Problemes & Resolucions: **PAU-LOE**

de CAMP GRAVITATORI

(Física, 2010 — 2014; «**g**»)

► **Instruccions generals de tots els anys:** L'examen consta d'una part comuna (problemes P1 i P2), que heu de fer obligatòriament, i d'una part optativa, de la qual he d'escollir UNA de les opcions (A o B) i fer els problemes P3, P4 i P5 corresponents. Cada problema val 2 punts.

► **CONTINGUTS:** La pàgina referida per a cada problema en la taula següent indica on pot trobar-se el corresponent enunciat al Dossier de l'Acadèmia. El contingut temàtic de cada problema s'especifica a la columna de "Comentaris".

NOM	sèrie	any	op.	probl.	pág.	Comentaris
g-01	3	2014	-	1	1	**sat**. geost: *h, E_cin,* escapament
g-02	5	2014	-	1	5	**sat**.: *T , v;* si orb el·líptica: *E, E_cin, E_p*
g-03	4	2013	-	1	9	**planeta**: *g_* sup, *v_esc, E_esc;* **3a Kep**
g-04	3	2013	-	1	13	**sat**.: *T, v*
g-05	1	2013	-	1	17	**planeta**: *T* d'orb circ al voltant; *v_esc*
g-06	3	2012	-	1	21	**sat**.: *T, E* xa posar en orb
g-07	1	2012	-	1	25	**planeta**: *M_estel* si orb circ; *g_sup , v_esc*
g-08	4	2012	-	1	29	**planeta**: *r* si orb circ, *E* mec tot
g-09	1	2011	-	2	35	**3a Kep**; *M_estel* si orb circ; *g_sup*
g-10	4	2011	A	3	43	**planeta**: *g_sup;* **sat.**: *r* si orb circ
g-11	1	2010	A	5	60	**planeta**: *M_estel* si orb. circ; *E* mec tot
g-12	1	2010	B	5	63	**sat.**: *T, v, g* en orb circ
g-13	4	2010	-	1	66	**planeta**: *v* d'orb circ al voltant; signe *E*
g-14	5	2010	-	1	74	**planeta**: *h* d'orb circ al voltant; escapament
g-15	2	2010	-	1	82	**3a Kep**; *v_esc*
g-16	Extra	2010	-	1		**sat.**: *h;* si orb. el·líptica: *v_màx, v_min*

► g-01) juny'14 [S3 — P1]: ENUNCIAT

El *Meteosat* és un satèl·lit meteorològic llançat per l'Agència Espacial Europea (ESA) que proporciona informació meteorològica d'Àfrica i Europa. Com que l'objectiu del *Meteosat* és oferir imatges d'una mateixa zona del planeta, el satèl·lit segueix una òrbita geostacionària: gira en el pla equatorial a la mateixa velocitat angular que la Terra.

a) A quina distància de la superfície terrestre es troba el *Meteosat*?

b) Quina és l'energia cinètica del *Meteosat*? Quina energia mínima caldria proporcionar-li perquè s'allunyés indefinidament de la Terra?

DADES: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ $M_{\text{Terra}} = 5{,}97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$
$R_{\text{Terra}} = 6\,370\ \mathrm{km}$ $m_{\textit{Meteosat}} = 2{,}00 \times 10^{3}\ \mathrm{kg}$

resolució g-01: juny'14 [S3 — P1]

a)

$$m\omega^2(R_T+d) = \frac{GM_T m}{(R_T+d)^2}\ \boxed{0.2} \Rightarrow (R_T+d)^3 = \frac{GM_T T^2}{4\pi^2} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} - R_T\ \boxed{0.6} = 3,59{\cdot}10^4 km\ \boxed{0.2}$$

Si deixen de restar el radi de la Terra se'ls resta **0.2** punts

b)

$$E_c = \frac{1}{2}m\omega^2(R_T+d)^2 = \frac{1}{2}\frac{GM_T m}{R_T+d} = 9,42\cdot 10^9\ \mathrm{J}\ \boxed{0.3}$$

Per tal que el satèl · lit s'allunyi de l'atracció de la Terra, la seva energia mecànica ha de ser 0 $\boxed{0.2}$ $\Rightarrow$

$$E_m = E_c + E_p = -\frac{1}{2}\frac{GM_T m}{R_T+d} = -E_c\ \boxed{0.3}$$

Per tant caldrà subministrar-li una energia igual a $E_c = 9,42 \cdot 10^9$J $\boxed{0.2}$

