2.2 Continuïtat i representació de funcions

20. Calcula la derivada que s'indica en cadascun dels següents casos usant la definició. (El primer apartat està resolt com a exemple). Comprova que et dóna el mateix que amb regles de derivació. NOTA: no es permet L'Hôpital.

a) $f(x)=4x \;\Rightarrow\; f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4(1+h)-4\cdot 1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h}{h}=4$

b) $f(x)=6x \;\Rightarrow\; f'(5)$

c) $f(x)=x^2 \;\Rightarrow\; f'(2)$

d) $f(x)=1/x \;\Rightarrow\; f'(3)$

e) $f(x)=|x| \;\Rightarrow\; f'(0)$

f) $f(x)=x^2 \;\Rightarrow\; f'(x)$

g) $f(x)=10 \;\Rightarrow\; f'(x)$

h) $f(x)=\sqrt{x} \;\Rightarrow\; f'(7)$

i) $f(x)=\ln x \;\Rightarrow\; f'(x)$

►**Definició (derivada en un punt):**

Sigui la funció $f(x)$. Direm «derivada d' f en $x=a$», escrit $f'(a)$, al número que resulta del límit següent (si existeix i es finit):

$$\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

COMENTARIS:

1) Al darrer límit no apareix la lletra x. El seu paper el juga la lletra h. És a dir: estem fent el límit d'una funció que té a h com a variable independent.

2) Definicions equivalents de derivada en $x=a$:

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

3) Sense el límit, l'últim membre de la darrera expressió és la fórmula del pendent de la recta que passa pels punts de la gràfica d' f amb abscisses x i a.

►**Definició (funció derivada):**

Direm «funció derivada d' f», escrit $f'(x)$, a la funció tal que a cada valor d' x li associa la derivada d' f en x:

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}=Df(x)=\frac{df}{dx}$$

21. Calcula la derivada de les següents funcions fent ús només de les regles (1), (2), (3), (4), (12), (14), (15) i (16) de la pàgina següent. Ajuda: per a les quatre primeres, pots utilitzar la tècnica de derivar la funció inversa. Per a la resta, pots usar la tècnica de prendre logaritmes de tota l'expressió abans de derivar.

a) $y = e^x$ **b)** $y = \text{arc tg}\, x$ **c)** $y = \text{arc sin}\, x$

d) $y = \text{arc cos}\, x$ e) $y = x^m$ **f)** $y = u(x) \cdot v(x)$

g) $y = u(x)^{v(x)}$ ← amb aquesta, usa també la regla (7)

22. Deriva i simplifica. Si ho necessites, pots consultar la taula de derivades de la pàgina següent. Acompanyen a cada funció, entre claudàtors, les principals regles que hi calen (està en negreta la més important en cada cas).

a) $y = \frac{e^{2x} + \ln^2 x + \cos 3x}{2}$ [**3**, 4, 5, 9, 12, 15]

b) $y = \frac{5}{(2x+6)^3}$ [1 a 4, **5**]

c) $y = \ln\sqrt{\ln x}$ [6, **12**]

d) $y = \frac{(x+2)\cdot \ln x}{\sqrt{x+1}}$ [6, 7, **8**, 12]

e) $y = \log_2 \sqrt{\frac{x^2}{x^2-4}}$ [6, 8, **13**]

f) $y = \cos\sqrt{x^2+16}$ [6, **15**]

g) $y = \text{tg}^3 \sqrt{x^2+2}$ [**5**, 6, 16]

h) $y = [1 + \cos^2(1-3x)]^2$ [3, **5**, 15]

i) $y = \sin^4[\ln(x^2+5)]$ [**5**, 12, 14]

j) $y = 4 \sec 3x$ [**5**, 15]

k) $y = \sec^2(x^3-2)$ [**5**, 15]

l) $y = \frac{1}{\sin^3 x}$ [**5**, 14]

m) $y = e^{\text{tg}\, 3x} \cdot \sqrt[3]{x^2+1}$ [**5**, 7, 9, 16]

n) $y = 4\, \text{arctg}\, 2x$ [2, 4, **19**]

o) $y = \text{arctg}\frac{3x+2}{4}$ [1 a 4, **19**]

p) $y = \arcsin\frac{\sqrt{3x}}{2}$ [6, **17**]

q) $y = 2^{\text{arctg}\, x} \cdot \sqrt{1-x^2}$ [6, 7, **10**, 19]

