 & a-1 & (a-1)^2\end{vmatrix}}=0.$$

Per a qualsevol valor de a la solució del sistema és $\boxed{x=1, y=0,\ z=0}$.

Observació: A la resolució de l'apartat ***b)*** també es podia haver fet servir el mètode de Gauss de manera anàloga al que s'ha fet per a l'apartat ***a)***.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts pel primer pas de triangulació.

0,25 punts pel segon pas de triangulació.

0,25 punts pel tercer pas de triangulació.

0,25 punts per l'argumentació i resposta final.

Apartat b)

0,5 punts per la discussió del sistema.

0,25 punts per la formulació del mètode de Cramer.

0,25 punts pels càlculs i solució final.

Observació: Les resolucions correctes via menors no nuls o bé per Gauss, allà on sigui possible, seran valorades amb la totalitat de la puntuació.

2. Considereu el punt $A = (1, 2, 3)$.

a) Calculeu el punt simètric del punt A respecte de la recta d'equació

$$r: (x, y, z) = (3 + \lambda, 1, 3 - \lambda).$$

[1 punt]

b) Calculeu el punt simètric del punt A respecte del pla que té per equació

$$\pi: x + y + z = 3.$$

[1 punt]

Resolució:

a) Per a fer el simètric respecte de la recta r construirem primer el pla, diguem-ne π', que talla perpendicularment la recta r i que passa pel punt A. Aquest pla té per vector normal el vector director de r, és a dir $(1,0,-1)$.

Per tant és un pla d'equació $x - z = D$ i si ha de passar per A, tindrem $1 - 3 = D$, o sigui $D = -2$. Per tant el pla perpendicular té equació $\pi': x - z = -2$.

Calculem el punt intersecció, diguem-ne B, del pla amb la recta, el que seria el punt projecció del punt A sobre la recta r, substituint l'equació paràmetrica de la recta en l'equació del pla.

$$3 + \lambda - (3 - \lambda) = -2$$

D'on tenim $\lambda = -1$ i per tant $B = (2,1,4)$.

Així el punt simètric del punt A respecte de la recta, diguem-ne A', l'obtindrem fent $\boxed{A'} = A + 2\overrightarrow{AB} = (1,2,3) + 2\big((2,1,4) - (1,2,3)\big) = (1,2,3) + (2,-2,2) = \boxed{(3,0,5)}$.

b) Obtindrem primer el punt, diguem-ne B, projecció perpendicular del punt A sobre el pla π, construint la recta perpendicular al pla i que passa per A. El vector director d'aquesta recta serà el vector normal del pla, és a dir $(1,1,1)$.

Per tant, l'equació de la recta serà $s: (x, y, z) = (1 + \lambda, 2 + \lambda, 3 + \lambda)$.
La intersecció de s i π és quan

$$1 + \lambda + 2 + \lambda + 3 + \lambda = 3.$$

D'on tenim $\lambda = -1$ i per tant $B = (0,1,2)$.

Així el punt simètric del punt A respecte del pla, diguem-ne A', l'obtindrem fent $\boxed{A'} = A + 2\overrightarrow{AB} = (1,2,3) + 2\big((0,1,2) - (1,2,3)\big) = (1,2,3) + (-2,-2,-2) = \boxed{(-1,0,1)}$.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per identificar el vector director de la recta.

0,25 punts per l'equació del pla perpendicular.

0,25 punts pel punt intersecció.

0,25 punts per la construcció del punt simètric.

Apartat b)

0,25 punts per identificar el vector normal del pla.

0,25 punts per l'equació de la recta perpendicular.

0,25 punts pel punt intersecció.

0,25 punts per la construcció del punt simètric.

---

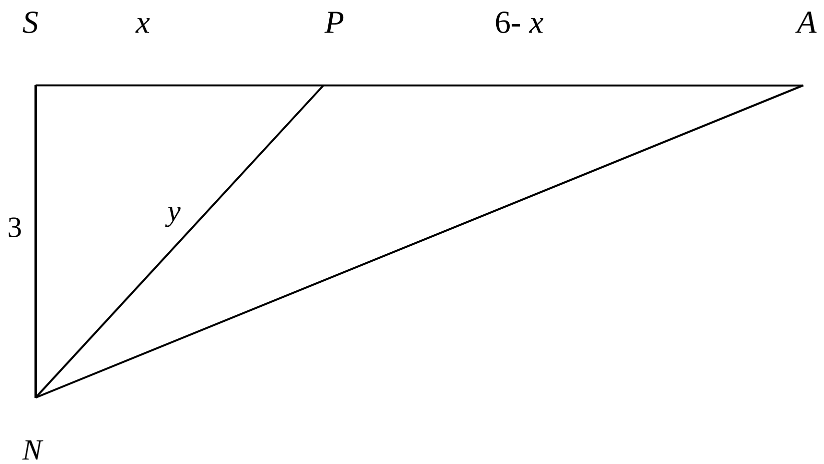
3. Un nedador és al mar en un punt N, situat a 3 km d'una platja recta, i just al davant d'un punt S, situat a la platja arran de l'aigua; i vol anar a un punt A situat també arran de l'aigua i a 6 km del punt S, de manera que el triangle NSA és rectangle en el vèrtex S. El nedador neda a una velocitat constant de 3 km/h i camina a una velocitat constant de 5 km/h.

a) Si P és un punt entre el punt S i el punt A que està a distància x de S, demostreu que el temps, en hores, que necessita el nedador per a nedar del punt N al punt P i caminar des del punt P fins al punt A és determinat per l'expressió $t(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{6-x}{5}$.
[1 punt]

b) Calculeu el valor de x que determina el temps mínim que cal per a anar del punt N al punt A, passant per P. Quin és el valor d'aquest temps mínim?
[1 punt]

Resolució:

a) La situació gràfica és la següent:



Sabem que $\overline{NS} = 3$ km i $\overline{SA} = 6$ km. Anomenem $\overline{NP} = y$.

La funció que calcula el temps que es demana és $t(x) = \frac{y}{3} + \frac{6-x}{5}$.