► g-02) set'14 [S5 — P1]: ENUNCIAT

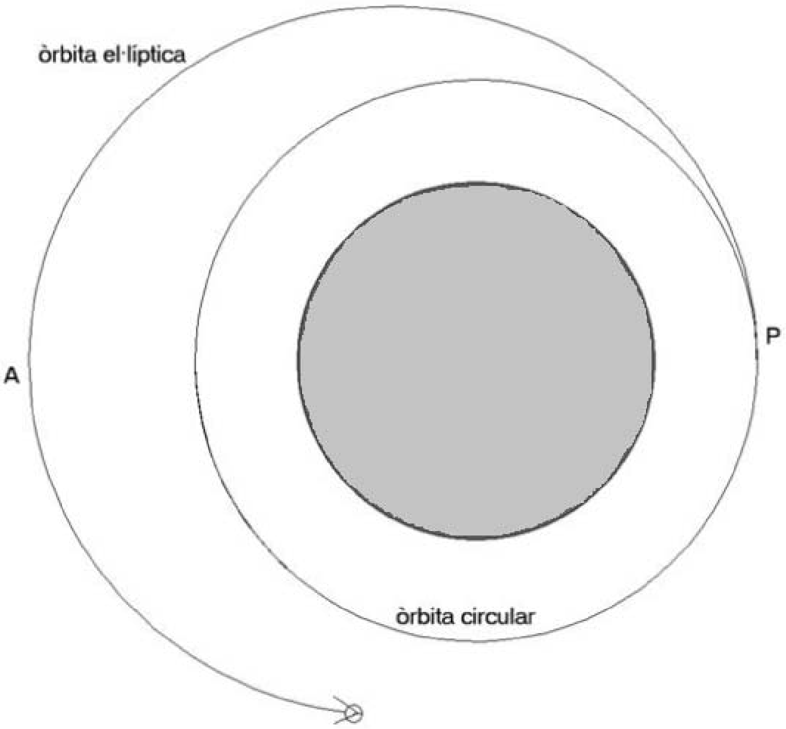
Un satèl·lit de 2 000 kg de massa gira en una òrbita circular a una altura de 3 630 km sobre la superfície de la Terra.

a) Calculeu el període d'aquesta òrbita circular i la velocitat del satèl·lit.

En passar pel punt P, el satèl·lit augmenta la velocitat fins a $7{,}00 \times 10^3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ i passa a descriure una òrbita el·líptica amb una altura màxima (apogeu) en el punt A de 9 530 km.

b) Calculeu l'energia cinètica, l'energia potencial gravitatòria i l'energia mecànica total en els punts P i A en la nova òrbita el·líptica.

(Veure gràfica i dades a la pàgina següent)



DADES: $M_{\text{Terra}} = 5{,}97 \times 10^{24}\,\text{kg}$
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{N m}^2\,\text{kg}^{-2}$
$R_{\text{Terra}} = 6\,370\,\text{km}$

resolució $\boxed{\text{g-02}}$**:** set'14 [S5 — P1]

a)

$$\frac{mv^2}{R_T+h} = G\,\frac{M_T m}{(R_T+h)^2}\boxed{0.2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}} = 6,31\cdot 10^3\,\text{m/s}\boxed{0.2}$$

$$v = \omega\,(R_T+h) = \frac{2\pi}{T}\,(R_T+h)\boxed{0.2} \Rightarrow T = \frac{2\pi(R_T+h)}{v}\boxed{0.2} = 9,96\cdot 10^3\,\text{s}\boxed{0.2}$$

b) En el punt P tindrem:

$$\left.\begin{array}{ll} E_c & = \frac{1}{2}mv^2 = 4,9\cdot 10^{10}\,\text{J}\boxed{0.1} \\ E_p & = -\frac{GM_T m}{R_T+h_P} = -7,96\cdot 10^{10}\,\text{J}\boxed{0.2} \end{array}\right\} E_T = E_c + E_p = -3,06\cdot 10^{10}\,\text{J}\boxed{0.1}$$

En el punt A, degut a que l'energia total es conserva al llarg de la trajectòria, tindrem:

$$\left.\begin{array}{ll} E_T & = -3,06\cdot 10^{10}\,\text{J}\boxed{0.2} \\ E_p & = -\frac{GM_T m}{R_T+h_A} = -5,01\cdot 10^{10}\,\text{J}\boxed{0.2} \end{array}\right\} E_c = E_T - E_p = 1,95\cdot 10^{10}\,\text{J}\boxed{0.2}$$

► g-03) juny'13 [S4 — P1]: ENUNCIAT

Ceres és el planeta nan més petit del Sistema Solar i durant molts anys va ser considerat un asteroide, ja que està situat en el cinturó que hi ha entre Mart i Júpiter. Ceres té un període orbital al voltant del Sol de 4,60 anys, amb una massa de $9{,}43 \times 10^{20}$ kg i un radi de 477 km. Calculeu:

a) Quin és el valor de la intensitat de camp gravitatori que Ceres crea a la seva superfície? Quina és la velocitat i l'energia mecànica mínima d'una nau espacial que, sortint de la superfície, escapés totalment de l'atracció gravitatòria del planeta?

b) La distància mitjana entre Ceres i el Sol, tenint en compte que la distància mitjana entre la Terra i el Sol mesura $1{,}50 \times 10^{11}$ m i que el període orbital de la Terra al voltant del Sol és d'un any.