r) $y = x^x$ [2, **11**]

s) $y = x^{\cos x}$ [**11**, 15]

t) $y = (7x)^{\sin x}$ [2, 4, **11**, 14]

u) $y = (x^2+3)^{x+5}$ [1 a 5, **11**]

v) $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$ [**5**]

w) $y = \log_{\cos x}(\sin x)$ [**8**, 12, 14, 15]

x) $y = M \log_b(ax^2 + c)$ [1 a 5, **13**]

y) $f(x) = te^x$ [2, 4, **9**]

z) $f(t) = te^x$ [2, **4**]

Recordatori de trigonometria:

Funcions circulars inverses:

$$\begin{cases} x = \sin\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \arcsin x \\ x = \cos\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \arccos x \\ x = \text{tg}\,\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \text{arctg}\, x \end{cases}$$

$$\boxed{\text{cosec}\, A = \frac{1}{\sin A}} \qquad \boxed{\sec A = \frac{1}{\cos A}}$$

$$\boxed{\text{cotg}\, A = \frac{1}{\text{tg}\, A}}$$

Regles de derivació: (sent-hi k, m, a i b constants, i u i v funcions)

1) $y = k \quad \rightarrow \quad y' = 0$

2) $y = x \quad \rightarrow \quad y' = 1$

3) $y = u + v \quad \rightarrow \quad y' = u' + v'$

4) $y = ku \quad \rightarrow \quad y' = ku'$

5) $y = u^m \quad \rightarrow \quad y' = m\, u^{m-1}\, u'$

6) $y = \sqrt{u} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

7) $y = u \cdot v \quad \rightarrow \quad y' = u'v + uv'$

8) $y = \frac{u}{v} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Avís: la numeració de les regles de derivació d'aquesta taula no es correspon amb la dels temes anteriors.

9) $(e^u)' = e^u \cdot u'$

10) $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

11) $(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v\, u^{v-1}\, u'$

12) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

13) $(\log_b u)' = \frac{1}{\ln b} \frac{u'}{u}$

14) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

15) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

16) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = (1 + \operatorname{tg}^2 u) \cdot u'$

17) $(\operatorname{arc} \sin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

18) $(\operatorname{arc} \cos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

19) $(\operatorname{arc} \operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

23. Problemes de rectes tangents i asímptotes de les PAU

problema E (set'14)

Siguin les funcions $f(x) = \dfrac{e^{ax} + b}{4}$ i $g(x) = +\sqrt{3x+4}$.

a) Determineu el domini i el recorregut de la funció g.

b) Calculeu per a quins valors de a i de b les gràfiques de les dues funcions són tangents (és a dir, tenen la mateixa recta tangent) en el punt d'abscissa $x = 0$.

problema F (juny'13)

Sigui $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Sabem que la gràfica d'aquesta funció és tangent a la recta r: $y = x + 3$ en el punt d'abscissa $x = -1$, i que en el punt d'abscissa $x = 1$ la recta tangent és paral·lela a la recta r.
Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c.

problema G (juny'14)

Considereu la funció $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$.

a) Calculeu les asímptotes verticals, horitzontals i obliqües de la funció f.

b) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en aquells punts en què la recta tangent sigui paral·lela a la recta $y = -5x + 4$.

problema H (set'12)

Sigui $f(x) = \dfrac{ax^2}{x+b}$, en què $a \neq 0$.

a) Determineu si té alguna asímptota vertical, en funció del paràmetre b.
b) Indiqueu el valor dels paràmetres a i b perquè la funció $f(x)$ tingui la recta $y = 2x - 4$ com a asímptota obliqua a $+\infty$.

problema I (set'12)

Donades la recta $y = ax + 1$ i la paràbola $y = 3x - x^2$,
a) Calculeu els valors del paràmetre a perquè siguin tangents.
b) Calculeu els punts de tangència.

problema J (juny'12)

Donades la recta $y = 3x + b$ i la paràbola $y = x^2$,
a) Calculeu l'abscissa del punt on la recta tangent a la paràbola és paral·lela a la recta donada.
b) Calculeu el valor del paràmetre b perquè la recta sigui tangent a la paràbola.