Per Pitàgoras tenim la relació $y = \sqrt{x^2+9}$ i per tant $t(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{6-x}{5}$, com volíem veure.

b) Per a trobar el mínim de la funció t calculem la seva derivada i la igualem a zero.

$$t'(x) = \frac{x}{3\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5}.$$

Si fem $t'(x) = 0$ obtenim $\frac{x}{3\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{5}$, i d’aquí $5x = 3\sqrt{x^2+9}$

$$25x^2 = 9x^2 + 81$$

$$16x^2 = 81$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{81}{16}} = \pm 2{,}25$$

Observem que la solució negativa no es situa en el context del problema. Per tant l’únic candidat a extrem de la funció és quan $x = 2{,}25$.

Per a determinar que en $x = 2{,}25$ la funció té un mínim, calculem la derivada segona i obtenim $t''(x) = \frac{3}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$ i observem que és sempre positiva.

Per tant com que $t''(2{,}25) > 0$ podem assegurar que en $\boxed{x = 2{,}25\ km}$ la funció té un mínim.

El temps mínim serà $\boxed{t(2{,}25) = \frac{\sqrt{2{,}25^2+9}}{3} + \frac{6-2{,}25}{5} = 2\ hores}$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts pel plantejament gràfic del problema.

0,25 punts pel Teorema de Pitàgoras.

0,25 punts pel temps en el primer tram.

0,25 punts pel temps en el segon tram.

Apartat b)

0,25 punts per la derivada primera.

0,25 punts pel punt singular.

0,25 punts per la derivada segona i classificació de mínim. S'admet, amb la totalitat de la puntuació, que l'estudiant ho justifiqui correctament pel context del problema i no utilitzi la derivada segona.

0,25 punts per a la substitució.

4. Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada en el primer quadrant per les gràfiques de les funcions $y = x^2$, $y = 4x^2$ i $y = 9$.
[2 punts]

Resolució:

Es tracta de l'àrea limitada per dues paràboles que comparteixen el seu vèrtex, el punt (0,0), i la recta horitzontal $y = 9$.

Calculem en quines abscisses del primer quadrant l'horitzontal talla cadascuna de les paràboles.

$x^2 = 9$ porta a $x = 3$.

$4x^2 = 9$ porta a $x = +\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

Per tant l'àrea serà (plantejant la integral de les diferències verticals entre la funció que marca el punt superior de la regió i la funció que marca el punt inferior de la regió)

$$\int_0^{3/2}(4x^2 - x^2)dx + \int_{3/2}^{3}(9 - x^2)dx = \int_0^{3/2}3x^2dx + \int_{3/2}^{3}(9 - x^2)dx =$$

$$= x^3\Big|_0^{3/2} + \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{3/2}^{3} = \frac{27}{8} + (27 - 9) - \left(\frac{27}{2} - \frac{9}{8}\right) = \boxed{9\,u^2}.$$

Observació: La mateixa regió també es pot subdividir en tres diferents regions i calcular l'àrea per separat i operar entre elles.

Pautes de correcció:

0,25 punts pel primer punt de tall.

0,25 punts pel segon punt de tall.

0,25 punts pel plantejament de la primera integral.

0,25 punts pel plantejament de la segona integral.

0,25 punts pel càlcul de la primera primitiva.

0,25 punts pel càlcul de la segona primitiva.

0,25 punts per aplicar la regla de Barrow a la primera integral.

0,25 punts per aplicar la regla de Barrow a la segona integral.

5. Siguin r i s les rectes de $\mathbb{R}^3$ d'equacions $r: \frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{4}$ i $s: (x, y, z) = (1 + 2\alpha, 3 - \alpha, 4 + 3\alpha)$, amb $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Comproveu que els punts mitjans dels segments que tenen un extrem situat sobre la recta r i l'altre extrem situat sobre la recta s formen un pla.
[1 punt]

b) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla de l'apartat anterior.
[1 punt]

Resolució:

a) Els punts generals de les rectes r i s són, respectivament, de la forma

$$R = (2 + 3\lambda, \lambda, -1 + 4\lambda)$$
$$S = (1 + 2\alpha, 3 - \alpha, 4 + 3\alpha).$$

.Calculem l'expressió dels punts mitjans:

$$M = \frac{R+S}{2} = \left(\frac{3 + 3\lambda + 2\alpha}{2}, \frac{3 + \lambda - \alpha}{2}, \frac{3 + 4\lambda + 3\alpha}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + \lambda\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{4}{2}\right) + \alpha\left(\frac{2}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

I podem veure que efectivament formen un pla que és, a partir de l'expressió vectorial anterior, el que passa pel punt $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ i té per vectors directors els vectors directors de les dues rectes, és a dir $(3,1,4)$ i $(2, -1, 3)$.

b) Sabem que és el pla que passa pel punt $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ i té per vectors directors els vectors directors $(3,1,4)$ i $(2, -1, 3)$, per tant seran els punts (x, y, z) que satisfan l'equació

$$\begin{vmatrix} x - \frac{3}{2} & 3 & 2 \\ y - \frac{3}{2} & 1 & -1 \\ z - \frac{3}{2} & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$7\left(x - \frac{3}{2}\right) - 1\left(y - \frac{3}{2}\right) - 5\left(z - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\boxed{7x - y - 5z = \frac{3}{2}}$$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per les equacions paramètriques de les rectes.

0,5 punts per l'expressió general dels punts mitjos.

0,25 punts per l'argumentació de formar un pla.

Apartat b)

0,5 punts per la formulació de l'equació.

0,5 punts pel càlcul final.

---

6. Responeu a les qüestions següents:

a) Demostreu que si A és una matriu quadrada que satisfà la igualtat $A^2 = I$, on I és la matriu identitat, aleshores A és invertible i A^{-1} satisfà $(A^{-1})^2 = I$.
[1 punt]

b) Calculeu l'expressió general de les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ amb $b \neq 0$ que satisfan la igualtat $A^2 = I$.
[1 punt]

Resolució:

a) $A^2 = I$ ho podem reescriure com $A \cdot A = I$. Això ens diu que quan la matriu A la multipliquem per ella mateixa, sigui per la dreta o per l'esquerra, ens dóna la identitat. I això és precisament el que s'ha de complir per tal que A sigui invertible. A més a més, veiem que la seva inversa és ella mateixa, és a dir $A^{-1} = A$. Essent així, $(A^{-1})^2 = A^2 = I$ com voliem demostrar.