DADA: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

resolució $\boxed{\text{g-03}}$: juny'13 [S4 — P1]

a)

$$g_C = \frac{GM_C}{R_C^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{9,43 \cdot 10^{20}}{(477 \cdot 10^3)^2} = 2,76 \cdot 10^{-1}\ \mathrm{m/s^2}\ \boxed{0.5}$$

Per poder sortir de l'òrbita de Ceres s'ha d'assolir una velocitat mínima (d'escapament) tal que l'energia mecànica sigui com a mínim 0: $E_m = 0$ $\boxed{0.1}$ Per tant:

$$E_m = 0 = \frac{1}{2} m v^2 - G\frac{M_C m}{R_C}\ \boxed{0.2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\ G\ M_C}{R_C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}\, 9,43 \cdot 10^{20}}{477 \cdot 10^3}} = 514\ \mathrm{m/s}\ \boxed{0.2}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{GM_S M_C}{d_{S-C}^2} = M_C \left(\frac{2\pi}{T_T}\right)^2 d_{S-C} \Rightarrow d_{S-C}^3 = \frac{GM_S}{4\pi^2} T_C^2 \\ \frac{GM_S M_T}{d_{S-T}^2} = M_T \left(\frac{2\pi}{T_T}\right)^2 d_{S-T} \Rightarrow d_{S-T}^3 = \frac{GM_S}{4\pi^2} T_T^2 \end{array}\right\} \boxed{0.2} \Rightarrow$$

$$\frac{d_{S-C}^3}{d_{S-T}^3} = \frac{T_C^2}{T_T^2}\ (3^{\text{a}}\ \text{llei de Klepler})\ \boxed{0.3} \Rightarrow d_{S-C} = d_{S-T}\sqrt[3]{\frac{T_C^2}{T_T^2}} = 1,50 \cdot 10^{11}\sqrt[3]{4,60^2} = 4,15 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}\ \boxed{0.5}$$

► g-04) juny'13 [S3 — P1]: ENUNCIAT

El sistema de navegació europeu Galileu estarà format per trenta satèl·lits distribuïts en tres plans orbitals a $2{,}36 \times 10^4$ km d'altura sobre la Terra, i cada un d'ells descriurà una òrbita circular. Calculeu:

a) Quin període de rotació tindran aquests satèl·lits?

b) Quina serà la velocitat orbital dels satèl·lits?

DADES: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} $\quad M_{\text{Terra}} = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg $\quad R_{\text{Terra}} = 6{,}37 \times 10^6$ m

resolució $\boxed{\text{g-04}}$:

juny'13 [S3 — P1]

a)

$$\frac{GM_T m_s}{(h+R_T)^2} = m_s\omega^2(h+R_T) = m_s\frac{4\pi^2}{T^2}(h+R_T)\boxed{0.2} \Rightarrow$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2(h+R_T)^3}{GM_T}\boxed{0.1}\ T = 2\pi\sqrt{\frac{(h+R_T)^3}{GM_T}}\boxed{0.1} = 2\pi\sqrt{\frac{(3,00\times10^7)^3}{6,67\times10^{-11}\ 5,98\times10^{24}}} = 5,17\times10^4\text{s} = 14,4\text{ h}\boxed{0.6}$$

b)

$$v = \omega(h+R_T) = \frac{2\pi}{T}(h+R_T)\boxed{0.5} = 3,65\times10^3\text{ m/s} = 3,65\text{ km/s}\boxed{0.5}$$

▶ g-05) set'13 [S1 — P1]: ENUNCIAT

L'any 1969, el mòdul de comandament *Columbia*, de la missió Apollo 11, tripulada per l'astronauta Michael Collins, orbitava a 100 km d'altura sobre la superfície de la Lluna amb un període de 118 minuts. Mentrestant, Neil Armstrong i Edwin Aldrin, els altres dos tripulants, caminaven sobre la Lluna. Calculeu:

a) La massa de la Lluna i la intensitat del camp gravitatori a la superfície lunar.

b) La velocitat d'escapament des de la superfície lunar.

DADES: $G = 6{,}67\times10^{-11}\text{ N m}^2\text{ kg}^{-2}$
$R_{\text{Lluna}} = 1{,}74\times10^3\text{ km}$

resolució $\boxed{\text{g-05}}$:

set'13 [S1 — P1]

a)

$$G\frac{M_L}{(R_L+h)^2} = (R_L+h)\,\omega^2\ \boxed{0.4} \Rightarrow M_L = \frac{(R_L+h)^3}{G}\omega^2\ \boxed{0.2}$$

$$M_L = \frac{(1.74\times10^6+10^5)^3}{6,67\times10^{-11}}\left(\frac{2\pi}{1,18\times10^2\cdot60}\right)^2 = 7,36\times10^{22}\text{ kg}\ \boxed{0.2}$$

$$g_L = G\frac{M_L}{R_L^2} = 1,62\text{ m/s}^2\ \boxed{0.2}$$

b)

$$E_{mecànica\,superfície\,Lluna} = -G\frac{M_L\,m}{R_L} + \frac{1}{2}m\,v^2\ \boxed{0.5}$$

Un objecte es podrà escapar de la superfície de la Lluna si la seva energia mecànica és zero $\boxed{0.25}$ ⇒

$$-G\frac{M_L\,\cancel{m}}{R_L} + \frac{1}{2}\cancel{m}\,v^2 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2G\,M_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{2\times6.67\times10^{-11}\ 7,36\times10^{22}}{1,74\times10^6}} = 2,38\times10^3\text{ m/s}\ \boxed{0.25}$$

▶ g-06) juny'12 [S3 — P1]: ENUNCIAT

El satèl·lit *Terra* de la NASA està dissenyat per a recollir dades sobre la superfície de la Terra, els oceans i l'atmosfera, amb l'objectiu d'estudiar la interrelació entre aquests medis i els sistemes biològics existents. El satèl·lit segueix una òrbita circumpolar (circular en el pla que passa pels dos pols) a 760 km de la superfície de la Terra i té una massa de $4{,}86\times10^3$ kg.

