3 Integrals

28. Troba una funció primitiva de les següents funcions:

$f(x) = 1/x$	$g(x) = 3x^2$	$h(x) = 2x$
$i(x) = 4$	$j(x) = \cos x$	$k(x) = \sin x$
$l(x) = 7\cos 7x$	$m(x) = 3\cos 3x$	$n(x) = \cos 3x$
$o(x) = -\cos 4x$	$p(x) = 8x^7$	$q(x) = 16x^7$
$r(x) = 32x^7$	$s(x) = x^2$	$t(x) = x^5$
$u(x) = 10x^2$		

►**Definició (funció primitiva):**

Sigui la funció $f(x)$. Direm «primitiva d' f » a qualsevol funció $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, és a dir:

$$\boxed{f(x) \text{ és la derivada d' } F(x)} \Leftrightarrow \boxed{F(x) \text{ és primitiva d' } f(x)}$$

►**Teorema:**

Sigui la funció $f(x)$, i sigui una primitiva seva qualsevol, $F(x)$. Aleshores, per a qualsevol altra primitiva $\Phi(x)$ de la funció $f(x)$, existeix una constant $k \in \mathbb{R}$ tal que: $\Phi(x) = F(x) + k$.

►**Definició (integral indefinida):**

Sigui la funció $f(x)$, i sigui una primitiva seva qualsevol, $F(x)$. Denominarem "integral indefinida" (o "primitiva general") de la funció f al conjunt de totes les seves funcions primitives, que en virtud del teorema anterior podrà escriure's de la forma: $F(x) + k$, $\forall k \in \mathbb{R}$. Indicarem el seu càlcul així::

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k$$

COMENTARIS:

La funció que integrem, $f(x)$, rep el nom de "integrand". El símbol $\int$ es coneix amb el nom de "símbol integral". L'expressió dx ens indica dues coses: on acaba l'integrand, i quina és la variable respecte de la qual integrem. Rep el nom de "diferencial d' ics" (o "diferencial de ve", si, posem per cas, v fos la variable).

29. Troba, i expressa adequadament, la integral indefinida de les següents funcions:

1) $\int \frac{3}{2\sqrt{x}} dx$	**2)** $\int \frac{7}{2\sqrt{x}} dx$	**3)** $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
4) $\int e^x \, dx$	**5)** $\int \left(e^x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$	**6)** $\int x^7 \, dx$
7) $\int x^{15} \, dx$	**8)** $\int x^{93} \, dx$	**9)** $\int x^{6,5} \, dx$
10) $\int x^{3,72} \, dx$	**11)** $\int x^m \, dx$	**12)** $\int x^{0,5} \, dx$
13) $\int \sqrt{x} \, dx$	**14)** $\int \sqrt{x^5} \, dx$	**15)** $\int \sqrt[3]{x} \, dx$
16) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx$	**17)** $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^2}} dx$	**18)** $\int \sqrt[7]{x^2} \, dx$
19) $\int 9x^2 \, dx$	**20)** $\int \frac{1}{x^3} dx$	**21)** $\int \frac{6}{x^3} dx$
22) $\int \frac{7}{x^5} dx$	**23)** $\int \left(\frac{8}{x^7} + x^2 - \sqrt{x}\right) dx$	

24) $\int \left(\frac{2}{x^3} - 7x^5 + 4\sqrt{x} + 2\right) dx$

25) $\int \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} - e^x + \frac{7}{9}\right) dx$

PROPIETATS de "LINEALITAT" de les integrals:

$$\boxed{\int \lambda \cdot f \, dx = \lambda \int f \, dx}$$

"Les constants poden sortir"

$$\boxed{\int (f+g) \, dx = \int f \, dx + \int g \, dx}$$

"Integral de la suma = suma de les integrals"