Observació: Alternativament, que la matriu sigui invertible també es pot demostrar a partir d'aplicar determinants i veure que té determinant no nul.

b) S'ha de complir que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} aa+bc & ab+2b \\ ac+2c & bc+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quan igualem terme a terme obtenim el següent sistema d'equacions

$$\begin{cases} aa+bc & = & 1 \\ ab+2b & = & 0 \\ ac+2c & = & 0 \\ bc+4 & = & 1 \end{cases}$$

De la segona equació tenim $(a+2)b=0$ i com que $b \neq 0$ deduïm $a+2=0$ i per tant que $a=-2$.

Quan substituïm $a=-2$ en el sistema ens queda

$$\begin{cases} bc & = & -3 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ bc & = & -3 \end{cases}$$

Per tant l'altra condició que se'n obté és $c = \frac{-3}{b}$ i per tant la forma general de les matrius que es demana és $\boxed{A = \begin{pmatrix} -2 & b \\ -3/b & 2 \end{pmatrix} amb\ b \neq 0}$.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts per l'argumentació de ser invertible (factoritzant prèviament o no).

0,5 punts per comprovar la igualtat.

Apartat b)

0,25 punts pel càlcul matricial.

0,25 punts pel plantejament del sistema.

0,25 punts per la resolució del sistema.

0,25 punts per l'expressió final de les matrius.

SÈRIE 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

---

1. Considereu la funció $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$.

- Calculeu les asímptotes verticals, horitzontals i obliqües de la funció *f*. [1 punt]
- Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció *f* en aquells punts en què la recta tangent sigui paral·lela a la recta $y = -5x + 4$.
  [1 punt]

Resolució:

a) El domini de la funció *f*, com a quocient de polinomis que és, són tots els nombre reals llevat aquells que anul·lin el denominador, en aquest cas el punt $x = 2$. En aquest punt s'anul·la el denominador i no el numerador i per tant tenim

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x+3}{x-2} = \infty.$$

Per tant la funció *f* té una $\boxed{\text{única asímptota vertical en } x = 2.}$

Per al càlcul de les asímptotes horitzontal hem de calcular

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+3}{x-2} = 1.$$

Per tant la funció *f* té una $\boxed{\text{asímptota horitzontal en la recta } y = 1.}$

Aleshores en tenir asímptota horitzontal quan $x \longrightarrow \pm\infty$ $\boxed{\text{no té cap asímptota oblícua.}}$

b) La recta $y = -5x + 4$ té pendent -5, per tant se'ns demana calcular la recta tangent en els punts que aquesta tingui pendent, és a dir derivada de *f*, -5.

Si derivem i igualem a -5 obtenim:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-2) - (x+3) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2}$$

Si $\frac{-5}{(x-2)^2} = -5$ aleshores $(x-2)^2 = 1$ i per tant $x - 2 = \pm 1$, és a dir $x = 1$ o $x = 3$.

Per tant tenim dues rectes tangents a calcular, totes dues amb pendent -5.

Quan $\boxed{x = 1}$ tenim $f(1) = -4$ i la recta tangent serà

$$\boxed{y = -5(x-1) + (-4) = -5x + 1}$$

Quan $\boxed{x = 3}$ tenim $f(3) = 6$ i la recta tangent serà

$$\boxed{y = -5(x-3) + 6 = -5x + 21}$$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts per l'asímptota vertical.

0,25 punts per l'asímptota hortizontal.

0,25 punts per l'argumentació de l'asímptota oblícua.

Apartat b)

0,25 punts per la funció derivada.

0,25 punts pel càlcul de les abscisses dels punts de tangència.

0,25 punts per la primera recta tangent.

0,25 punts per la segona recta tangent.

2. Responeu a les qüestions següents:

a) Discutiu el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} (k-1)y+(k^2-1)z &= 0 \\ (4k+1)x-y-7z &= 1 \\ x+y+z &= 0 \end{cases}$$

en funció dels valors de k.

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per a $k=1$.

[1 punt]

Resolució:

a) Les matrius de coeficients, *A*, i ampliada, *A'*, del sistema són

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & k-1 & k^2-1 & 0 \\ 4k+1 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

i es tracta d'estudiar el rang(A) i el rang(A').
Per a determinar els valors de discussió del paràmetre k mirem quan el rang(A) és màxim, és a dir 3, que serà quan el seu determinant sigui diferent de zero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & k-1 & k^2-1 \\ 4k+1 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (k-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & k+1 \\ 4k+1 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= (k-1)\big((4k+1)(k+1)-7+(k+1)-(4k+1)\big) =$$
$$= (k-1)(4k^2+2k-6).$$

Quan igualem a zero i resolem l'equació de segon grau obtenim $k=1$ i $k=\frac{-3}{2}$.

Observació: Si el càlcul del determinant es fa sense treure factor comú, aleshores cal aplicar la regla de Ruffini al polinomi $2k^3-k^2-4k+3$ i veure que té té una arrel doble en $k=1$ i que pot factoritzar com

$$2k^3-k^2-4k+3=(k-1)^2(2k+3)$$

Amb el que s'obtenen les mateixes solucions $k=1$ i $k=\frac{-3}{2}$.

Així doncs:

- Si $k\neq 1$ i $k\neq\frac{-3}{2}$, aleshores $|A|\neq 0 \Rightarrow rang(A)=3=rang(A')$ que és el nombre d'incògnites i per tant el sistema serà Compatible Determinat.
- Si $k=1$ $|A|=0 \Rightarrow rang(A)<3$.

El sistema en forma matricial queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Com que el menor $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2$, i com que la primera fila és nul·la la matriu ampliada també tindrà rang 2 i el sistema serà Compatible Indeterminat amb (3-2=1) 1 grau de llibertat, és a dir una incògnita indeterminada.

- Si $k = \frac{-3}{2}$ $|A| = 0 \Rightarrow rang(A) < 3$.

El sistema en forma matricial queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{-5}{2} & \frac{5}{4} & 0 \\ -5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Com que el menor $\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2$.

