2.1 Límits i número e

14. Repàs de logaritmes i exponencials: troba totes les solucions de cadascuna de les següents equacions:

a) $e^x = 6$ **b)** $2e^x = 6$ **c)** $2e^{-x} = 6$

d) $7e^{-4x} = 5$ **e)** $4e^{5x} - 3e^{2x} = 0$ **f)** $e^{2x} = 3e^x - 2$

g) $e^x = -3$ **h)** $\ln x = 2$ **i)** $6\ln x = 1$

j) $\ln(x+1) = 60$ **k)** $\ln x^3 = 1$ **l)** $\ln(x^2 - 1) = 2$

m) $\ln x + \ln 3x = 4$ **n)** $\frac{\ln 2x^2}{\ln 5x} = 1$

REPÀS: propietats dels logaritmes neperians

▶ Propietats més importants:

1) $\boxed{e^x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln a}$ ← definició de logaritme neperià

2) $\ln b^s = s \cdot \ln b$

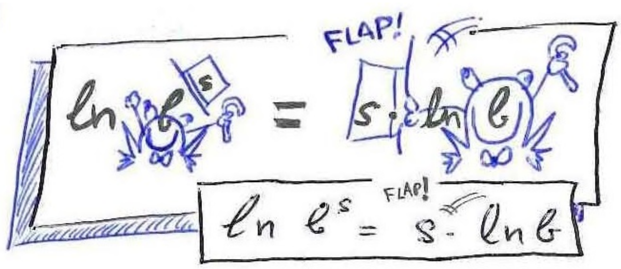
3) $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

(2) i 3)) ← "baixa un grau de dificultat"

▶ Algunes altres propietats:

4) $\ln \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \cdot \ln a$

5) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$



6) $\ln 1 = 0$

7) $\ln e = 1$

8) $e^{\ln a} = a$

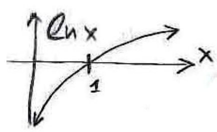
9) $-\ln a = \ln \frac{1}{a}$ **10)** $\ln a = \ln b \ \Rightarrow \ a = b$

11) COMPTE:

No existeixen...

· logaritme de <u>zero</u> (!)

· logaritme de <u>negatius</u> (!)



15. Deriva i simplifica. Si ho necessites, pots consultar la taula de derivades de la pàgina següent. Acompanyen a cada funció, entre claudàtors, les principals regles que hi calen (està en negreta la més important en cada cas).

a) $f(x) = \sin 7x$ [2, 4, **11**]

b) $f(x) = \ln(8x + 2)$ [1 a 4, **10**]

c) $f(x) = e^{5x}$ [2, 4, **9**]

d) $f(x) = \text{tg}\left(\sqrt{2}x - 1\right)$ [1 a 4, **13**]

e) $f(x) = e^{x^2+2x-6}$ [1 a 5, **9**]

f) $f(x) = 5\cos(9x - 1)$ [1 a 4, **12**]

g) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ [6, **9**]

h) $f(x) = \ln\sqrt{x - 1}$ [6, **10**]

i) $y = \sin 2x \cdot \cos 5x$ [**7**, 11, 12]

j) $y = e^{\sqrt{x^2-1}}$ [6, **9**]

k) $y = 8x^2 \sin x$ [4, **7**, 11]

l) $y = \sin(\ln x)$ [10, **11**]

m) $y = 5e^{\cos x}$ [**9**, 12]

n) $y = \text{tg}(\cos x + \sin x)$ [3, 11, 12, **13**]

o) $y = 6\ln\left(\sqrt{x} + \sin 2x\right)$ [3, 6, **10**, 11]

p) $y = \log_2 x$ [**15**]

q) $y = \log_5(x^2 - 3)$ [1 a 5, **15**]

r) $y = 6\log_2\left(\sqrt{x + 1}\right)$ [6, **15**]

s) $y = 5^x$ [**14**]

t) $y = 2^{\sin x}$ [11 , **14**]

u) $y = 2 \cdot (3^{5x-1})$ [1 a 4, **14**]

v) $y = Ae^{\text{tg}(Mx)+N\sqrt{x}}$ [4, 6, **9**, 13]

w) $y = 6x^{3/2}$ [4, **5**]

x) $y = \cos^2(x + 1)$ [**5**, 12]

y) $y = \ln^5(x + \sin 2x)$ [3, **5**, 10, 11]

z) $y = \frac{1}{x^6}$ [**5**]