Recordatori: Algunes regles de derivació

1) $y = k$	$\rightarrow$ $y' = 0$	**8)**	$(\sin u)' = u' \cos u$
2) $y = x$	$\rightarrow$ $y = 1$	**9)**	$(\cos u)' = -u' \sin u$
3) $y = u + v$	$\rightarrow$ $y' = u' + v'$	**10)**	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = (1 + \operatorname{tg}^2 u)\, u'$
4) $y = ku$	$\rightarrow$ $y' = ku'$	**11)**	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
5) $y = u^k$	$\rightarrow$ $y' = k\, u^{k-1}\, u'$	**12)**	$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
6) $y = e^u$	$\rightarrow$ $y' = u' e^u$	**13)**	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
7) $y = \ln u$	$\rightarrow$ $y' = \frac{u'}{u}$		

30. (Càlcul d'àrees: exercici elemental). Considera les següents quatre funcions:

$$f(x) = 2 \qquad g(x) = x \qquad h(x) = x - 1 \qquad u(x) = \sin x + 2$$

a) Representa gràficament f, g i h a la regió $x \in [0, 5]$.

b) Troba l'àrea del recinte limitat per la gràfica d' f, l'eix d'abscisses i les rectes r: $x = 2$ i s: $x = 5$.

c) Troba l'àrea del recinte limitat per la gràfica de g, l'eix d'abscisses i les rectes r: $x = 2$ i s: $x = 5$.

d) Troba l'àrea del recinte limitat per la gràfica d' h, l'eix d'abscisses i les rectes r: $x = 2$ i s: $x = 5$.

e) Identifica al diagrama on has fet les darreres representacions el recinte limitat per la gràfica d' h, la gràfica d' f, l'eix d'abscisses i les rectes r: $x = 2$ i s: $x = 5$. Després, calcula la seva àrea.

f) Representa gràficament u a la regió $x \in [0, 2\pi]$. Després, troba l'àrea de la regió compresa entre la seva gràfica i l'eix d'abscisses en aquesta regió.

31. Representa gràficament les següents funcions en els intervals indicats, i calcula amb la regla de Barrow les corresponents àrees sota la corba:

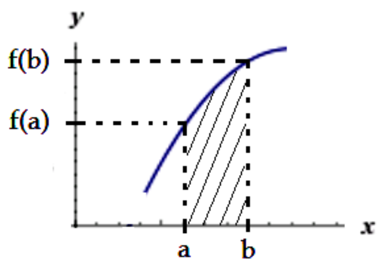
a) $\displaystyle\int_1^{10} \frac{1}{x}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_0^{2} (2 - x^2)\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^{1} (1 - x^5)\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} (\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx$

Regla de Barrow (I): càlcul d'àrees sota gràfiques amb funcions contínues no negatives

Sigui la funció $f(x)$, contínua i no negativa en l'interval $I = [a, b]$, i sigui la funció $F(x)$, primitiva d' f en el mateix interval. Aleshores, l'àrea sota la gràfica d' f entre $x = a$ i $x = b$, que escriurem així: $\int_a^b f(x)\,dx$, es pot calcular fent:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)} \equiv F(x)\Big|_a^b$$

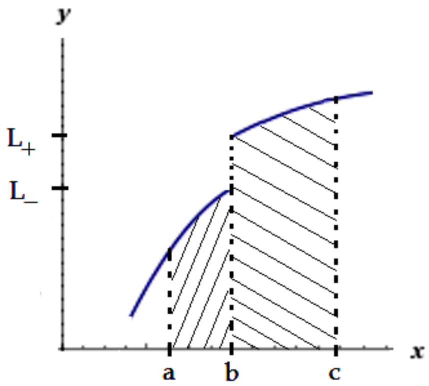


NOTA: la condició de continuïtat d' f, així com la definició de derivada d' F, als extrems d' I, la relaxem, i hi exigirem només els corresponents límits laterals (en a per la dreta i en b per l'esquerra).