Per a calcular el rang de la matriu ampliada podem orlar el menor anterior fent servir la primera fila i la columna dels termes independents.

$\begin{vmatrix} 0 & \frac{-5}{2} & 0 \\ -5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-5}{2} \neq 0 \Rightarrow rang(A') = 3 \neq 2 = rang(A)$ i per tant el sistema és Incompatible.

En resum:

- Si $k \neq 1$ i $k \neq \frac{-3}{2}$, el sistema és Compatible Determinat.
- Si $k = 1$, el sistema és Compatible Indeterminat amb 1 grau de llibertat.
- Si $k = \frac{-3}{2}$ el sistema és Incompatible.

b)

El sistema en forma matricial queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ i podem prescindir de la primera equació perquè s'ha anul·lat. Passem la tercera equació a la primera i si aliquem el mètode de Gauss (a la segona equació li restem 5 vegades la primera) tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -z \\ 0 & -6 & 1+12z \end{array}\right),$$

i per tant $y = \frac{1+12z}{-6} = -\frac{1}{6} - 2z$

i substituint a la primera equació $x = -y - z = \frac{1}{6} + 2z - z = \frac{1}{6} + z$.

Així doncs els punts solució del sistema d'equacions són els de la forma $\left(\frac{1}{6} + z, -\frac{1}{6} - 2z, z\right)$, amb z indeterminada.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per l'argumentació i càlcul del determinant de la matriu de coeficients.

0,25 punts per trobar els valors de discussió i la discussió general primera.

0,25 punts pel cas k=1.

0,25 punts pel cas k=-3/2.

Apartat b)

0,25 punts per la substitució.

0,5 punts per la resolució (amb independència del mètode).

0,25 punts per la solució final.

---

3. Siguin els punts $P = (1, 1, 0)$, $Q = (1, 0, 1)$ i $R = (0, 1, 1)$ i el pla $\pi: x + y + z = 4$.

a) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pels punts P, Q i R.

[1 punt]

b) Si S és un punt de π, comproveu que el volum del tetraedre de vèrtexs P, Q, R i S no depèn del punt S.

[1 punt]

Resolució:

a) El pla que passa pels punts P, Q i R té per vectors directors, per exemple, els vectors $\overrightarrow{PQ} = (1,0,1) - (1,1,0) = (0,-1,1)$ i $\overrightarrow{PR} = (0,1,1) - (1,1,0) = (-1,0,1)$ i per tant un punt (x, y, z) del pla haurà de satisfer la igualtat (demanant que passi pel punt P)

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y-1 & -1 & 0 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x + 1 - y + 1 - z = 0.$$

És a dir $\boxed{x + y + z = 2}$.

b) Si S és un punt del pla $\pi: x+y+z=4$, aleshores S és de la forma $(x, y, 4-x-y)$.

Així doncs el tetraedre de vèrtexs P, Q, R i S tindrà per arestes els vectors

$\overrightarrow{PQ} = (1,0,1) - (1,1,0) = (0,-1,1)$,

$\overrightarrow{PR} = (0,1,1) - (1,1,0) = (-1,0,1)$ i

$\overrightarrow{PS} = (x, y, 4-x-y) - (1,1,0) = (x-1, y-1, 4-x-y)$

i per tant el seu volum serà

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}\right]\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 0 & -1 & x-1 \\ -1 & 0 & y-1 \\ 1 & 1 & 4-x-y \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}|-x+1-y+1-4+x+y|$$
$$= \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}\ u^3}.$$

que és una constant i per tant independent del punt S.

Alternativament: El volum del tetraedre no depèn del punt S ja que es tracta d'un tetraedre amb tres punts (P, Q i R) sobre un pla $x+y+z=2$ i un quart punt (S) sobre un pla que és paral·lel al pla anterior $x+y+z=4$. Observem que els dos plans tenen per vector normal el vector $(1,1,1)$. Per tant tindrem sempre la mateixa "àrea de la base", l'àrea del triangle PQR, i la mateixa "alçada", la distància entre els dos plans.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts per l'obtenció dels dos vectors directors.

0,25 punts pel plantejament de l'equació general.

0,25 punts pel càlcul final.

Apartat b)

0,5 punts per la forma paramètrica d'un punt del pla.

0,25 punts per la formulació del volum.

0,25 punts pel càlcul del volum.

Observació: Si l'apartat b) es resol de manera totalment correcta només argumentant a partir del paral.lelisme entre els plans i el fet que, aleshores, els tetraedres resultants tenen la mateixa àrea de la base i la mateix alçada, es puntuarà l'apartat amb 1 punt.

4. Donats els plans $\pi_1:\ x-4y+z=2m-1$ i $\pi_2:\ 2x-(2m+2)y+2z=3m+1$.

a) Determineu els valors de *m* perquè els plans π_1 i π_2 s'intersequin en una recta i calculeu un vector director de la recta resultant que no depengui de *m*.

[1 punt]

b) Sigui el pla $\pi:\ 3x-2y+3z=8$. Estudieu la posició relativa del pla π amb la recta *r* definida per la intersecció dels plans π_1 i π_2 quan $m=1$.

[1 punt]

Resolució:

a) Que els dos plans π_1 i π_2 s'intersectin en una recta, diguem-ne r vol dir que el sistema d'equacions format per les respectives equacions dels plans és compatible indeterminat.
El sistema és

$$\begin{cases}\pi_1:\ x-4y+z=2m-1\\ \pi_2:\ 2x-(2m+2)y+2z=3m+1\end{cases}$$

o en forma matricial

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -4 & 1 & 2m-1\\ 2 & -2m-2 & 2 & 3m+1\end{array}\right),$$

i només es tracta de garantir que la matriu de coeficients tingui rang 2, és a dir que el menor $\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -2m-2\end{vmatrix}$ sigui diferent de 0.

$$\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -2m-2\end{vmatrix}=-2m-2+8=-2m+6=0 \Leftrightarrow m=3.$$

$\boxed{\text{Per tant, } \pi_1 \text{ i } \pi_2 \text{ s'intersecten en una recta si i només si } m\neq 3.}$