(L'enunciat del problema continua a la pàgina següent)

a) Quin és el període del moviment del satèl·lit en la seva òrbita?
b) Calculeu l'energia necessària que hem de subministrar al satèl·lit per a enviar-lo a la seva òrbita, si és llançat des de la superfície de la Terra.

DADES: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2};
$M_{\text{Terra}} = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg;
$R_{\text{Terra}} = 6{,}38 \times 10^{6}$ m.

resolució $\boxed{\text{g-06}}$**:** juny'12 [S3 — P1]

a) La força d'atracció gravitatòria és igual a la força centrípeta necessària perquè el satèl·lit giri en la seva òrbita: [**0.2**]

$$\frac{GM_T m_s}{(R_T+h)^2} = m_s\omega^2(R_T+h)\ [\mathbf{0.4}] = m_s\frac{4\pi^2}{T^2}(R_T+h)$$

Per tant el període del satèl·lit serà:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2(R_T+h)^3}{GM_T}}\ [\mathbf{0.2}] = 6{,}00\times10^3\ \text{s}\ [\mathbf{0.2}]$$

b) Suposant que la fricció és menyspreable, podem aplicar el principi de conservació de l'energia:

$$\left.\begin{aligned}\frac{GM_T m_s}{(R_T+h)^2} &= m_s\frac{v^2}{(R_T+h)}\\ (E_c + E_p)|_{\grave{o}rbita} &= \tfrac{1}{2}m_s v^2 - \frac{GM_T m_s}{(R_T+h)}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$(E_c + E_p)|_{\grave{o}rbita} = -\frac{1}{2}\frac{GM_T m_s}{(R_T+h)}\ [0.2]$$

$$(\Delta E + E_p)|_{superf\acute{i}cie\ de\ la\ Terra} = (E_c + E_p)|_{\grave{o}rbita} = -\frac{1}{2}\frac{GM_T m_s}{(R_T+h)}[0.2]$$

Per tant:

$$\Delta E|_{superf\acute{i}cie\ de\ la\ Terra} = E_m|_{\grave{o}rbita} - E_p|_{superf\acute{i}cie\ de\ la\ Terra}\ [0.2] \Rightarrow$$

$$\Delta E|_{superf\acute{i}cie\ de\ la\ Terra} = -\frac{1}{2}\frac{GM_T m_s}{(R_T + h)} + \frac{GM_T m_s}{R_T}\ [0.2] \Rightarrow$$

$$\Delta E|_{superf\acute{i}cie\ de\ la\ Terra} = \text{Energia necessària per posar el satèl.lit en òrbita} = GM_T m_s\frac{R_T+2h}{2(R_T + h)\,R_T} = 1.68\times10^{11}\ \text{J}\ [0.2]$$

► **g-07)** juny'12 [S1 — P1]: ENUNCIAT

El febrer del 2009 es va descobrir CoRoT-7b, un dels planetes extrasolars més petits trobats fins ara. El planeta CoRoT-7b gira al voltant de l'estel CoRoT-7, en una òrbita pràcticament circular de $2{,}58 \times 10^9$ m de radi, i fa una volta a aquest estel cada 20,5 h. La massa del planeta és $2{,}90 \times 10^{25}$ kg i té un radi de $1{,}07 \times 10^7$ m. Calculeu:

a) La massa de l'estel CoRoT-7.

b) L'acceleració de la gravetat en la superfície del planeta CoRoT-7b i la velocitat d'escapament en aquest planeta.

DADA: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N m² kg⁻².

resolució $\boxed{\text{g-07}}$: juny'12 [S1 — P1]

a)

$$G\frac{M_{planeta}\ M_{estrella}}{R^2_{orbita\ planeta}} = M_{planeta}\ R_{orbita\ planeta}\ \omega^2_{planeta}\ [\mathbf{0.5}];\ \omega_{planeta} = \frac{2\pi}{T_{planeta}}\ [\mathbf{0.3}]$$

$$M_{estrella} = \frac{R^3_{orbita\ planeta}\ \omega^2_{planeta}}{G} = \frac{R^3_{orbita\ planeta}}{G}\left(\frac{2\pi}{T_{planeta}}\right)^2 = 1,87 \times 10^{30} kg\ [\mathbf{0.2}]$$

b)

$$g_{planeta} = G\frac{M_{planeta}}{R^2_{planeta}} = 16,9\frac{m}{s^2}\ [\mathbf{0.3}];\quad \frac{1}{2}m\ v^2_{esc} - G\frac{M_{planeta}\ m}{R_{planeta}} = 0\ [\mathbf{0.5}]$$

$$v_{esc} = \sqrt{2G\frac{M_{planeta}}{R_{planeta}}} = \sqrt{2g_{planeta}\ R_{planeta}} = 1,90 \times 10^4\frac{m}{s}\ [\mathbf{0.2}]$$

► **g-08)** set'12 [S4 — P1]: ENUNCIAT

Al voltant de l'estrella WASP-18, que té una massa de $2{,}66 \times 10^{30}$ kg, s'ha descobert un planeta que gira en una òrbita aproximadament circular amb un període orbital excepcionalment curt: només 22,6 hores. La massa del planeta és deu vegades més gran que la massa de Júpiter.

a) Calculeu el radi de l'òrbita d'aquest planeta.

b) Calculeu l'energia cinètica del planeta en el seu moviment orbital i l'energia mecànica del sistema format per l'estrella i el planeta.