AJUDA: logaritmes en base qualsevol

$\boxed{b^x = a \iff x = \log_b a}$ ← definició (logaritme en base b)

$\boxed{\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}}$ ← canvi de base

Regles de derivació: (sent-hi k, m, a i b constants, i u i v funcions)

1) $y = k \longrightarrow y' = 0$

2) $y = x \longrightarrow y' = 1$

3) $y = u + v \longrightarrow y' = u' + v'$

4) $y = ku \longrightarrow y' = ku'$

5) $y = u^m \longrightarrow y' = m\,u^{m-1}\,u'$

6) $y = \sqrt{u} \longrightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

7) $y = u \cdot v \longrightarrow y' = u'v + uv'$

8) $y = \frac{u}{v} \longrightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

9) $(e^u)' = e^u \cdot u'$

10) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

11) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

12) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

13) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = (1 + \operatorname{tg}^2 u) \cdot u'$

14) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

15) $(\log_b x)' = \frac{1}{\ln b} \cdot \frac{1}{x}$

NOTA: si canviem x per una funció u,

$$x \to u$$

en el resultat de la derivada cal:

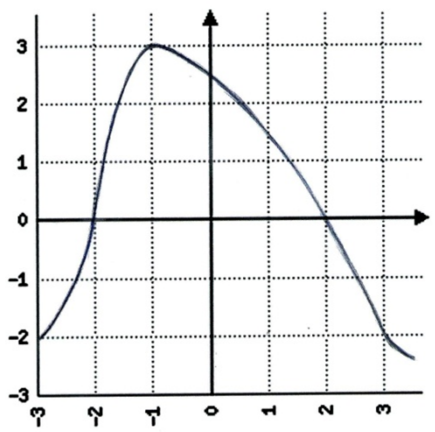
i) canviar també $x \to u$

ii) al final multiplicar per u'

Exemple: $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

16. Problemes de rectes tangents:

A.- La derivada d'una certa funció f té la següent gràfica en la regió $x\epsilon(-3, 3'4)$:

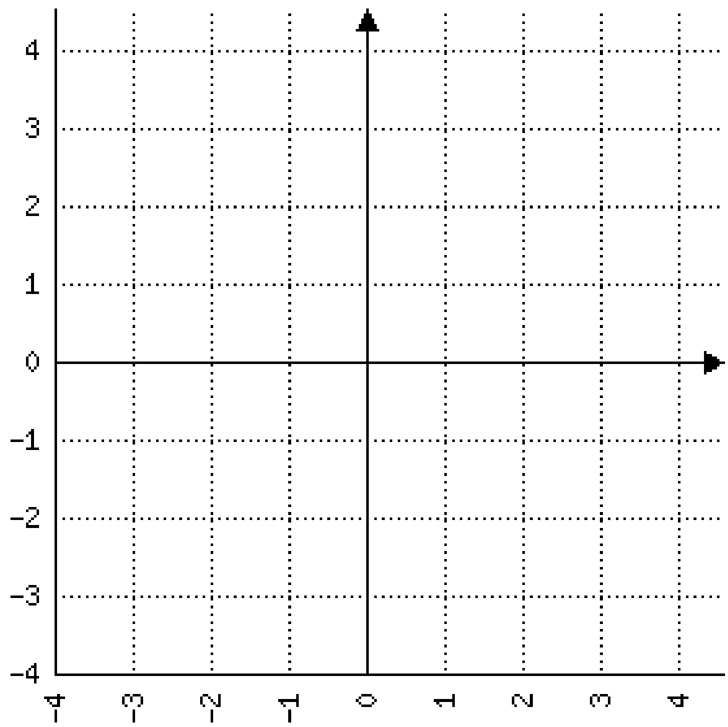


Digues els valors de l'abscissa de tots els punts d'inflexió d' f en aquesta regió. Sabent que tots ells tenen ordenada $y = 5$, troba l'equació de la recta tangent a la gràfica d' f en cadascun.