Per a aquests casos el vector director de la recta r serà el producte vectorial dels respectius vectors normals de cada pla, és a dir $(1,-4,1)$ i $(2,-2m-2,2)$, o el que és equivalent el producte vectorial de $(1,-4,1)$ i $(1,-m-1,1)$.
Per tant tindrem

$$v_r=(1,-4,1)\times(1,-m-1,1)=\begin{vmatrix}i & 1 & 1\\ j & -4 & -m-1\\ k & 1 & 1\end{vmatrix}=(m-3,0,-m+3).$$

Ara bé com que estem en el cas $m\neq 3$, la primera i tercera component del vector v_r són diferent de 0 i podem simplificar el vector dividint per $m-3$ obtenint un vector director equivalent i que no depèn de *m*: $\boxed{v_r=(1,0,-1)}$.

b) El vector director de la recta *r* és $v_r=(1,0,-1)$ i el vector normal del pla π és $v_\pi=(3,-2,3)$. Com que $v_r\cdot v_\pi=3-3=0$ aleshores els dos vectors són perpendiculars, $v_r\perp v_\pi$, i per tant $\boxed{\text{la recta } r \text{ és paral·lela al pla } \pi}$.

Per a saber si la recta *r* està continguda o no en el pla, podem agafar un punt de *r* i veure si satisfà l'equació del pla.
Si fem, per exemple, $x = 0$ en les equacions de *r*, obtenim el punt $(0,\frac{1}{2},3)$ que podem comprovar que també pertany al pla π, ja que $3 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 3 = -1 + 9 = 8$. Per tant, $\boxed{\text{la recta } r \text{ està continguda en el pla } \pi.}$

Observació: Alternativament, també es podia decidir a partir d'estudiar les interseccions dels plans π_1, π_2 i π, per al cas $m = 1$, i veure que es tracta d'un sistema compatible indeterminat.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts pel plantejament matricial.

0,25 punts pel valor que fa que el rang sigui 2.

0,25 punts pel vector director.

0,25 punts per veure que es pot reduir i és independent del paràmetre.

Apartat b)

0,5 punts pel paral·lelisme de la recta i el pla.

0,5 punts per veure que la recta està continguda en el pla.

5. Responeu a les qüestions següents:

a) Si A i B són dues matrius quadrades d'ordre n, demostreu que

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \;\Leftrightarrow\; AB = BA$$

[1 punt]

b) Si M_1 i M_2 són dues matrius de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, amb $a, b \in \mathbb{R}$, comproveu que el producte $M_1 \cdot M_2$ té també la mateixa forma i que $M_1 \cdot M_2 = M_2 \cdot M_1$.

[1 punt]

Resolució:

a) Si desenvolupem el terme quadràtic i tenim en compte que el producte de matrius no és commutatiu, obtenim

$$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Per tant la igualtat de l'enunciat es cumplirà si i només si

$$\begin{aligned} &A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \\ &AB + BA = 2AB \\ &BA = 2AB - AB \\ &BA = AB. \end{aligned}$$

b) Denotem $M_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ i $M_2 = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ i fem el producte $M_1 \cdot M_2$.

$$\boxed{M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -ab' - ba' \\ ba' + ab' & -bb' + aa' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}}$$

I efectivament podem veure que la matriu producte és de la mateixa forma ja que coincideixen els elements de la diagonal principal i són oposats els elements de la diagonal segona.

Per a comprovar la commutativitat de les matrius M_1 i M_2 fem l'altre producte

$$\boxed{M_2 \cdot M_1 = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -ab' - ba' \\ ba' + ab' & -bb' + aa' \end{pmatrix} = M_1 \cdot M_2.}$$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts pel desenvolupament del quadrat.

0,5 punts per l’argumentació de la condició de la commutativitat.

Apartat b)

0,25 punts pel càlcul matricial.

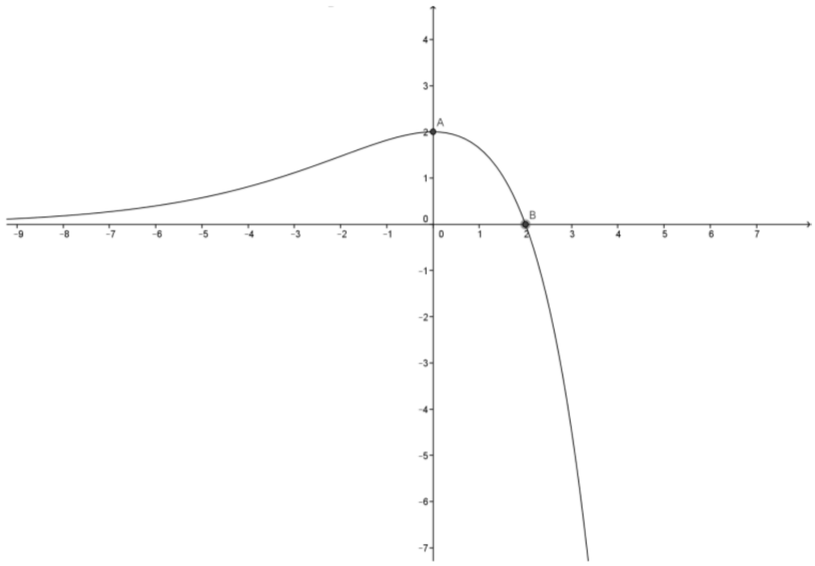
0,25 punts per la identificació de la forma matricial.

0,25 punts pel segon càlcul matricial.

0,25 punts per la comprovació de commutativitat.

6. Responeu a les qüestions següents:

a) La funció $f(x) = (b - x)e^{ax}$, amb a i b constants, té la representació gràfica següent



i sabem que passa pels punts $A = (0{,}2)$ i $B = (2{,}0)$, i que en el punt A la recta tangent a la gràfica és horitzontal. Calculeu els valors de a i b.

[1 punt]

b) Calculeu $\int_1^2 x \cdot \ln x \; dx$.

[1 punt]

Resolució:

a) Tenim $f(x) = (b - x)e^{ax}$.

Que la gràfica passi pel punts $A = (0{,}2)$ vol dir $f(0) = 2$. És a dir $f(0) = b = 2$.

Per tant la funció té l'expressió $f(x) = (2 - x)e^{ax}$.