Regla de Barrow (II): funcions no negatives i contínues excepte un salt finit

Si $f(x)$ és <u>no negativa</u> en l'interval $I = [a, c]$, i es <u>contínua</u> en tot l'interval <u>excepte</u> una <u>discontinuïtat de salt finit</u> al punt $x = b \in (a, c)$, podem reduïr el problema del càlcul de l'àrea sota la gràfica d' f en I al càlcul en $[a, b]$ i el càlcul en $[b, c]$, doncs aquestes dues àrees sí les podrem intentar avaluar aplicant la regla de Barrow, i l'àrea total en serà la suma:

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx} \equiv F_e(x)\Big|_a^b + F_d(x)\Big|_b^c$$

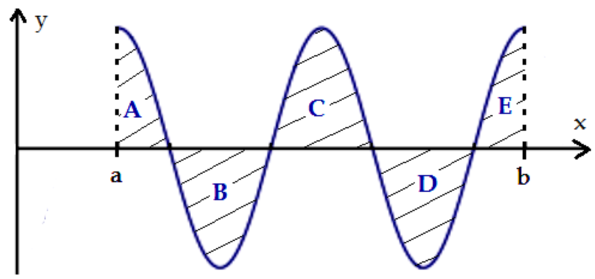


NOTA: Independentment del valor real d' f en b (si hi està definida), considerarem que el seu valor és $L_- = \lim_{x \to b^-} f(x)$ per a buscar-ne la primitiva en $[a, b]$, $F_e(x)$, així com considerarem que hi val $L_+ = \lim_{x \to b^+} f(x)$ per a buscar-ne la primitiva en $[b, c]$, $F_d(x)$.

Integral Definida (definició operativa)

Sigui la funció $f(x)$, contínua en l'interval $I = [a, b]$. Direm A^{sobre} a la suma de les àrees de totes les regions compreses entre la gràfica d' f i l'eix d'abscisses on f sigui positiva en I. Direm A^{sota} a la suma de les àrees de totes les regions compreses entre la gràfica d' f i l'eix d'abscisses on f sigui negativa en I. <u>Definició</u>: la diferència $A^{\text{sobre}} - A^{\text{sota}}$ rep el nom de "integral definida amb límit inferior a i límit superior b" de la funció f, escrit així:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = A^{\text{sobre}} - A^{\text{sota}}}$$



Exemple: a la il·lustració,

$$A^{\text{sobre}} = A + C + E$$

$$A^{\text{sota}} = B + D$$

NOTA: Representant la funció a un paper de densitat coneguda, retallant les regions, pesant-les i dividint la massa entre la densitat, coneixem les àrees. La definició rigorosa que <u>Riemann</u> donà d'integral, però, no necessita d'aquest procediment i es basa en un <u>límit</u>.

PROPIETATS de la INTEGRAL DEFINIDA

►**Teorema de Newton-Leibnitz:**

Sigui la funció $f(x)$, contínua en l'interval $I = [a, b]$, i sigui la funció $F(x)$, primitiva d' f en el mateix interval. Aleshores, la integral definida d' f entre els límits $x = a$ i $x = b$ es pot calcular amb la regla de Barrow:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

►**Integrals de funcions amb paritat definida en intervals simètrics:**

Si la funció $f(x)$ té algun tipus de simetria, es verifica que:

· si $f(x)$ és parella: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

· si $f(x)$ és senar: $\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 0$

►**Separació de la integral en dues etapes:**

Si volem integrar $f(x)$ en $I = [a, c]$ i $b \in (a, c)$, sempre podem fer:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

►**Ampliació de la definició (discontinuïtat de salt finit):**

Si la funció $f(x)$ que volem integrar en $I = [a, c]$ només presenta una discontinuïtat de salt finit al punt $x = b \in (a, c)$, definirem la seva integral definida amb una fórmula semblant a l'anterior (de les "dues etapes"), però integrant en el primer tram la funció $f_e(x)$, que pren els mateixos valors que f en tot I excepte en b, on val $L_- = \lim_{x\to b^-} f(x)$, i en el segon tram integrarem $f_d(x)$, que pren els mateixos valors que f en tot I excepte en b, on val $L_+ = \lim_{x\to b^+} f(x)$. És a dir:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f_e(x)\,dx + \int_b^c f_d(x)\,dx$$