24. Troba les asímptotes de les següents funcions.

a) $f(x) = \frac{3}{x} + 2$ **b)** $f(x) = \frac{1}{x-2}$ **c)** $f(x) = \frac{1}{x^2}$

d) $f(x) = \frac{1}{x} + x$ **e)** $f(x) = \frac{3x^2}{x-1} + 4$ **f)** $f(x) = \ln x$

g) $f(x) = \operatorname{tg} x$ **h)** $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ **i)** $f(x) = 2\frac{e^x - xe^{2x}}{e^{2x}} + 1$

j) $f(x) = \ln|x|$ **k)** $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ **l)** $f(x) = \ln(x-6)$

► **Asímptotes verticals:** la funció f té la recta $\boxed{r:\ x = a}$ com a <u>AV</u> si algun dels límits laterals en a existeix i no és finit. És a dir, si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{i/o} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

► **Asímptotes horitzontals:** la funció f té la recta $\boxed{r:\ y = a}$ com a <u>AH a la dreta</u> si existeix i és finit el límit quan $x \to \infty$, i el seu valor és a. És a dir

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

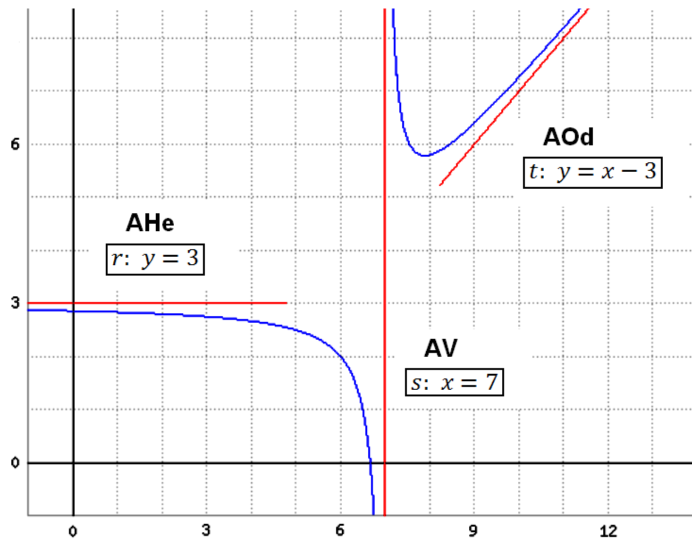
Anàlogament, $\boxed{s:\ y = b}$ serà <u>AH a l'esquerra</u> si: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

► **Asímptotes obliqües:** la funció f té la recta $\boxed{r:\ y = mx + n}$ com a <u>AH a la dreta</u> si existeixen i són finits els límits següents:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$$

Anàlogament, $\boxed{s:\ y = Mx + N}$ serà <u>AO a l'esquerra</u> si existeixen i són finits els límits:

$$M = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad N = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - Mx)$$



Exemple:

La següent funció definida a trossos té tres asímptotes:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-7} + 3 & x < 7 \\[2ex] \dfrac{8}{10(x-7)} + x - 3 & x > 7 \end{cases}$$

PROCEDIMENT per al CÀLCUL d'ASÍMPTOTES:

1.- AV: trobem els punts on: «$\text{denominador} = 0 \quad \text{ó} \quad \log 0$» (CANDIDATS)

2.- fem els límits laterals en els candidats: si algun surt $\pm\infty$ $\Rightarrow$ hi ha AV

3.- AH: calculem límits: $\begin{cases} x \to +\infty\text{: si surt finit} \Rightarrow \text{hi ha AHd} \\ x \to -\infty\text{: si surt finit} \Rightarrow \text{hi ha AHe} \end{cases}$

4.- AO: si el límit de les... $\begin{cases} \text{AHd ens ha sortit infinit} \Rightarrow \text{busquem AOd} \\ \text{AHe ens ha sortit infinit} \Rightarrow \text{busquem AOe} \end{cases}$

CONTINUÏTAT i tipus de DISCONTINUÏTATS:

Intuïtivament, si una funció és contínua en una regió llavors podrem dibuixar-hi la seva gràfica sense "aixecar el llapis del paper" (és a dir: serà una corba sense talls). De manera més precisa:

► **Definició:** direm que la funció $f(x)$ és contínua en el punt $x = a$ quan:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Això significa que es verificarà, alhora, que:

1) $f(x)$ està definida en el punt $x = a$.

2) existeix el límit quan $x \to a$; equivalentment: existeixen els límits laterals en $x = a$, i coincideixen.