B.- Siguin les funcions $f(x) = \ln x$ i $g(x) = e^x$.

a) Troba l'equació de la recta t, tangent a la gràfica d' f en el punt d'abscissa $x = 1$.

b) Representa al següent diagrama cartesià —a llapis!— la funció f i la recta t. (Nota: pots veure la forma de la gràfica del logaritme a la pàg.1; si és necessari, fes una taula de valors amb tres o quatre parelles per a ajustar millor el dibuix).



c) Troba l'equació de la recta r, tangent a la gràfica de g al punt d'abscissa $x = 0$.

d) Representa al mateix diagrama cartesià la funció g i la recta r. Descriu el que observes en comparar amb les gràfiques fetes a l'apartat (b), i tracta d'explicar-ho.

C.- Siguin la recta r: $y = \frac{3}{4}x + 9$ i la funció $f(x) = \frac{6x^2-24x}{(x-2)^2}$.

a) Troba el punt on la recta tangent a la gràfica d' f és paral·lela a r (digues quines són les coordenades cartesianes, x i y, de tal punt).

b) Troba l'equació d'aquesta recta tangent.

D.- Sigui la funció $f(x) = e^{-x^2}$. Troba l'equació de la recta tangent a la seva gràfica en els punts indicats a continuació:

a) En el punt d'abscissa $x = 1$.

b) En el seu màxim. (Cal que justifiquis que realment és un màxim).

c) En cadascun dels seus dos punts d'inflexió. (Cal que justifiquis que realment són punts d'inflexió).

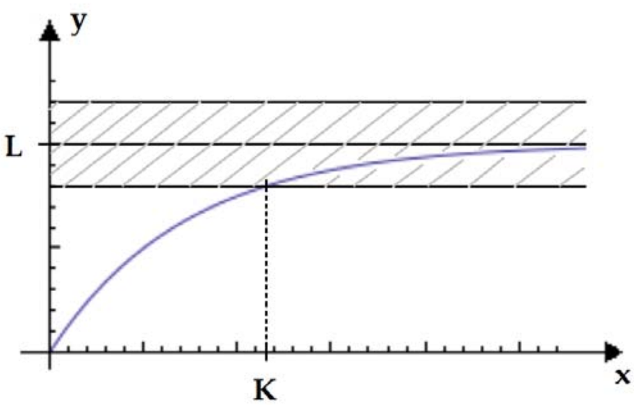
17. Introducció al càlcul de límits:

A.- Límits finits quan $x \to \infty$. Definició, mètode de la taula. Exercicis bàsics:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ **2)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)$ **3)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+x}{7x^2-1}$ **4)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^5}{e^x}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2$

►**Definició:** Sigui $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, amb $D = (m,\ \infty)$ i $m, L \in \mathbb{R}$. Llavors,

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = L} \iff \boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in D: \quad x > K \quad \Rightarrow \quad |L - f(x)| < \varepsilon}$$



Exemple: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

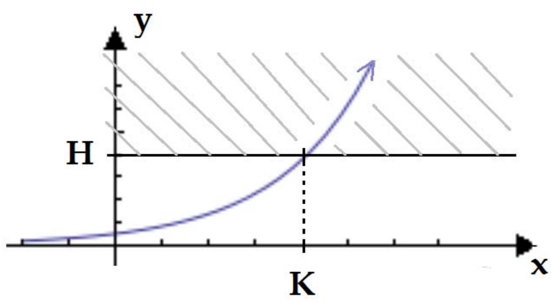
n	$f(x_n)$
1	$f(10) = 0{,}0098$
2	$f(100) = 8 \cdot 10^{-31}$
3	$f(1000) = 9 \cdot 10^{-302}$
...	...