► **Ampliació de la definició (inversió de l'interval d'integració):**

Si $b < a$, definirem: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

►**Linealitat:** $\int_a^b \lambda f\,dx = \lambda \int_a^b f\,dx \qquad \int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$

31. Problemes d'integral definida:

e) Calcula l'àrea sota la gràfica de la funció $f(x)$ entre $x = 0$ i $x = 3$, sent-hi

$$f(x) = \begin{cases} x^5 & x < 1 \\ 7 & x \geq 1 \end{cases}$$

f) Calcula l'àrea sota la gràfica d' $f(x) = \cos x$ entre $x = -\frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{\pi}{2}$.

g) Calcula la integral definida següent, i després justifica el resultat:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\, dx$$

h) Calcula l'àrea del recinte tancat per $f(x) = 1 + x^2$, $g(x) = -2x + 4$, l'eix d'abscisses i l'eix d'ordenades.

i) Sigui la paràbola $f(x) = -x^2 + 4x$. Calcula l'àrea del recinte tancat per la seva gràfica i les rectes r: $y = -\frac{4}{3}x + 4$ i s: $x = 2$.

j) Una partícula es desplaça al llarg de l'eix X set metres. Està sotmesa a l'acció d'una força $\vec{\mathrm{F}}$ que volem estudiar, la qual actua tota l'estona només en la direcció de l'eix X. La component x d'aquesta força val, en funció de la posició i expressada en newtons (N):

$$F(x) = \begin{cases} 5x^2 & x \in [0, 1) \text{ m} \\ 5 & x \in [1, 6) \text{ m} \\ -5x + 35 & x \in [6, 7] \text{ m} \end{cases}$$

Sabent que, en una dimensió —com és el nostre cas—, el treball que fa una força $\vec{\mathrm{F}}$ entre dues posicions A i B es calcula així:

$$W_F^{A \to B} = \int_{x_A}^{x_B} F(x)\, dx,$$

troba el treball que ha fet $\vec{\mathrm{F}}$ al llarg del trajecte.

k) Una partícula es desplaça al llarg de l'eix X, sotmesa a una força paral·lela a l'eix, la component x de la qual val: $F(x) = 150 \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$, on x s'expressa en m i F en N. Considera les posicions (en m):

$$x_A = 0,\ x_B = 1,\ x_C = 2,\ x_D = 3 \text{ i } x_E = 4.$$

Calcula els treballs següents: $W_F^{A \to B}$, $W_F^{A \to C}$, $W_F^{A \to D}$, $W_F^{A \to E}$. Interpreta el resultat en termes geomètrics, sabent que en termes físics una força fa treball positiu quan va a favor del moviment, i negatiu quan va en contra.

l) Calcula la integral definida següent: $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \mathrm{tg}^2\, x\, dx$.

m) Calcula la integral definida següent: $\displaystyle\int_0^{1} x^2 \sin(x^3 - 7)\, dx$.

n) Calcula la integral definida següent [SELE'10]: $\displaystyle\int_0^{\pi/6} x \sin x\, dx$.

o) Sigui la funció $f(x) = \sqrt{x-1}$ i la recta $r\colon\ y = k,\ \ k > 0$. Fes un esbós del recinte limitat per les seves gràfiques i els dos eixos. Troba el valor del paràmetre k, sabent que l'àrea d'aquest recinte és $14/3$. [SELE'13]

p) Sigui la funció $f(x) = \sqrt{x-1}$ per a $x \geq 1$. Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica d' f en el punt d'abscissa $x = 10$. Calcula l'àrea del recinte limitat per la gràfica d' f, l'eix d'abscisses i la recta $r\colon\ x = 5$. [SELE'13]

q) Calcula l'àrea de la regió compresa entre la gràfica d' $f(x) = 2 - x$ i l'eix d'abscisses a l'interval $x \in [1, 3]$.

r) Calcula l'àrea de la regió compresa entre les gràfiques d' $f(x) = 1 + 5x$ i $g(x) = -1 - 2x$ a l'interval $x \in [0, 2]$.

s) Siguin les funcions $f(x) = -x^2 + 4$ i $g(x) = x + 3$. Calcula l'àrea del recinte limitat per les seves gràfiques.

t) Calcula l'àrea de la regió compresa entre les gràfiques d' $f(x) = -x - 3$ i $g(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$ a l'interval $x \in [0, 3]$.