Anàlogament, si la gràfica passa per $B = (2{,}0)$, aleshores $f(2) = 0$, independentment del valor del paràmetre a.

Per altra banda, si en el punt A, la recta tangent a la gràfica és horitzonal, aleshores $f'(0) = 0$.

Calculem $f'(x)$.

$$f'(x) = -1 \cdot e^{ax} + (2 - x) \cdot ae^{ax}$$

I substituïm en $x = 0, f'(0) = -1 + 2a = 0$. I per tant $a = {}^{1}\!/_{2}$.

Així doncs la funció és $\boxed{f(x) = (2 - x)e^{x/2}}$.

b) Per a calcular $\int_1^2 x \cdot \ln x \; dx$, calcularem primer una primitiva de l'integrand, que serà una integral per parts, i després aplicarem la regla de Barrow.

$$\int x \ln x \; dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx & v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

Per tant

$$\int_1^2 x \cdot \ln x \; dx = \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) \Bigg|_1^2 = 2 \ln 2 - 1 - \left(-\frac{1}{4} \right) = \boxed{2 \ln 2 - \frac{3}{4}.}$$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per la primera condició i càlcul de la b.

0,25 punts per la funció derivada.

0,25 punts per la condició de màxim relatiu.

0,25 punts pel càlcul de la a.

Apartat b)

0,25 punts per la identificació dels elements de la integral per parts

0,25 punts per l'aplicació de la fórmula d'integració per parts.

0,25 punts per la resolució de la següent integral.

0,25 punts per l'aplicació de la regla de Barrow.

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2014

Matemàtiques

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Siguin *r* i *s* les rectes de $\mathbb{R}^3$ que tenen les equacions següents:

$$r: x+5 = y-5 = \frac{z-3}{2} \text{ i } s: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}.$$

a) Estudieu el paral·lelisme i la perpendicularitat entre les rectes *r* i *s*.
[1 punt]

b) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax+By+Cz=D$) del pla π que conté la recta *r* i és paral·lel a la recta *s*. Calculeu la distància entre la recta *s* i el pla π obtingut.
[1 punt]

2. Siguin les funcions $f(x) = \frac{e^{ax}+b}{4}$ i $g(x) = +\sqrt{3x+4}$.

a) Determineu el domini i el recorregut de la funció *g*.
[1 punt]

b) Calculeu per a quins valors de *a* i de *b* les gràfiques de les dues funcions són tangents (és a dir, tenen la mateixa recta tangent) en el punt d'abscissa $x=0$.
[1 punt]

3. Considereu el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} mx - y = m \\ 3x + (m-4)y = m+2 \end{cases}$, per a $m \in \mathbb{R}$.

a) Discutiu el sistema d'equacions per als diferents valors del paràmetre *m*.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema en aquells casos en què el sistema sigui compatible.
[1 punt]

4. Sabem que una funció f té per derivada la funció $f'(x) = (3x - 2)^2\,(x - 2)$.

a) Calculeu els valors de x en què la funció f té un màxim relatiu, un mínim relatiu o un punt d'inflexió, i indiqueu en cada cas de què es tracta.

[1 punt]

b) Determineu la funció f sabent que s'anul·la en el punt d'abscissa $x = 2$.

[1 punt]

5. Donats els vectors $\boldsymbol{u} = (2, -1, 0)$, $\boldsymbol{v} = (-1, 3, 4)$ i $\boldsymbol{w} = (0, 3a - 1, 4a)$,

a) Calculeu els valors del paràmetre a perquè els vectors $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$ siguin linealment dependents.

[1 punt]

b) Calculeu els valors del paràmetre a perquè un tetraedre d'arestes $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$ tingui un volum de 2/3 d'unitats cúbiques.

[1 punt]

6. Considereu l'equació matricial $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, en què

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -3 & a-1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Per a quins valors del paràmetre a l'equació matricial té una solució única?

[1 punt]

b) Trobeu la matriu $\boldsymbol{X}$ que satisfà l'equació matricial quan $a = 3$.

[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Sèrie 5

1. Siguin r i s les rectes de $\mathbb{R}^3$ d'equacions

$$r: x+5 = y-5 = \frac{z-3}{2}$$
$$s: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

a) Estudieu el paral·lelisme i la perpendicularitat entre les rectes r i s.

[1 punt]

b) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla π que conté la recta r i és paral·lel a la recta s. Calculeu la distància entre la recta s i el pla π obtingut.

[1 punt]

Resolució:

a) Els vectors directors de les rectes r i s són $v_r = (1,1,2)$ i $v_s = (2,3,-1)$.

Els vectors v_r i v_s no són proporcionals, ja que un no és múltiple de l'altre ($\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3} \neq \frac{2}{-1}$) i per tant les rectes $\boxed{r \text{ i } s \text{ no són paral·leles}}$.

El producte escalar dels dos vectors directors és $v_r \cdot v_s = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 3 \neq 0$ per tant les rectes $\boxed{r \text{ i } s \text{ no són perpendiculars}}$.

b) Si el pla π ha de contenir la recta r aleshores $v_r = (1,1,2)$ serà un dels seus vectors directors i el pla π haurà de passar pel punt de la recta $P_r = (-5,5,3)$. Per altra banda si el pla π ha de ser paral·lel a la recta s aleshores $v_s = (2,3,-1)$ serà també un dels vectors directors del pla.

Així doncs, l'equació general del pla π s'obtindrà de la igualtat:

$$\begin{vmatrix} x+5 & 1 & 2 \\ y-5 & 1 & 3 \\ z-3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Quan desenvolupem obtenim $(x+5)(-7) - (y-5)(-5) + (z-3)1 = 0$.

Amb el que tenim $\boxed{\pi: -7x + 5y + z = 63}$.

Com que el pla π és paral·lel a la recta s,

$$d(s,\pi) = d(P_s,\pi) = d\big((3,2,-1), -7x+5y+z-63=0\big)$$
$$= \frac{|(-7)\cdot 3 + 5\cdot 2 + (-1) - 63|}{\sqrt{(-7)^2+5^2+1^2}} = \frac{75}{\sqrt{75}} = \sqrt{75} = \boxed{5\sqrt{3}}.$$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts per l'estudi de paral·lelisme.

