La llei de la desintegració radioactiva

1. Els models físics

La física treballa a partir de l'estudi experimental de fenòmens que encara no sabem explicar bé. El comportament de qualsevol sistema físic, però, per senzill que sigui, sempre és molt complex. Per això, quan fem una descripció acurada i rigorosa dels fenòmens que hem estudiat experimentalment, aquesta descripció està tan plena de detalls i complicacions que podríem arribar a creure fàcilment que la natura és incomprensible.

La solució és deixar de banda, provisionalment, tal descripció detallada i rigorosa del fenomen, i inventar-nos-en una altra, molt més senzilla, on hem eliminat els detalls i ens hem quedat només amb les característiques més representatives. Per a inventar aquesta descripció simplificada no existeix cap recepta universal, i sovint cal fer servir la nostra intuïció i imaginació. Una vegada fet això, hem de traduir la nova descripció a llenguatge matemàtic de la manera més senzilla possible. Així haurem fet un *model aproximat*, i no exageraríem si diguéssim que fer aquestes aproximacions és la part més important de la investigació en física.

Les teories més grans i potents han nascut a partir d'aquests models aproximats. A més a més, quan ja tenim una teoria que funciona bé, per tal de fer-la servir (aplicacions tecnològiques, mèdiques, etc.) també necessitem fer aproximacions i construir models senzills, perquè l'aplicació directa de les equacions de la teoria sol conduir a una complicació matemàtica excessiva.

2. Exemple: la llei de la desintegració radioactiva

Sigui *N(t)* el nombre de nuclis que tenim en l'instant *t* d'una certa substància radioactiva.

Voldríem saber quina forma matemàtica té la funció *N(t)*.

L'estudi de diversos experiments va portar als físics a fer una hipòtesi aproximada senzilla: *I si el ritme al que els nuclis es desintegren en un instant donat és proporcional al nombre total de nuclis que n'hi ha?*

Matemàticament, això s'escriu de la manera següent

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = -\lambda N}$$

on λ és la constant de proporcionalitat, que triem positiva (i per això hem d'afegir el signe menys, ja que *N(t)* decreix conforme els nuclis es van desintegrant, i per tant la seva derivada és negativa).

3. Ús del càlcul integral per trobar la funció *N(t)*

La darrera equació, però, no ens diu encara quina forma té la funció *N(t)*. Per tal de trobar-la, haurem de manipular l'equació fent servir les tècniques del càlcul integral.

Com que necessitarem usar logaritmes, en farem abans un petit recordatori. Si tenim l'equació $e^x = a$, aillem l'x usant els logaritmes neperians: $x = \ln a$ (considerem que $a > 0$). De fet, les darreres dues equacions són equivalents,

$$\boxed{e^x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln a}$$

Dita la qual cosa, tornem a l'equació $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$, que reescriurem així: $N' = -\lambda N$. Anem a passar la *N* dividint al primer membre,

$$N' = -\lambda N \quad \Rightarrow \quad \frac{N'}{N} = -\lambda$$

i ara integrem ambdós membres respecte del temps,

$$\int \frac{N'}{N} dt = -\int \lambda\, dt$$

Aquestes integrals són fàcils: la de l'esquerra és el logaritme de la funció *N(t)*, al qual no cal ficar barres de valor absolut perquè sempre $N \geq 0$; la de la dreta és la integral d'una constant. Tenim, per tant, que

$$\ln(N) = -\lambda t + K$$

Escrivim només una única constant d'integració *K* perquè si, per exemple, la constant de la integral de l'esquerra fos C_1, i la de la dreta fos C_2, sempre podem definir $K = -C_1 + C_2$.

Ara aïllem l'*N* usant la propietat que hem requadrat al final de la pàgina anterior (el paper de l'*a* el fa ara l'*N*):

$$N = e^{-\lambda t + K} = e^{-\lambda t} \cdot e^{K} = e^{-\lambda t} \cdot C$$

on hem definit una nova constant, $C = e^K$, per conveniència.

Ja tenim el nombre de nuclis expressat explícitament com a funció del temps,

$$N(t) = Ce^{-\lambda t}$$

Només ens queda interpretar la constant C. Això ho fem veient que en l'instant inicial, *t=0*, la darrera equació queda reduïda a $N(t=0) = C$, és a dir: C és la quantitat inicial de nuclis, que en diem usualment N_0, i per tant podem escriure, finalment,

$$\boxed{N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}}$$

Així, hem vist com una hipòtesi senzilla condueix al model que hem vist a classe per a la llei de desintegració, i en el procés hem hagut de fer una integral, i hem interpretat la constant d'integració en termes de "condicions inicials".

Aquest esquema de treball és totalment quotidià en la investigació en física.

4. Apèndix: més enllà dels models aproximats

Hom podria plantejar-se que, atès que hem simplificat el problema real, la llei trobada $N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$ només serà vàlida per descriure els resultats experimentals de manera aproximada.

Aquesta reflexió és certa en sentit estricte, però cal fer-hi dues observacions.

La primera, que la llei $N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$ és una aproximació excel·lent en un conjunt molt gran de casos, i en la majoria de les aplicacions pràctiques.

La segona, que hom podria certament treballar amb lleis més acurades i matemàticament molt més complexes, basades en l'ús de la Mecànica Quàntica (o, fins i tot, de la Teoria Quàntica de Camps). Però no oblidem que el camí que ha dut a construir aquestes teories tan sofisticades ha hagut de passar, primerament, per la construcció de models aproximats i senzills de l'estil del que nosaltres acabem d'estudiar.