RESUM d'algunes TÈCNIQUES de CÀLCUL d'àrees amb funcions contínues:

1.- Àrea entre $f(x)$ i eix X, en $I = [a, b]$, quan f no hi canvia de signe:

$$A = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

2.- Àrea entre $f(x)$ i eix X, en $I = [a, b]$, quan f hi canvia de signe N vegades: primer, trobem i ordenem de menor a major els corresponents punts de tall, $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Després, calculem:

$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \cdots + \left| \int_{x_N}^{b} f(x) dx \right|$$

3.- Àrea entre $f(x)$ i $g(x)$ en $I = [a, b]$: construïm $\Phi(x) = f(x) - g(x)$. L'àrea buscada és igual a l'àrea entre $\Phi(x)$ i eix X, que calculem amb (1) ó (2).

32. Calcula les següents integrals indefinides (1-5 de r. de la cadena, 6-10 per parts):

1) $\int 2xe^{x^2}\,dx$ **2)** $\int \cos x \cdot \sin^3 x \cdot dx$ **3)** $\int \operatorname{tg} x\,dx$

4) $\int \sin x \cdot \cos x\,dx$ **5)** $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}dx$ **6)** $\int x\cos x\,dx$

7) $\int x\sin 6x\,dx$ **8)** $\int x\,e^{-x}\,dx$ **9)** $\int 12xe^{7x}\,dx$

10) $\int x\ln x\,dx$

33. Integrals per parts:

1.- $\int x\cdot e^x dx$

2.- $\int x\cdot\cos x\,dx$

3.- $\int x\cdot\sin x\,dx$

4.- $\int x\cdot\ln x\,dx$

5.- $\int x\cdot e^{3x} dx$

6.- $\int x\cdot 2^x\,dx$

7.- $\int x\cdot\sin 6x\,dx$

8.- $\int x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

9.- $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

10.- $\int x\cdot e^{-x} dx$

11.- $\int \arctan x\,dx$

12.- $\int x^2\cdot e^x dx$

13.- $\int x^2\cdot\cos 2x\,dx$

14.- $\int \ln x\,dx$

15.- $\int x^2\cdot\ln x\,dx$

16.- $\int \ln^2 x\,dx$

17.- $\int x\cdot\arctan x\,dx$

18.- $\int \arcsin x\,dx$

19.- $\int e^x\cdot\cos x\,dx$

20.- $\int e^x\cdot\sin x\,dx$

21.- $\int \cos(\ln x)\,dx$

22.- $\int \cos^2 x\,dx$

23.- $\int \sin^2 4x\,dx$

34. Integrals variades:

1. $\int x^5 dx$
2. $\int \left(x+\sqrt{x}\right)dx$
3. $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx$
4. $\int\frac{x^2}{\sqrt{x}}\,dx$
5. $\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x\sqrt{x}}+2\right)dx$
6. $\int\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$
7. $\int e^{5x}dx$
8. $\int\cos 5x\,dx$
9. $\int\sin ax\,dx$
10. $\int\frac{\ln x}{x}dx$
11. $\int\frac{1}{\sin^2 3x}dx$
12. $\int\frac{1}{\cos^2 7x}dx$
13. $\int\frac{1}{3x-7}\,dx$
14. $\int\frac{1}{1-x}\,dx$
15. $\int\frac{1}{5-2x}dx$
16. $\int\tan 2x\,dx$
17. $\int\sin^2 x\cos x\,dx$
18. $\int\cos^3 x\sin x\,dx$
19. $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$
20. $\int\frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}dx$