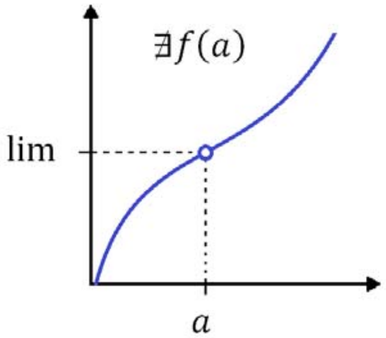
3) el límit quan $x \to a$ és finit, i coincideix amb el valor de la funció en el punt.

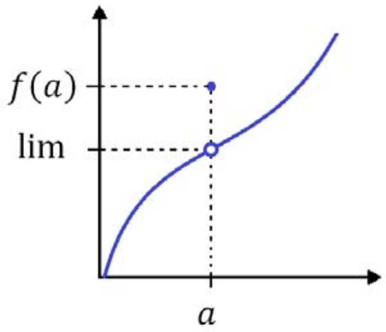
Com que hi ha moltes maneres de no satisfer la condició de continuïtat, hi ha també moltes maneres de no ser contínua la funció en $x = a$. Tindrem els següents tipus de discontinuïtats:

a) <u>evitable</u>: «existeix el límit en el punt i és finit».

(La funció pot no estar definida en el punt, o estar-n'hi però ser $f(a) \neq \lim$).

El valor del límit es diu "vertader valor de la funció en el punt".





b) <u>no evitable</u> (o "essencial"): «el límit en el punt no existeix o és infinit».

(La funció pot estar o no estar definida en el punt).

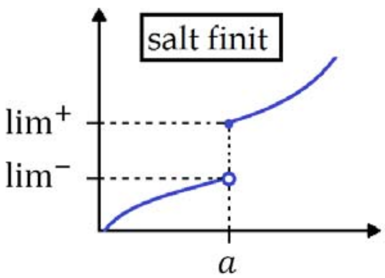
Casos:

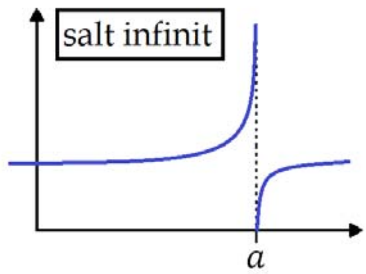
b.1) <u>de 1a espècie</u>: «no evitable però existeixen ambdós límits laterals»

També es diuen "de salt". Hi ha de dos tipus:

- *salt finit*: ambdós límits laterals són finits (però diferents).
- *salt infinit*: al menys un dels dos límits laterals és infinit.

Nota: en els salts infinits, $x = a$ és *asímptota vertical.*

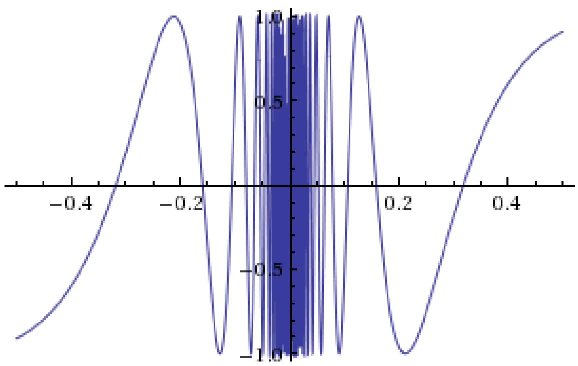




b.2) <u>de 2a espècie</u>: «un o ambdós límits laterals no existeixen »

(Serà de 2a espècie si la funció existeix a un costat però el seu límit en tal costat no; però també si, senzillament, la funció no està definida a un costat —doncs automàticament el límit en aquest costat no existirà—).

Exemple 1:

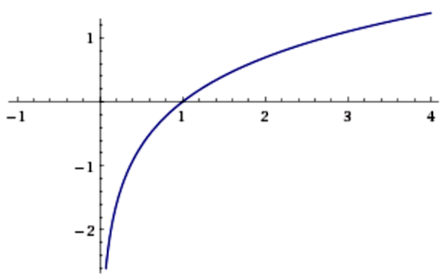


Aquesta funció definida a trossos es discontínua de 2a espècie en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

($\nexists$ lim $x \to 0^-$ ni tampoc $x \to 0^+$)

Exemple 2:



La funció $f(x) = \ln x$ és discontínua de 2a espècie en $x = 0$, doncs a la seva esquerra no està definida, i per tant tampoc el seu límit $x \to 0^-$.