B.- Límits infinits quan $x \to \infty$. Definició, mètode de la taula. Exercicis bàsics:

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+1}{5x^2-1}$ **7)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2-1}{2x^3+1}$ **8)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2-1}{2x^2+1}$ **9)** $\lim\limits_{x\to\infty} e^x$ **10)** $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}$

►**Definició:** Sigui $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, amb $D = (m,\ \infty)$ i $m \in \mathbb{R}$. Llavors,

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty} \iff \boxed{\forall H \in \mathbb{R} \quad \exists K \in D: \quad x > K \quad \Rightarrow \quad f(x) > H}$$



Exemple: $f(x) = (5/4)^x$

n	$I(x_n) = (4/5)^{x_n}$
1	$I(10) = 0{,}107$
2	$I(100) = 2 \cdot 10^{-10}$
3	$I(1000) = 1{,}2 \cdot 10^{-97}$
...	...

11) $\lim_{x\to\infty} (\ln x)$ 12) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^9}$ 13) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\cdot \cos x\right)$ 14) $\lim_{x\to\infty} (e^{-x}\cdot \sin x)$

15) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ 16) $\lim_{x\to\infty} (x^4 - x^5)$ 17) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{1-x^2}$

RECORDEM: Si la gràfica queda atrapada en semiplans inferiors, el límit és menys infinit:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\forall H\in\mathbb{R} \quad \exists K\in\mathbb{R}: \quad x>K \quad \Rightarrow \quad f(x)<H}$$

Exemple: $f(x) = -x^2$

C.- Límits quan $x\to -\infty$. Exercicis bàsics:

18) $\lim_{x\to-\infty} x^2$ 19) $\lim_{x\to-\infty} (x^5 - x^4)$ 20) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{x^2+1}$

21) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{-x+6}$ 22) $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}$ 23) $\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2}$

► **Definició:**

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x)}$$

Exemples:

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = \lim_{x\to\infty} (-x)^3 \,; \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} e^{-x}$$

D.- Límits laterals i límits quan x tendeix a un número finit. Definicions, mètode de la taula. Exercicis bàsics.

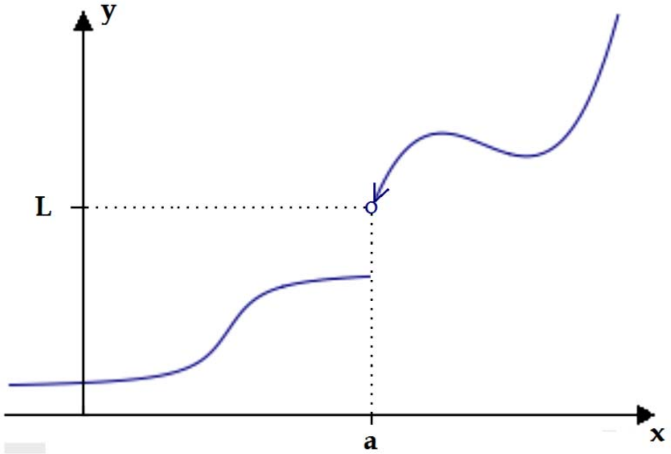
24) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$, sent-hi: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & x\le 3 \\ -x^2 & x>3 \end{cases}$ 25) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$

26) $\lim_{x\to 0^+} e^x$ 27) $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{2-x}$ 28) $\lim_{x\to 0^+} \left(6+\frac{1}{\ln x}\right)$

►Definició: Sigui $f: (a,\ a+h) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sent-hi $h > 0$ i $a \in \mathbb{R}$.

La funció tindrà el següent límit, si existeix, quan x tendeix a a per la dreta:

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a+10^{-n})}$$



Exemple:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \le 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$$

n	$f(x_n) = f(2+10^{-n})$
1	$f(2{,}1) = 4{,}41$
2	$f(2{,}01) = 4{,}04$
3	$f(2{,}001) = 4{,}004$
4	$f(2{,}0001) = 4{,}0004$
…	…

29) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$, sent-hi: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & x \le 3 \\ -x^2 & x > 3 \end{cases}$

30) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}$

31) $\lim_{x\to 0^-} e^x$

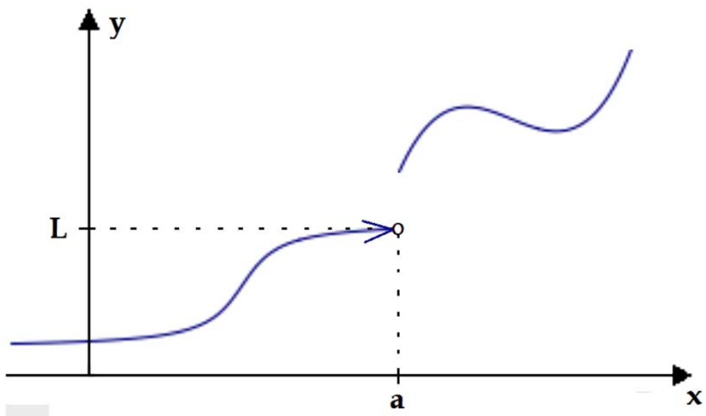
32) $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{1}{2-x}$

33) $\lim_{x\to 0^-} \left(6 + \dfrac{1}{\ln x}\right)$

►Definició: Sigui $f: (a-h,\ a) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sent-hi $h > 0$ i $a \in \mathbb{R}$.

La funció tindrà el següent límit, si existeix, quan x tendeix a a per l'esquerra:

$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a-10^{-n})}$$



Exemple:

$$f(x) = \begin{cases} 7-2x & x < 2 \\ x^2 & x \ge 2 \end{cases}$$

n	$f(x_n) = f(2-10^{-n})$
1	$f(1{,}9) = 3{,}2$
2	$f(1{,}99) = 3{,}02$
3	$f(1{,}999) = 3{,}002$
…	…

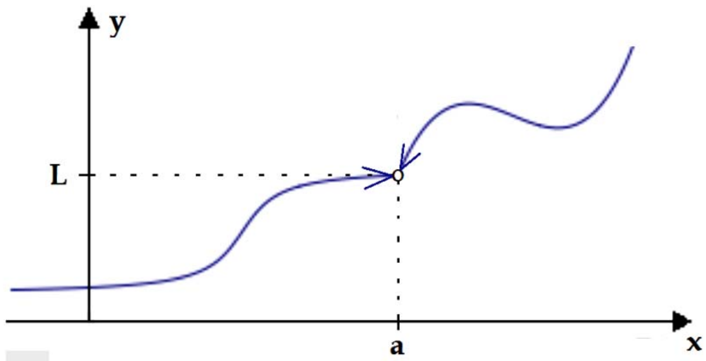
34) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, sent-hi: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & x \leq 3 \\ -x^2 & x > 3 \end{cases}$ **35)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$

36) $\lim\limits_{x\to 0} e^x$ **37)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{2-x}$ **38)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(6 + \dfrac{1}{\ln x}\right)$

►**Definició:** Sigui $f: (a-h,\ a+h) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sent-hi $h > 0$ i $a \in \mathbb{R}$.

Direm que $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = L}$ quan:

- existeixin alhora els dos límits laterals, $x \to a^+$ i $x \to a^-$
- ambdós tinguin el mateix valor L. (NOTA: L pot ser real ó $\pm\infty$)



Exemples: (quan $x \to 0$)

$f(x) = |x|$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

E.- Àlgebra de límits. Límits polinòmics.

39) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x+16}{x+1}$ **40)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x} + x\right)$ **41)** $\lim\limits_{x\to-\infty} (6 - e^x)$

42) $\lim\limits_{x\to 0} (4+x)^{2x}$ **43)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x} + \sqrt{6x}\right)$ **44)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}\right)$

45) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ **46)** $\lim\limits_{x\to\infty} (5x^3 - x^2 + 11)$ **47)** $\lim\limits_{x\to\infty} (-5x^3 + x^2)$

48) $\lim\limits_{x\to 2} x^4$ **49)** $\lim\limits_{x\to 1} (-5x^3 + x^2)$ **50)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{8}{x-3}$

ÀLGEBRA de LÍMITS:

(Notació abreujada: $\lim f = \lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$, on α pot ser real ó $\pm\infty$)

Si tots els següents límits existeixen, i en cap part del càlcul no ens apareix una indeterminació, podrem utilitzar aquestes quatre REGLES:

$$\boxed{\lim(u \pm v) = \lim u \pm \lim v} \qquad \boxed{\lim(u \cdot v) = \lim u \cdot \lim v}$$

$$\boxed{\lim\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\lim u}{\lim v}} \ (*) \qquad \boxed{\lim u^v = (\lim u)^{\lim v}}$$

►Les 7 indeterminacions:

· 3 de producte i fracció: $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$

· 3 exponencials: 1^{∞} , 0^0 , ∞^0

· 1 de resta: $\infty - \infty$

(*) excepció: la regla del quocient no funciona si $\lim v = 0$. Llavors, cal analitzar per separat els límits laterals, que ens sortiran $+\infty$ i/o $-\infty$. Exemple: $\lim_{x \to 2}\left(\frac{1}{x-2}\right)$.