35. Integrals immediates:

1) $\int 3x^2 \; dx$

2) $\int x^4 \; dx$

3) $\int dx$

4) $\int \frac{1}{x^2} \, dx$

5) $\int \frac{3}{x^3} \, dx$

6.- $\int \frac{1}{x} \; dx$

7.- $\int \frac{1}{t} \; dt$

8.- $\int \frac{x^4}{5} \, dx$

9.- $\int \sqrt{z} \; dz$

10.- $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \; dx$

11.- $\int \sqrt[3]{p^2} \; dp$

12.- $\int x\sqrt[3]{x} \, dx$

13.- $\int \frac{x^5}{\sqrt{x}} \, dx$

14.- $\int (x + 2) \; dx$

15.- $\int \frac{t^3 - 2t^2}{5t} \; dt$

16.- $\int \frac{3t^2 + 1}{t} \; dt$

17.- $\int 7x^2 dx$

18.- $\int \frac{1}{x^2 + 1} \; dx$

19.- $\int 3\cos x \; dx$

20.- $\int \frac{\sin x}{6} \, dx$

21.- $\int \frac{-2}{\cos^2 x} \; dx$

22.- $\int \frac{2 + x^3}{x^2} \, dx$

23.- $\int 4^x \; dx$

24.- $\int 3 \cdot 6^x \, dx$

25.- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

26.- $\int px \, dx$

27.- $\int px \, dp$

28.- $\int z^2 x \, dx$

29.- $\int z^2 x \; dz$

30.- $\int \cos t \; dx$

31.- $\int e^x \; dt$

32.- $\int \frac{x}{t} \; dx$

33.- $\int \frac{x}{t} \; dt$

34.- $\int ax^k \, dx$

35.- $\int b \cdot (b-x) \, dx$

36- $\int ax^{k+2} dx$

37.- $\int \frac{a}{x^k} \, dx$

38.- $\int \frac{1}{x+2} \, dx$

39.- $\int \frac{1}{x-3} \, dx$

40.- $\int \cos(x+2) \; dx$

41.- $\int \sin(x-4) \; dx$

42.- $\int e^{x-6} \; dx$

43.- $\int (x-4)^3 \; dx$

44.- $\int (x+4)^2 \; dx$

45.- $\int 5^{x+3} \; dx$

46.- $\int (7x^3 + 5x^2 - 3x + \frac{5}{7}) \; dx$

47.- $\int (x^2 - 3)^2 \; dx$

48.- $\int x \cdot (x+1)^2 \, dx$

49.- $\int \left(x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$

50.- $\int \frac{6x^2}{5} \; dx$

51.- $\int \frac{(x^2 - 5x)^2}{7} \; dx$

52.- $\int \frac{3x^3 - 5x + 6}{2x} \; dx$

53.- $\int \frac{1 - x}{\sqrt{x}} \; dx$

54.- $\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 x} \; dx$

55.- $\int \frac{10}{1+x^2} \; dx$

56.- $\int \frac{8}{\sqrt{-x^2+1}} \; dx$

57.- $\int \frac{10}{1+(x-4)^2} \; dx$

58.- $\int \frac{10}{1+(x+1)^2} \; dx$

59.- $\int \frac{3}{\sqrt{1-(x-6)^2}} \; dx$

60.- $\int \frac{3}{\sqrt{1-(x+3)^2}} \; dx$

61.- $\int k\sqrt{x+k} \; dx$

62.- $\int \frac{e^{x-p}}{p} \; dx$

63.- $\int a\sqrt[3]{x+b} \; dx$

64.- $\int \frac{kx+p}{a} \; dx$

65.- $\int \frac{p}{x-k} dx$

66.- $\int \frac{2}{\sin^2(x+k)} \; dx$

36. Integrals quasiimmediates:

1) $\int 2\cdot\sin(2x)\,dx$

2) $\int \sin(2x)\,dx$

3) $\int \sin(6x-7)\,dx$

4) $\int x\cdot\sin(7-3x^2)\,dx$

5) $\int e^x\cdot\sin(e^x+2)\,dx$

6.- $\int x\cdot e^{x^2}\,dx$

7.- $\int e^{3x+1}\,dx$

8.- $\int 2^{5x-6}\,dx$

9.- $\int 200\,e^{-\frac{x}{5}}\,dx$

10.- $\int \frac{2}{4x+3}dx$

11.- $\int x\cdot\cos(x^2+4)\,dx$

12.- $\int \frac{1}{\cos^2(2x-1)}dx$

13.- $\int \sin x\cdot\cos x\,dx$

14.- $\int x\cdot 3^{-x^2}\,dx$

15.- $\int \sin^3 x\cdot\cos x\,dx$

16.- $\int \sin x\cdot\cos^2 x\,dx$

17.- $\int \frac{2x}{6x^2+4}dx$

18.- $\int \frac{5x^2}{6x^3+4}dx$

19.- $\int \frac{x^5}{1+x^6}dx$

20.- $\int \frac{e^x}{2+e^x}dx$

21.- $\int x\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx$