0,5 punts per l'estudi de perpendicularitat.

Apartat b)

0,25 punts per la identificació dels vectors directors del pla.

0,25 punts per l'equació general del pla.

0,25 punts pel plantejament de la distància a partir d'un punt qualsevol de la recta.

0,25 punts pel càlcul de la distància d'un punt a un pla.

2. Siguin les funcions $f(x) = \frac{e^{ax}+b}{4}$ i $g(x) = +\sqrt{3x+4}$.

a) Determineu el domini i el recorregut de la funció g.

[1 punt]

b) Calculeu per a quins valors de a i de b les gràfiques de les dues funcions són tangents (és a dir, tenen la mateixa recta tangent) en el punt d'abscissa $x = 0$.

[1 punt]

Resolució:

a) $g(x) = +\sqrt{3x+4}$.

Per tal que un punt, x, sigui del domini de la funció g només cal que el radicand sigui positiu. És a dir $\boxed{Dom(g)} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x+4 \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{4}{3}\right\} = \boxed{\left[-\frac{4}{3}, +\infty\right)}$.

Una ordenada y serà del recorregut de la funció g, sempre que es pugui obtenir del càlcul de la imatge per g d'una abscissa x, és a dir $y = +\sqrt{3x+4}$. Per tant seran aquells valors positius de y per als quals la igualtat $y = +\sqrt{3x+4}$ té solució per a x. Però operant la igualtat obtenim que per a qualsevol y positiu sempre podem aillar la x com a $x = \frac{y^2-4}{3}$. Per tant, $\boxed{Rec(g) = [0, +\infty)}$.

b) Per tal que les dues funcions siguin tangents en $x = 0$ s'ha de satisfer $f(0) = g(0)$ i $f'(0) = g'(0)$.

Calculem les expressions de les funcions derivades:

$$f'(x) = \frac{1}{4}ae^{ax}$$

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$$

Per tant $f(0) = g(0) \Rightarrow \frac{1+b}{4} = 2 \Rightarrow \boxed{b = 7}$.

I $f'(0) = g'(0) \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{a = 3}$.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts pel domini.
0,5 punts pel recorregut.

Apartat b)

0,25 punts per la derivada de f.
0,25 punts per la derivada de g.
0,25 punts per la igualtat d’imatges i càlcul de b.
0,25 punts per la igualtat de pendents i càlcul de a

3. Considereu el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} mx - y &= m \\ 3x + (m-4)y &= m+2 \end{cases} \text{ per a } m \in \mathbb{R}.$$

a) Discutiu el sistema d'equacions per als diferents valors del paràmetre m.

[1 punt]

b) Resoleu el sistema en aquells casos en què el sistema sigui compatible.

[1 punt]

Resolució:

a) La matriu de coeficients, A, i la matriu ampliada, A', associades al sistema són:

$$\left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & m \\ 3 & m-4 & m+2 \end{array}\right)$$

$$rang(A) = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & m-4 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & m-4 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3).$$

- Cas I: Si $m \neq 1, 3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2 = rang(A') =$ nombre d'incònites i per tant el sistema és Compatible Determinat.
- Cas II: Si $m = 1$, la representació matricial és

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

i per tant tenim $rang(A) = rang(A') = 1$ i aleshores el sistema és Compatible Indeterminat amb (2-1=1) 1 grau de llibertat.

- Cas III: Si $m = 3$, la representació matricial és

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

que correspon clarament a un sistema incompatible ja que la primera equació demana $3x - y = 3$, mentre que la segona demana $3x - y = 5$.

En resum:

Si $m \neq 1, 3$, el sistema és Compatible Determinat Si $m = 1$, el sistema és Compatible Indeterminat amb 1 grau de llibertat Si $m = 3$, el sistema és Incompatible.

b) Hem de trobar la solució per als casos I: $m \neq 1, 3$ i II: $m = 1$.

Cas I: $m \neq 1, 3$

Com que la matriu de coeficients és quadrada i $|A| \neq 0$, podem resoldre directament el sistema pel mètode de Cràmer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & -1 \\ m+2 & m-4 \end{vmatrix}}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2-4m+m+2}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2-3m+2}{(m-1)(m-3)} = \frac{(m-1)(m-2)}{(m-1)(m-3)} = \frac{m-2}{m-3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & m \\ 3 & m+2 \end{vmatrix}}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2+2m-3m}{(m-1)(m-3)} = \frac{m^2-m}{(m-1)(m-3)} = \frac{(m-1)m}{(m-1)(m-3)} = \frac{m}{m-3}.$$

Per tant, per a cada valor de $m \neq 1, 3$ el punt solució del sistema és $\boxed{\left(\frac{m-2}{m-3}, \frac{m}{m-3}\right)}$.

Cas II: $m = 1$

En aquest cas el sistema queda reduït a una única equació $x - y = 1$, ja que la segona equació queda múltiple de la primera.

Els punts solució del sistema són de la forma $\boxed{(x, x-1)}$.

Pautes de correcció:

Apartat a)

- 0,25 punts pel plantejament matricial i càlcul del determinant.
- 0,25 punts pel cas I.
- 0,25 punts pel cas II.
- 0,25 punts pel cas III.

Apartat b)

- 0,25 punts pel plantejament de Cramer en el cas I.
- 0,25 punts pel desenvolupament del cas I.
- 0,25 punts per la solució final del cas I.
- 0,25 punts pel cas II.

4. Sabem que una funció f té per derivada la funció

$$f'(x) = (3x-2)^2(x-2).$$

a) Calculeu els valors de x en què la funció f té un màxim relatiu, un mínim relatiu o un punt d'inflexió, i indiqueu en cada cas de què es tracta.

[1 punt]

b) Determineu la funció f sabent que s'anul·la en el punt d'abscissa $x = 2$.

[1 punt]

Resolució:

a) Els punts candidats a ser màxim relatiu o mínim relatiu són els zeros de la funció derivada f'. Si igualem la derivada a zero veiem que s'anul·la en els punts d'abscissa $x = \frac{2}{3}$ i $x = 2$.