DADES: $M_{\text{Júpiter}} = 1{,}90 \times 10^{27}$ kg;
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N m² kg⁻².

resolució $\boxed{\text{g-08}}$: set'12 [S4 — P1]

a)

$$\frac{GM_W m_p}{R^2} = m_p\,\omega^2\,R = m_p\,\frac{4\pi^2}{T^2}\,R\ [0.4] \Rightarrow$$

$$R^3 = \frac{GM_W T^2}{4\pi^2} \Rightarrow$$

$$R = \left(\frac{GM_W T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}[0.4] = \left(\frac{6,67\times10^{-11}\cdot 2,66\times10^{30}\cdot(22,6\cdot3600)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 3,10\times10^{9}\text{m} = 3,10\times10^{6}\text{km}\ [0.2]$$

b)

$$E_c = \frac{1}{2}m_p\,v^2 = \frac{1}{2}m_p\,(\omega\,R)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{GM_W m_p}{R}\ [0.4] = 5,44\times10^{38}\ \text{J}\ [0.1]$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\,\frac{GM_W m_p}{R} + \left(-\frac{GM_W m_p}{R}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{GM_W m_p}{R} = -E_c\ [0.4] = -5,44\times10^{38}\ \text{J}\ [0.1]$$

▶ **g-09)** juny'11 [S1 — P2]: ENUNCIAT

Disposem de les dades següents del Sistema Solar:

DADES: $1\ \text{UA} = 1{,}496\times10^{11}\ \text{m}$; $R_{\text{Terra}} = 6{,}378\times10^{6}\ \text{m}$;
$M_{\text{Terra}} = 5{,}974\times10^{24}\ \text{kg}$; $G = 6{,}67\times10^{-11}\ \text{N m}^2\,\text{kg}^{-2}$.

Planetes	*Distància mitjana al Sol (UA)*	*Període orbital (anys)*	*Radi mitjà/R_{Terra}*	*Massa/M_{Terra}*
Mercuri	0,387	0,2408	0,386	0,055
Venus	0,723	0,6152	0,949	0,815
Terra	1	1,000	1	1
Mart	1,52	1,881	0,532	0,107
Júpiter	5,20	11,86	11,2	318
Saturn	9,54	29,45	9,45	95
Urà	19,2	84,02	4,01	14
Neptú	30,1	164,8	3,88	17

a) Calculeu el valor de la constant de la tercera llei de Kepler per a Venus, Júpiter i Saturn. Expresseu-la amb les xifres significatives adequades i amb les unitats que figuren en la taula. Amb els valors calculats, determineu el valor més correcte de la constant per al Sistema Solar.

b) Calculeu la massa del Sol i l'acceleració de la gravetat a la superfície de Mart.

resolució g-09: juny'11 [S1 — P2]

a)

$$K = \frac{T^2}{R^3} \Rightarrow \begin{aligned} K_{\text{Venus}} &= 1,00142 \sim 1,00\ \frac{\text{anys}^2}{\text{UA}^3} \\ K_{\text{Júpiter}} &= 1,00037 \sim 1,00\ \frac{\text{anys}^2}{\text{UA}^3} \\ K_{\text{Saturn}} &= 0,99891 \sim 1,00\ \frac{\text{anys}^2}{\text{UA}^3} \end{aligned} \quad [0.75]$$

$$\overline{K} = \frac{K_{\text{Venus}} + K_{\text{Júpiter}} + K_{\text{Saturn}}}{3} = 1,0002 \sim 1,00 \frac{\text{anys}^2}{\text{UA}^3} \quad [0.25]$$

b)

$$G\frac{M_{\text{Sol}} M_{\text{Terra}}}{R^2_{\text{Terra-Sol}}} = M_{\text{Terra}} R_{\text{Terra-Sol}} \left(\frac{2\pi}{T_{\text{Període orbital Terra}}} \right)^2 \quad [0.25]$$

$$M_{\text{Sol}} = \frac{R^3_{\text{Terra-Sol}} 4\pi^2}{G T^2_{\text{Període orbital Terra}}} = 1,99 \times 10^{30} kg \quad [0.25]$$

$$g_{\text{Mart}} = G\frac{M_{\text{Mart}}}{R^2_{\text{Mart}}} = 6,67 \times 10^{-11} \frac{0,107 \times 5,974 \times 10^{24}}{(0,532 \times 6,378 \times 10^6)^2} = 3,70\ m/s^2 \quad [0.5]$$

► **g-10)** juny'11 [S4 — A3]: ENUNCIAT

a) A la superfície d'un planeta, l'acceleració de la gravetat és $\boldsymbol{g}_s = 9\ \text{m/s}^2$, i a una altura $h = 100\ \text{km}$, és $\boldsymbol{g}_h = 8{,}7\ \text{m/s}^2$. Determineu el radi d'aquest planeta.

b) És possible que un satèl·lit artificial orbiti al voltant de la Terra a una velocitat de 10 km/s? Calculeu l'hipotètic radi d'aquesta òrbita i compareu-lo amb el radi de la Terra per justificar la resposta.