25. Calcula la imatge i els límits laterals de les següents funcions, en cada cas, en el punt indicat. Després, digues si la funció és contínua o discontínua en tal punt, i explica per què:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ al punt $x = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ al punt $x = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ al punt $x = 0$

d) $f(x) = 4 \cdot \frac{x-1}{x-1}$ al punt $x = 1$ **e)** $f(x) = 4 \cdot \frac{x-1}{x-1}$ al punt $x = 0$

f) $f(x) = \ln|x|$ al punt $x = 0$ **g)** $f(x) = \sqrt{x}$ al punt $x = 0$

h) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ al punt $x = 1$ **i)** $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ al punt $x = 0$

26. Estudia, de cadascuna de les funcions següents, la seva periodicitat (si és periòdica, cal dir quant val el període T) i la seva simetria (digues si és funció parell, si és funció senar, o si no és cap dels dos casos).

a) $f(x) = x^4$ **b)** $f(x) = x^5$ **c)** $f(x) = 1 + x^2 + 4x^4$

d) $f(x) = x^3 - x^5$ **e)** $y = x + x^2$ **f)** $f(x) = \sin x$

g) $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$ **h)** $f(x) = \cos(2\pi x + 3)$

► **PERIODICITAT:** direm que la funció f és periòdica de període $T > 0$ si no és constant i, per a qualsevol valor x del seu domini, es verifica que $\boxed{f(x) = f(x+T)}$. Nota: T ha de ser el més petit d'entre tots els nombres que ho verifiquin. Exemples: les funcions sinus i cosinus són periòdiques amb període $T = 2\pi$; la funció tangent ho és amb $T = \pi$. Si $f(x)$ és periòdica, podrem fer el seu estudi només en un interval $[a,\ a+T]$ qualsevol.

► **SIMETRIES:** Direm que una funció és "parella" quan, per a qualsevol valor x del seu domini, es verifica que $\boxed{f(-x) = f(x)}$. Exemples: $f(x) = \cos x$; $f(x) = x^2$. La gràfica d'una funció parella és simètrica respecte l'eix Y; la curvatura en $-x$ serà la mateixa que en x, i el creixement/decreixement serà el contrari.

Direm que una funció és "senar" quan, per a qualsevol valor x del seu domini, es verifica que $\boxed{f(-x) = -f(x)}$. Exemples: $f(x) = \sin x$; $f(x) = x^3$. La gràfica d'una funció senar és simètrica respecte l'origen (la part $x < 0$ és com la $x > 0$ rotada 180º); el creixement/ decreixement en $-x$ serà el mateix que en x, i la curvatura serà la contrària.

DERIVABILITAT, CONTINUÏTAT i DOMINIS:

Direm que la funció $f(x)$ és derivable en el punt $x = a$ quan hi existeixi la seva derivada, $f'(a)$.

Enunciarem tot seguit tres resultats útils a l'hora de determinar les regions on una funció és derivable i/o contínua:

Teorema 1: Si $f(x)$ és derivable en $x = a$, llavors també es contínua en $x = a$.

NOTA: en canvi, que $f(x)$ sigui contínua en $x = a$ no implica que, necessàriament, sigui derivable en aquest punt. Exemple: $f(x) = |x|$ en $x = 0$.

Teorema 2: Les següents funcions són derivables [i per tant contínues] en tots els punts interiors dels seus dominis: polinomis, funcions racionals (quocients entre polinomis), exponencials, funcions trigonomètriques, arrels d'índex parell. Les arrels d'índex senar major o igual que tres només seran no derivables en $x = 0$ (la recta tangent hi és vertical).

NOTA: si el domini d'una funció està format per una unió d'intervals en els reals, un punt del domini serà interior quan no sigui l'extrem d'un d'aquests intervals.

