4 Matrius i sistemes d'equacions lineals

37. Digues, en cada cas, quin producte té sentit: $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$, $\mathrm{B}\cdot\mathrm{A}$, els dos o no cap. Calcula tots els que tinguin sentit.

a) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}0 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

b) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

c) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}2 & 6 & 5\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$

d) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}6 & 7\\ -9 & 4\end{pmatrix}$ $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}5\\ 6\end{pmatrix}$

e) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}$ $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}6 & 7\\ -9 & 4\end{pmatrix}$

f) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}$ $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}5\\ 6\end{pmatrix}$

g) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 7\end{pmatrix}$ $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}5\\ 6\\ 0\end{pmatrix}$

h) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

i) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$ $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

j) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$

k) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}$ $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}-1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

38. Calcula la matriu resultant de cadascuna de les següents operacions amb matrius. En l'apartat (g), a més a més, cal que trobis els valors d' x i y que fan que el resultat de l'operació matricial sigui igual a la matriu columna següent: $\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$.

a) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}4 & 5\\ 6 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\right]$

b) $\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5\\ 6 & 2\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}4 & 5\\ 6 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -4 & 0\end{pmatrix}\right]$

d) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5\\ 6 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -4 & 0\end{pmatrix}$

e) $\left[\begin{pmatrix}4 & 5\\ 6 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -4 & 0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix}4 & 5\\ 6 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -4 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

39. Triangula per Gauss les següents matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

40. Escriu la matriu ampliada, $\overline{A}$, de cadascun dels següents sistemes d'equacions lineals. Després, triangula-la per Gauss, i digues el rang de l'ampliada $\overline{A}$ i de la de coeficients A:

a)

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -6 \\ 4x + 6y + z = 1 \\ -x - y - 5z = 5 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -6 \\ 2x + 7y - 2z = 7 \\ 4x + 6y + z = 1 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -6 \\ 2x + 7y - 2z = 5 \\ 4x + 6y + z = 1 \end{cases}$$

41. A partir del resultat de la triangulació de cada matriu ampliada $\overline{A}$ de l'exercici anterior, torna a escriure un sistema d'equacions. Tracta de solucionar cada sistema. Quan tinguis una solució d'un dels sistemes, comprova si també és solució del sistema original.

42. Troba la inversa de les següents matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -15 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Comprova, fent els productes $M \cdot M^{-1}$ i $M^{-1} \cdot M$, que efectivament són les inverses.

43. Classifica cada sistema amb el teorema de Rouché-Frobenius, i troba'n les solucions quan sigui compatible:

a)

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -9 \\ -x + 3z = 7 \\ 4x - y - z = 6 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2x + 2y + 6z = 2 \\ 7x - y + 2z = 3 \\ -5x + 3y + 4z = -1 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ -3x + 5y + 10z = 1 \\ 5x - 3y - 4z = -3 \end{cases}$$

44. Calcula els determinants de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -8 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 6 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

45. Troba per Gauss el rang de les matrius de l'exercici (44).

46. Calcula:

a) $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^t$ **b)** $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}^t$ **c)** $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}^t$ **d)** $\left[\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}^t\right]^t$

47. Troba una matriu X tal que $A \cdot B + X = C$ si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

48. Troba per determinants el rang de les següents matrius:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -8 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 9 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 & 21 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

49. Discuteix si els següents sistemes de vectors són lliures o lligats segons els valors del paràmetre m:

a) $S = S = \{(2, -m),\ (m, -8)\}$

b) $S = \{(2, -m,\ 0),\ (m, -8,\ 1)\}$

c) $S = \{(2,\ m),\ (m, -8)\}$

d) $S = \{(m, -1, -4,\ 2),\ (3,\ 1, -2, 1),\ (3, -3, -6,\ m)\}$

e) $S = \{(1,\ m,\ m),\ (0,\ 1,\ m),\ (0,\ 0,\ 1)\}$

f) $S = \{(m,\ 1,\ 1),\ (1,\ m,\ 1),\ (1,\ 1,\ m)\}$

g) $S = \{(2,\ 1,\ m,\ 0),\ (m,\ 0,\ 1, -1),\ (3, -2, -1,\ 5)\ (1,\ 0,\ 2,\ 3)\}$

50. Calcula, quan sigui possible, la matriu inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

51. Demostra que els següents sistemes són SCD. Després, troba'n les solucions emprant la regla de Cramer.

a)

$$\begin{cases} x - y + 2z = 18 \\ 2x + 4y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = -3 \\ 5x + 6y - z = 13 \\ 4x - y + 3z = 8 \end{cases}$$

52. Resol, quan sigui possible, els següents sistemes:

a)
$$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ x+y+2z=3 \\ x+3y+2z=1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x+y-z=3 \\ x-y+z=1 \\ 3x+y=4 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=4 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x-5y+4z+w=-3 \\ x-2y+z-w=5 \\ x-4y+6z+2w=10 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x-y+z=0 \\ x-3y-z=2 \\ 3x-3y+4z=-4 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 3x-y=6 \\ 6x+y=1 \\ x-2y+2z=-5 \end{cases}$$