DADES: $M_{\text{Terra}} = 5{,}98 \times 10^{24}\ \text{kg}$; $R_{\text{Terra}} = 6\,371\ \text{km}$; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N m}^2\ \text{kg}^{-2}$.

resolució g-10: juny'11 [S4 — A3]

a)

$$g_s = \frac{G\ M}{R^2}$$

$$g_h = \frac{G\ M}{(R+h)^2} \quad [0.5]$$

$$\frac{g_s}{g_h} = \left(\frac{R + h}{R} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{g_s}{g_h}} = \frac{R + h}{R} \Rightarrow$$

$$R = \frac{h}{\sqrt{\frac{g_s}{g_h}} - 1} = 5850 km \quad [0.5]$$

b) Si r es l'hipotètic radi de l'òrbita, es verifica:

$$G\,\frac{M_T\,m}{r^2} = \frac{m\,v^2}{r}\ [\mathbf{0{,}5}] \Rightarrow$$
$$r = \frac{G\,M_T}{v^2} \Rightarrow$$
$$r = 3{,}989\times 10^6\ m = 3989\ km\ [\mathbf{0{,}25}]$$

Com que $r < R_T$, aquesta òrbita no és possible [**0.25**]

► **g-11)** juny'10 [S1 — A5]: ENUNCIAT

L'òrbita de la Terra al voltant del Sol es pot considerar circular, amb un període d'un any i un radi d'$1{,}50\cdot 10^8$ km. Considerant únicament el sistema format pel Sol i la Terra:

a) Calculeu la massa del Sol.

b) Determineu l'energia mecànica total (cinètica i potencial) de la Terra.

DADES: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$; $M_{\mathrm{Terra}} = 5{,}98\cdot 10^{24}$ kg.

resolució $\boxed{\text{g-11}}$: juny'10 [S1 — A5]

a) $F = m\,a\,;\ G\dfrac{M_S M_T}{d_{S-T}^2} = M_T\,a_c = M_T\,d_{S-T}\,\omega_T^2$ **[0,5]**

$$\omega_T = \frac{2\pi}{365\cdot 24\cdot 60\cdot 60} = 1{,}99\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\ \textbf{[0,2]}$$

$$M_S = \frac{d_{S-T}^3}{G}\,\omega_T^2 = \frac{d_{S-T}^3}{G}\left(\frac{2\pi}{T_T}\right)^2 = 2{,}01\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}\ \textbf{[0,3]}$$

b) $E_m = E_p + E_c = -G\dfrac{M_T\cdot M_S}{d_{T\text{-}S}} + \dfrac{1}{2}M_T v^2$ **[0,6]**

$$E_m = -6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 2{,}01\cdot 10^{30}}{1{,}50\cdot 10^{11}} + \frac{1}{2}5{,}98\cdot 10^{24}\left(1{,}50\cdot 10^{11}\,\frac{2\pi}{365\cdot 24\cdot 60\cdot 60}\right)^2 = -2{,}67\cdot 10^{33}\ \mathrm{J}\ \textbf{[0,4]}$$

► **g-12)** juny'10 [S1 — B5]: ENUNCIAT

El 4 d'octubre de 1957 es va llançar a l'espai el primer satèl·lit artificial, l'*Sputnik 1*, que va descriure una òrbita a 586 km d'altura sobre la superfície de la Terra. Suposant que aquesta òrbita era circular i sabent que la massa de l'*Sputnik 1* era 83,6 kg, calculeu:

a) El període de rotació del satèl·lit en l'òrbita que descrigué al voltant de la Terra.

b) La velocitat a què anava l'*Sputnik 1* en girar i la intensitat del camp gravitatori en la seva òrbita.

DADES: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_{\text{Terra}} = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_{\text{Terra}} = 6{,}37 \cdot 10^{6}$ m.

resolució $\boxed{\text{g-12}}$**:** juny'10 [S1 — B5]

a) $F_{\text{grav}} = m_{\text{sat}}\, a_{\text{centripeta}}$ **[0,3]**; $F_{\text{grav}} = G\dfrac{M_T m_{\text{sat}}}{(R_T + h)^2}$ **[0,2]**; $a_{\text{centripeta}} = G\dfrac{M_T}{(R_T + h)^2}$ **[0,1]**