Teorema 3: La suma, resta o multiplicació de dues funcions derivables en $x = a$ també és derivable en $x = a$. La divisió també ho és sempre que en $x = a$ no s'anul·li el denominador. Pel que fa a la composició de funcions, si $g(x)$ és derivable en $x = a$ i $f(x)$ ho és en $x = g(a)$, aleshores la funció composta $f \circ g\,(x) = f\big(g(x)\big)$ també és derivable en $x = a$, i és compleix que: $(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a)$, que s'anomena "regla de la cadena" i també s'escriu sovint així:

$$\left.\frac{d(f \circ g)}{dx}\right|_a = \left.\frac{df}{dg}\right|_{g(a)} \cdot \left.\frac{dg}{dx}\right|_a$$

27. Fes l'estudi complet i representa gràficament les següents funcions:

a) $f(x) = 1 - x - \frac{1}{x+1}$	**b)** $f(x) = \frac{3x^2+6x}{x-1}$	**c)** $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{x-1}{4}$
d) $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$	**e)** $f(x) = x \cdot e^x$	**f)** $f(x) = \operatorname{tg} x$
g) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$	**h)** $f(x) = \frac{2x-x^3}{x^2-1}$	**i)** $f(x) = \frac{x}{x^2-5x+4}$
j) $f(x) = x \cdot \ln x$	**k)** $f(x) = \ln(x^2-1)$	**l)** $f(x) = (\ln x)/x$
m) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$	**n)** $f(x) = e^{x^2/(x^2-1)}$	**o)** $f(x) = \ln(x^3 - 3x + 2)$

MÈTODE COMPLET per a representar funcions explícites:

1.- SIMETRIES i PERIODICITAT:

- Si $f(x) = f(x+T)$: periòdica ⇒ estudiem només un $I = [a,\ a+T]$
  - no existiran els límits en $\pm\infty$, i per tant ∄AH ni AO.
- Si $f(-x) = f(x)$: parella ⇒ estudiem només $x \geq 0$, doncs:
  - la gràfica és simètrica respecte l'eix Y ("mirall").
  - curvatura/extrem en $-x$ igual que en x; creixement, el contrari.
- Si $f(-x) = -f(x)$: senar ⇒ estudiem només $x \geq 0$, doncs:
  - gràfica simètrica respecte origen ($x < 0$ és $x > 0$ rotada 180º).
  - creixement en $-x$ igual que en x; curvatura/extrem, contraris.

2.- DOMINI i CONTINUÏTAT (*):

- Localitzem: tots els denominadors d, els radicands d'arrels d'índex parell R, i els arguments de logs A. (Si ∃ més d'un: $d_1,\ d_2,\ d_3$ ...)
- Esbrinem els punts on $d = 0$, les regions on $R < 0$ i les regions on $A \leq 0$ ⇒ el domini serà tot $\mathbb{R}$ excepte tots aquests punts i regions.
- $f(x)$ serà derivable i contínua en tots els punts interiors del domini.

3.- ASÍMPTOTES:

AV: candidats x on «$\text{denominador} = 0 \quad \text{ó} \quad \log 0$»: hi fem límits laterals.

AH: dreta, si $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existeix i és finit; esquerra, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

AO: només si algun dels límits de les AH ens ha donat $\pm\infty$

4.- EXTREMS i TAULA CR/DECR:

Fronteres a la taula: candidats a extrem i valors d'x que provoquin «$\text{denominador} = 0 \quad \text{ó} \quad \log 0$» en 1a derivada $f'(x)$.

5.- INFLEXIONS i TAULA DE CURVATURA:

Fronteres a la taula: candidats a p. inf. i valors d'x que provoquin «$\text{denominador} = 0 \quad \text{ó} \quad \log 0$» en 2a derivada $f''(x)$.

6.- PUNTS de TALL: x = 0 —> tall amb eix Y
y = 0 —> tall(s) amb eix X

7.- REPRESENTACIÓ GRÀFICA:

$\boxed{1r}$: <u>Asímptotes</u> i/o comportament en $\pm\infty$
(mirem taula CC/CV per a ficar les fletxetes)

$\boxed{2n}$: <u>Extrems</u>, <u>talls</u>, <u>inflexions</u> i més punts d'ajuda si cal
(mirem taula CR/DECR per a ficar els segments-guia)

$\boxed{3r}$: <u>Traçat</u> de la corba:
passant suaument pels punts i respectant curvatura.

(*) Excepcions: i) els punts on l'argument d'una arrel d'índex senar es faci zero seran no derivables; ii) si hi ha arcsinus o arccosinus, no estaran en el domini totes les regions on els seus arguments es facin menors que -1 ó majors que 1.