22.- $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

23.- $\int \frac{2x}{\sqrt[3]{1-2x^2}}dx$

24.- $\int \sqrt{(1+\cos x)^3}\,\sin x\,dx$

25.- $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-3x^3}}dx$

26.- $\int e^x\cdot\cos(e^x)\,dx$

27.- $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

28.- $\int \frac{1}{x}\cdot\ln x\,dx$

29.- $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$

30.- $\int \frac{1}{x\cdot\ln x}\,dx$

31.- $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

32.- $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx$

33.- $\int \frac{1}{1+5x^2}\,dx$

34.- $\int \frac{1}{4+x^2}\,dx$

35.- $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}+1}dx$

36.- $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

37.- $\int \frac{1}{4+9x^2}\,dx$

38.- $\int \frac{1}{a^2+b^2x^2}\,dx$

39.- $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

40.- $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

41.- $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

42.- $\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$

43.- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\,dx$

44.- $\int K\cdot e^{-px}\,dx$

45.- $\int \frac{1}{2+e^{-x}}dx$

46.- $\int \frac{kx}{1+kx^2}dx$

47.- $\int \frac{k}{1+kx^2}dx$

48.- $\int \frac{kx}{\sqrt{1+kx^2}}dx$

49.- $\int \frac{kx}{\sqrt{1-kx^2}}dx$

50.- $\int \frac{k}{\sqrt{1-kx^2}}dx$

51.- $\int \frac{3x}{(x^2+4)^3}dx$

52.- $\int \frac{3x^2+4x}{x^3+2x^2-5}dx$

53.- $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x}dx$

54.- $\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

55.- $\int \tan x\,dx$

56.- $\int \cot an\, x\,dx$

57.- $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx$

58.- $\int e^{-x}\,dx$

59.- $\int \frac{1}{(x+3))^4}\,dx$

60.- $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

61.- $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$

62.- $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

63.- $\int \sin(2x)\cos^2(2x)\,dx$

RESUM TÈCNIQUES BÀSIQUES de CÀLCUL de PRIMITIVES:

I) POTÈNCIES

$$\int x^p\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{p+1}}{p+1} & p \neq -1 \\ \ln|x| & p = -1 \end{cases}$$

• exemples:

▶ $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + K$

▶ $\int \frac{6}{x}\,dx = 6\ln|x| + K$

▶ $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-1/2}\,dx = 2x^{1/2} + K = 2\sqrt{x} + K$

II) CONSTANT PER FUNCIÓ

$$\int \lambda \cdot f\,dx = \lambda \int f\,dx$$

• exemples:

▶ $\int 4x\,dx = 4\int x\,dx = 4\,\frac{1}{2}x^2 + K = 2x^2 + K$

▶ $\int \cos 6x\,dx = \frac{6}{6}\int \cos 6x\,dx = \frac{1}{6}\int 6\cos 6x\,dx = \frac{1}{6}\cdot \operatorname{sen} 6x + K$

III) SUMA DE FUNCIONS

$$\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$$

• exemples:

▶ $\int \left(x + \frac{1}{x} + 2\right)dx = \int x\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx + \int 2\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + 2x + K$