Per a classificar els punts candidats farem servir la funció derivada segona.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \cdot 3 \cdot (3x-2)(x-2) + (3x-2)^2 = (3x-2)(6x-12+3x-2) \\ &= (3x-2)(9x-14). \end{aligned}$$

Com que $f''(2) = 16 > 0$, per tant en $x = 2$ la funció té un mínim relatiu.
Com que $f''\left(\frac{2}{3}\right) = 0$, no podem concloure que sigui un extrem relatiu.

Els punts candidats a ser inflexió són aquells punts que anul·len la segona derivada.

Quan resolem $f'' = 0$, obtenim $x = \frac{2}{3}$ i $x = \frac{14}{9}$.

En els dos casos es tracta de punts d'inflexió ja que la segona derivada canvia de signe. En efecte, f'' és positiva a l'interval $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$, és negativa a l'interval $\left(\frac{2}{3}, \frac{14}{9}\right)$ i torna a ser positiva a l'interval $\left(\frac{14}{9}, \infty\right)$.

En resum:

En $x = 2$ la funció té un mínim relatiu En $x = \frac{2}{3}$ i $x = \frac{14}{9}$ la funció té punts d'inflexió.

b) Per a determinar la funció f calculem una primitiva de la funció f':

$$\int (3x-2)^2(x-2)\,dx =$$

$$= \int (9x^3 - 30x^2 + 28x - 8)\,dx = \frac{9}{4}x^4 - 10x^3 + 14x^2 - 8x + C.$$

I podem determinar la constant C sabent que $f(2) = 0$.

És a dir, tenim que $\frac{9}{4}2^4 - 10 \cdot 2^3 + 14 \cdot 2^{\,2} - 8 \cdot 2 + C = 0$, d'on $C = 4$.

Aleshores

$$\boxed{f(x) = \frac{9}{4}x^4 - 10x^3 + 14x^2 - 8x + 4}.$$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per la identificació de candidats a extrem relatiu.
0,25 punts per la derivada segona.
0,25 punts per la classificació dels extrems relatius.
0,25 punts pel punt i classificació de la inflexió.

Apartat b)

0,25 punts pel plantejament a partir del càlcul d'una primitiva.
0,5 punts pel càlcul de la primitiva.
0,25 punts pel càlcul de la constant d'integració.

5. Donats els vectors $u = (2, -1, 0)$, $v = (-1, 3, 4)$ i $w = (0, 3a - 1, 4a)$.

a) Calculeu els valors del paràmetre a perquè els vectors u, v i w siguin linealment dependents.

[1 punt]

b) Calculeu els valors del paràmetre a perquè que un tetraedre d'arestes u, v i w tingui un volum de 2/3 unitats cúbiques.

[1 punt]

Resolució:

a) Per tal que els vectors u, v i w siguin linealment dependents, la matriu quadrada d'ordre 3 formada pels tres vectors ha de tenir rang menor de 3, és a dir que el seu determinant s'ha d'anul·lar.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 3a-1 \\ 0 & 4 & 4a \end{vmatrix} = 24a - 8(3a - 1) - 4a = 8 - 4a.$$

Per tant el rang serà inferior a 3 només quan $8 - 4a = 0$, és a dir $\boxed{a = 2}$.

b) El volum d'un tetraede d'arestes u, v i w es calcula amb l'expressió

$$V = \frac{1}{6}|[u, v, w]|$$

Així doncs tenim l'equació $\frac{|8-4a|}{6} = \frac{2}{3}$, és a dir $|8 - 4a| = 4$, que segons el signe de l'expressió de dins del valor absolut dóna lloc a dues diferents equacions.

- Si $8 - 4a \geq 0 \Rightarrow 8 - 4a = 4 \Rightarrow \boxed{a = 1}$.
- Si $8 - 4a < 0 \Rightarrow 8 - 4a = -4 \Rightarrow \boxed{a = 3}$.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts pel plantejament de la dependència en termes de determinant.
0,5 punts pel càlcul del determinant.
0,25 punts per la resolució de l'equació.

Apartat b)

0,25 punts per la formulació del volum.
0,25 punts pel plantejament de l'equació.
0,25 punts per la primera solució.
0,25 punts per la segona solució.

6. Considereu l'equació matricial $X \cdot A = B$, on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -3 & a-1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Per a quins valors del paràmetre a l'equació matricial té una solució única?

[1 punt]

b) Trobeu la solució X que satisfà l'equació matricial quan $a = 3$.

[1 punt]

Resolució:

a) De la igualtat $X \cdot A = B$ com que A és una matriu 3x3 i B és una matriu 2x3, aleshores X serà una matriu 2x3.

Demanar que la matriu X sigui única implica que cadascuna de les files de la matriu X ha de ser la solució, també única, del sistema de 3 equacions lineals amb 3 incògnites resultant del producte $X \cdot A = B$. Aquest sistema 3x3 té per matriu associada la matriu trasposada de la matriu A, i per terme independent cadascuna de les files de la matriu B. Per tant, el sistema serà compatible determinat si i només si el determinanat de la matriu A és diferent de 0.

Si igualem el determinant a 0 tenim:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -3 & a-1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 + a - 1 - 3 + a = 2a - 7 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{7}{2}.$$

Per tant, si $a \neq \frac{7}{2} \Rightarrow |A| \neq 0$ i aleshores la matriu A admet inversa, A^{-1}, i $X = B \cdot A^{-1}$.

Observació: L'argumentació inicial també es pot substituir de forma alternativa per demanar directament la condició suficient d'inversió de la matriu A i després estudiar particularment el cas $a = \frac{7}{2}$.

b) Quan $a = 3$ tenim $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcularem A^{-1} i després $X = B \cdot A^{-1}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj^t = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -3 & -5 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

I per tant,

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -31 & 11 & 5 \\ 20 & -6 & -3 \end{pmatrix}}$$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per l'argumentació a l'entorn de la resolució de dos sistemes d'equacions.
0,25 punts per demanar que el determinant no s'ha d'anul·lar.
0,25 punts pel càlcul del determinant.
0,25 punts pel resultat final.

Apartat b)

0,5 punts pel càlcul de la matriu inversa.
0,5 punts pel producte matricial final.