53. Demostra, en cada cas, que el sistema S forma base d' $\mathbb{R}^2$ (ó $\mathbb{R}^3$), i expressa en termes seus el vector $\vec{v}$.

a) $S=\{\vec{i},\ \vec{j}\}$, on $\vec{i}=(1,\ 0)$ i $\vec{j}=(0,\ 1)$; $\vec{v}=(2,\ -3)$

b) $S=\{(1,\ 1),\ (-1,\ 1)\}$; $\vec{v}=(2,\ -3)$

c) $S=\{(0,\ 6),\ (-2,\ 0)\}$; $\vec{v}=(2,\ -3)$

d) $S=\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$, on $\vec{i}=(1,\ 0,\ 0)$, $\vec{j}=(0,\ 1,\ 0)$ i $\vec{k}=(0,\ 0,\ 1)$; $\vec{v}=(6,\ -2,\ 1)$

e) $S=\{(1,\ 1,\ 0),\ (1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 1)\}$; $\vec{v}=(1,\ 0,\ 0)$

f) $S=\{(1,\ 1,\ 0),\ (1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 1)\}$; $\vec{v}=(1,\ 1,\ 0)$

54. Expressa, en cada cas, el vector $\vec{v}$ com a combinació lineal dels vectors del conjunt $S=\{\vec{a},\ \ \vec{b}\}$.

a) $\vec{a}=(1,-1,\ 3)$; $\vec{b}=(3,\ 2,-2)$; $\vec{v}=(17,\ 8,-4)$

b) $\vec{a}=(2,-1,\ 3)$; $\vec{b}=(1,-1,0)$; $\vec{v}=(1,\ -2,-3)$

c) $\vec{a}=(2,-1,\ 3)$; $\vec{b}=(1,-1,0)$; $\vec{v}=(1,\ -2,-2)$

55. Problemes de les PAU:

A.- [set'14]

Considereu el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} mx - y = m \\ 3x + (m-4)y = m+2 \end{cases}$, per a $m \in \mathbb{R}$.

a) Discutiu el sistema d'equacions per als diferents valors del paràmetre m.

b) Resoleu el sistema en aquells casos en què el sistema sigui compatible.

B.- [juny'14]

Responeu a les qüestions següents:

a) Si $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ són dues matrius quadrades d'ordre n, demostreu que

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}.$$

b) Si $\boldsymbol{M}_1$ i $\boldsymbol{M}_2$ són dues matrius de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$,

amb a, $b \in \mathbb{R}$, comproveu que el producte $\boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{M}_2$

té també la mateixa forma i que $\boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{M}_2 \cdot \boldsymbol{M}_1$.

C.- [juny'14]

Responeu a les qüestions següents:

a) Demostreu que si A és una matriu quadrada que satisfà la igualtat $A^2 = I$, on I és la matriu identitat, aleshores A és invertible i A^{-1} satisfà $(A^{-1})^2 = I$.

b) Calculeu l'expressió general de les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ amb $b \neq 0$ que satisfan la igualtat $A^2 = I$.

D.- [set'13]

Sigui $V = \{(-1, 1, 1), (-2, -1, 0), (1, 2, a)\}$ un conjunt de vectors de $\mathbb{R}^3$.

a) Trobeu el valor o els valors de a perquè V sigui linealment dependent.

b) Quan $a = 4$, expresseu el vector $\vec{v} = (3, 9, 14)$ com a combinació lineal dels vectors de V.

E.- [juny'13]

La matriu de coeficients d'un sistema d'equacions lineals homogeni és

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 4 & 1 & 2a+2 \end{bmatrix}$$

a) Per a quins valors del paràmetre a el sistema té una sola solució? Quina és aquesta solució única?

b) Resoleu el sistema si $a = 2$.

F.- [juny'13]

Sabem que el vector (2, 1, −1) és una solució del sistema

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= a + c \\ bx - y + bz &= a - b - c \\ cx - by + 2z &= b \end{aligned}\right\}$$

Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c.

G.- [set'13]

Siguin les matrius

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & b & 4 \\ 3 & c & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & b & 8 \\ 1 & c & 3 \\ 4 & a & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 5 & 5 \\ -b & -a & -2 \end{bmatrix},$$

on a, b i c són paràmetres reals. Calculeu el valor d'aquests paràmetres perquè cap de les tres matrius tingui inversa.

H.- [juny'14]

Considereu la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$, per a $a \in \mathbb{R}$.

a) Calculeu el rang de la matriu M en funció dels valors del paràmetre a.

b) Discutiu i resoleu, segons els valors del paràmetre a, el sistema d'equacions lineals

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$