$a_{\text{centripeta}} = r\omega^2 = (R_T + h)\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2$ **[0,2]** ; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(R_T + h)^3}{GM_T}} = 5.772\ \text{s}$ **[0,2]**

b) $v = \omega r$ **[0,3]**; $v = \dfrac{2\pi}{T}(R_T + h) = \dfrac{2\pi}{5.772}(6,37 \cdot 10^6 + 586 \cdot 10^3) = 7,57 \cdot 10^3\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ **[0,3]**

$g_h = G\dfrac{M_T}{(R_T + h)^2} = 8,24\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$ **[0,4]**

► **g-13)** juny'10 [S4 — P1]: ENUNCIAT

L'Estació Espacial Internacional (ISS, *International Space Station*) és fruit de la col·laboració internacional per a construir i mantenir una plataforma d'investigació amb presència humana de llarga durada a l'espai. Suposeu que la ISS té una massa de $3{,}7 \cdot 10^5$ kg i que descriu una òrbita circular al voltant de la Terra a una distància de $3{,}59 \cdot 10^5$ m des de la superfície. Calculeu:

(Nota: l'enunciat d'aquest problema continua a la pàgina següent)

a) La velocitat de l'Estació Espacial Internacional i el temps que triga a fer una volta a la Terra.
b) L'energia mecànica de la ISS. Justifiqueu el signe del valor trobat.

DADES: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$;
$M_{\text{Terra}} = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg;
$R_{\text{Terra}} = 6{,}37 \cdot 10^{6}$ m.

resolució g-13: juny'10 [S4 — P1]

a)

$$G\frac{M_{Terra}M_{ISS}}{\left(R_{Terra}+h_{ISS}\right)^2} = M_{ISS}\frac{v_{ISS}^2}{R_{Terra}+h_{ISS}} \quad \textbf{[0,5]}$$

$$v_{ISS} = \sqrt{G\frac{M_{Terra}}{R_{Terra}+h_{ISS}}} = 7{,}7\cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \textbf{[0,2]}$$

$$v_{ISS} = \frac{2\pi\left(R_{Terra}+h_{ISS}\right)}{T_{ISS}} \quad \Rightarrow \quad T_{ISS} = 5492\ \mathrm{s} \quad \textbf{[0,3]}$$

b) $E = -G\dfrac{M_{Terra}M_{ISS}}{R_{Terra}+h_{ISS}} + \dfrac{1}{2}M_{ISS}v_{ISS}^2$ **[0,5]**

$E = -1{,}1\cdot 10^{13}\ \mathrm{J}$ **[0,2]**, el signe negatiu indica que és una òrbita tancada. **[0,3]**

► **g-14)** juny'10 [S5 — P1]: ENUNCIAT

El 15 d'octubre de 2003, la Xina va posar en òrbita la seva primera nau espacial tripulada, de manera que esdevingué el tercer país del món a assolir aquesta fita. La nau tenia una massa de 7 790 kg i un període orbital de 91,2 minuts. Calculeu:
a) L'altura de l'òrbita sobre la superfície de la Terra, si suposem que és circular.
b) L'increment d'energia cinètica que caldria comunicar a la nau quan es troba en òrbita, perquè s'allunyi indefinidament de l'atracció terrestre.

DADES: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$; $M_{\text{Terra}} = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_{\text{Terra}} = 6{,}37 \cdot 10^{6}$ m.

resolució g-14: juny'10 [S5 — P1]

a) $\vec{F} = m\vec{a}$; $G\dfrac{M_T m}{\left(R_T+h\right)^2} = ma_c = m\left(R_T+h\right)\omega^2$ **[0,4]**

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ **[0,2]**; $G\dfrac{M_T m}{\left(R_T+h\right)^2} = m\left(R_T+h\right)\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt[3]{\dfrac{GM_T T^2}{4\pi^2}} - R_T = 3{,}43\cdot 10^5\ \mathrm{m}$ **[0,4]**

b) Per adquirir la velocitat d'escapament se li ha de suministrar una energia perque el satèl·lit arribi a l'infinit, on E_m=0. **[0,2]** [cal alguna discusió energètica per entendre els càlculs que fan]

$$\Delta E = E_{final} - E_{inicial} = -E_{inicial} = -E_{satel.lit}$$ **[0,2]**

$$E_{satel.lit} = -\frac{1}{2} G \frac{M_T m}{R_T + h} = -2,31 \cdot 10^{11}\ \mathrm{J}$$ **[0,4]**

Se li ha de suministrar una energia: $\Delta E = E_{final} - E_{inicial} = -E_{inicial} = -E_{satel.lit} = 2,31 \cdot 10^{11}\ \mathrm{J}$ **[0,2]**

► **g-15)** set'10 [S2 — P1]: ENUNCIAT

La distància mitjana del planeta Júpiter al Sol és 5,203 vegades la distància mitjana de la Terra al Sol. La massa de Júpiter és 317,8 vegades la massa de la Terra, i té un radi que és 10,52 vegades el radi terrestre. Suposem que les òrbites dels planetes que giren al voltant del Sol són circulars. Calculeu:

a) La durada de l'«any» de Júpiter, és a dir, el temps que triga Júpiter a fer una volta entorn del Sol.

b) La velocitat d'escapament a la superfície de Júpiter.