▶ $\int \frac{2x^2+x}{x}\,dx = \int (2x+1)\,dx = \int 2x\,dx + \int dx = x^2 + x + K$

IV) REGLA de la CADENA

$$\int g' \cdot f'(g)\,dx = f(g)$$

• exemples:

▶ $\int 2x\,e^{x^2}\,dx = e^{x^2} + K$

▶ $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \operatorname{sen} x\,\frac{1}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + K$

V) CAS CONCRET R. CADENA

$$\int u' \cdot u^n\,dx = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$$

$\left(\text{si } n=1: \quad \boxed{\int f' \cdot f\,dx = \frac{1}{2}f^2}\right)$

• exemples:

▶ $\int \cos x \cdot \operatorname{sen}^3 x\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x + K$

▶ $\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + K$

▶ $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + K$

VI) INTEGRAL PER PARTS

$$\int u v'\,dx = uv - \int v u'\,dx$$

• exemples:

▶ $\int x e^x\,dx = \left\| \begin{matrix} u = x \to u' = 1 \\ v' = e^x \to v = e^x \end{matrix} \right\| = xe^x - \int e^x\,dx = e^x(x-1) + K$

▶ "recursiva":

$\underbrace{\int \cos^2 x\,dx}_{\text{"}I\text{"}} = \left\| \begin{matrix} u = \cos x \to u' = -\operatorname{sen} x \\ v' = \cos x \to v = \operatorname{sen} x \end{matrix} \right\| = \cos x \cdot \operatorname{sen} x + \int \operatorname{sen}^2 x\,dx \underset{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}{=}$

$= \cos x \cdot \operatorname{sen} x + \underbrace{\int dx}_{x+K} - \underbrace{\int \cos^2 x\,dx}_{= I} \Rightarrow$ Aïllem I:

$I = \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(\cos x \operatorname{sen} x + x) + C$

ALGUNES ESTRATÈGIES davant el CÀLCUL de PRIMITIVES BÀSIQUES

(els números romans es refereixen a les tècniques de pàgina anterior).

1: tractar de trobar semblances amb una regla de derivació [cal saber-les perfectament de memòria] → si és necessari, es pot forçar multiplicant & dividint per una constant (o sumant i restant una constant).

2: aplicar la linealitat:
- → treure constants a fora: II
- → separar en suma d'integrals: III

3: FRACCIONS
- pas a producte: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ → regla cadena? / per parts? ... veure 4
- dividir els polinomis: $\frac{D(x)}{d(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$
- trencar la fracció: $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$
- passar tot a una única potència → I
- logaritme? $\left(\frac{u'}{u}\right)$
- arctg / arc sin / arc cos ?

4: PRODUCTES
- → regla cadena? $(u' g(u))$: bàsica: IV; derivada per potència $(u' \cdot u^n)$; derivada per funció $(f' \cdot f)$ } V
- → per parts? → derivem un factor i integrem l'altre, i el producte és més fàcil d'integrar { bàsica / reiterada / recursiva } VI

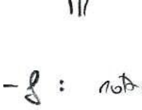
5: per parts "oculta": si la derivada de l'integrand multiplicada per x és més fàcil d'integrar, fem per parts amb $v' = 1$.

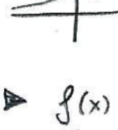
ALGUNS RESULTATS ÚTILS per a la "representació exprès" de funcions:

▶ $x^3, x^5, x^7 \ldots$:

▶ $x^2, x^4, x^6 \ldots$: 

▶ $\sqrt{x}$: 

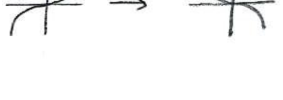
▶ $\ln|x|$: 

▶ e^x: 

▶ e^{-x}: 

▶ $\frac{1}{x}$: 

▶ $f \to -f$: rotació al voltant eix X:



▶ $f(x) \to f(x-a)$: trasllada "a unitats" gràfica a dreta:

[si $a<0$, "a esquerra"].

▶ $f(x) \to f(x)+b$: puja "b unitats" gràfica

[si $b<0$, "baixa"].