DADES: $R_{\text{Terra}} = 6\,367$ km; $g = 9{,}80$ m/s².

resolució $\boxed{\text{g-15}}$**:** set'10 [S2 — P1]

a) $$\frac{T_T^2}{d_T^3} = \frac{T_J^2}{d_J^3}$$ **[0,6]**

$$T_J^2 = \frac{d_J^3}{d_T^3} T_T^2 \Rightarrow T_J = \sqrt{5,203^3 \cdot 1^2} = 11,87\ \text{anys}$$ **[0,4]**

b) $$\frac{1}{2} m v_{esc}^2 - G\frac{M_J m}{R_J} = 0$$ **[0,5]**

$$v_{esc} = \sqrt{2G\frac{M_J}{R_J}}$$ **[0,1]**

A més: $$g = G\frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow G\frac{M_T}{R_T} = gR_T$$ **[0,2]**

$$v_{esc} = \sqrt{2G\frac{M_J}{R_J}} = \sqrt{2G\frac{317,8 M_T}{10,52 R_T}} = \sqrt{2 \cdot \frac{317,8}{10,52} \cdot gR_T} = 6,14 \cdot 10^4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$ **[0,2]**

► g-16) curs 2009/10 [Extra — P1]: ENUNCIAT

Els satèl·lits GPS (*global positioning system*, 'sistema de posicionament global') descriuen òrbites circulars al voltant de la Terra. El conjunt dels satèl·lits permet que en qualsevol punt de la Terra una persona amb un receptor GPS pugui determinar la posició on es troba amb una precisió de pocs metres. Tots els satèl·lits GPS estan a la mateixa altura i fan dues voltes a la Terra cada 24 hores. Calculeu:

a) La velocitat angular dels satèl·lits i l'altura de la seva òrbita, mesurada sobre la superfície de la Terra.

b) Si els satèl·lits descriguessin òrbites el·líptiques molt allargades al voltant de la Terra, de manera que la distància dels satèl·lits a la Terra variés molt, en lloc de les òrbites circulars de l'apartat a). En quina posició respecte la Terra els satèl·lits anirien a una velocitat més gran? I en quina anirien a una velocitat més petita? Justifiqueu les respostes utilitzant arguments basats en l'energia..

DADES: $G = 6{,}67 \cdot 10\text{–}11\,\text{N·m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_{\text{TERRA}} = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_{\text{TERRA}} = 6\,380$ km; $M_{\text{SAT}} = 150$ kg.

resolució $\boxed{\text{g-16}}$: curs 2009/10 [Extra — P1]

a/ $T = 12\ h = 43\,200\ s \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{43\,200} = 1{,}45 \cdot 10^{-4}\ \text{rad/s}}$

• És un MCU de radi $R_T + h$ sota força gravitatòria

$$F_c = M_{SAT} \frac{\overbrace{v^2}^{=a_N}}{R_T + h} \qquad F_g = G \frac{M_{SAT} \cdot M_T}{(R_T + h)^2} \qquad \xRightarrow{F_g = F_c}$$

$$\Rightarrow \cancel{M_{SAT}} \frac{v^2}{\cancel{R_T + h}} = G \frac{\cancel{M_{SAT}} \cdot M_T}{(R_T + h)^{\cancel{2}}} \Rightarrow$$

$v = (R_T + h) \cdot \omega$ en un MCU

$$\Rightarrow (R_T + h)^3 = \frac{G M_T}{\omega^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \sqrt[3]{\frac{G M_T}{\omega^2}} - R_T} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{(1{,}45 \cdot 10^{-4})^2}} - 6\,380 \cdot 10^3 =$$

$$\boxed{= 2{,}03 \cdot 10^{7}\ m}$$

b/ $$\boxed{E_M = \underbrace{E_c(v)}_{\frac{1}{2}mv^2} + \underbrace{E_p(r)}_{-G\frac{M_T m}{r}}}$$

Si $v\uparrow \Leftrightarrow E_c\uparrow$

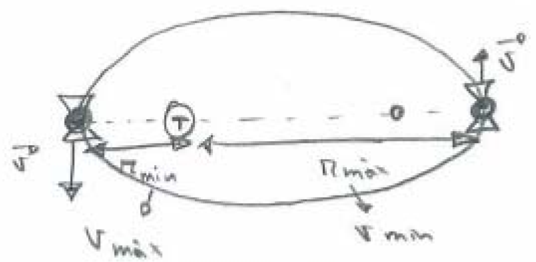
Si $r\uparrow \Leftrightarrow E_p\uparrow$

r és al denom., però hi ha el signe menys (!)

$\Downarrow$

• Com que E_M és constant, si volem $v\uparrow$ fins $\boxed{v_{màx}}$, $E_c\uparrow \Rightarrow E_p\downarrow$ per a mantindre E_M constant $\Rightarrow r\downarrow$ fins a $\boxed{r_{mín}}$.

• Anàlogament, si $v\downarrow$ fins $\boxed{v_{mín}}$, $r\uparrow$ fins $\boxed{r_{màx}}$ per a que E_M es mantingui constant:



$$\boxed{\text{La } v_{màx} \text{ s'assoleix quan més a prop està de la Terra, i la } v_{mín} \text{ quan més lluny.}}$$