18. Indeterminacions:

F.- Indeterminacions $\frac{\infty}{\infty}$ i $\frac{0}{0}$. Quocients de polinomis. Regla de l'Hôpital.

51) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4 + x + 1}{-x^3 + 2}$ **52)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^2 + x}{2x^2 - x}$ **53)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 + 2x}{2x^2 - 3x}$

54) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^2}$ **55)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{e^x}$ **56)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{2x - 2}$ 57) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{1-2x}}{e^{4-3x}}$

G.- Indeterminacions $\infty \cdot 0$.

58) $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \cdot \ln x)$ **59)** $\lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{5}{x+1} \cdot \dfrac{x^2 + x}{7x + 1}\right)$ **60)** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2}{x}\sqrt{x^2 + 8}\right)$

H.- Indeterminacions 1^{∞}. El número e.

61) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{3x}$ **62)** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{5x^3}{5x^3 - 7}\right)^{2x}$ **63)** $\lim\limits_{x \to \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x - \cos x}}$

I.- Indeterminacions exponencials generals: ∞^0 i 0^0; també 1^∞.

64) $\lim_{x\to\infty} (x+1)^{2/x}$ **65)** $\lim_{x\to 0^+} x^x$ **66)** $\lim_{x\to 2} \left(x^2-3 \right)^{\frac{5}{x^2-4}}$

J.- Indeterminacions $\infty - \infty$.

67) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{2x}{x^2-4}\right)$ **68)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{5x+1}-\sqrt{x^2-4}\right)$

19. Exercicis variats de càlcul de límits:

69) $\lim_{x\to\pi/4}\frac{1-\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$ **70)** $\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{1-x}$ **71)** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

72) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ **73)** $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+5x}{4x^3}$ **74)** $\lim_{x\to 0}\left(\sin\frac{x}{2}\cdot\operatorname{cotg}x\right)$

75) $\lim_{x\to 0^+} x^2\ln x$ **76)** $\lim_{x\to 0} x^{2x}$ **77)** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{1/x}$

78) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ **79)** $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/2x}$ **80)** $\lim_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$

81) $\lim_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x}$ **82)** $\lim_{x\to\pi/4} f(x)$, sent-hi: $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}x & x<\pi/4\\ \sin x & x>\pi/4\end{cases}$

83) $\lim_{x\to\pi/4} f(x)$, sent-hi: $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}x & x<\pi/4\\ \sin 2x & x>\pi/4\end{cases}$ **84)** $\lim_{x\to\infty} x\cdot(-1)^x$

85) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x-\operatorname{tg}x}$ **86)** $\lim_{x\to\infty} x\ln\frac{1+x}{x}$ **87)** $\lim_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{1/x}$

88) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ **89)** $\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{e^h-1}$ **90)** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x/3}$

91) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ **92)** $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ **93)** $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}$

94) $\lim_{x\to\pi/2}(1+2\cos x)^{1/\cos x}$ **95)** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}\right)$ **96)** $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln|x|}\right)$

97) $\lim_{h\to 0}\frac{8h+h^2}{h}$ **98)** $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg}x}$ **99)** $\lim_{x\to 1^+}(x^2-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$

100) $\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(x-1)}{(\ln x)^2}$ **101)** $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+c}{mx^3+n}$ **102)** $\lim_{x\to 0}(1+x)^{m/x}$

RESUM sobre TRACTAMENT d'INDETERMINACIONS :

"REGLA de L'HÔPITAL"

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} \frac{u(x)}{v(x)}} = \left[\begin{array}{c}\boxed{\frac{0}{0}} \\ \boxed{\frac{\infty}{\infty}}\end{array}\right\} = \boxed{\lim_{x\to\alpha} \frac{u'(x)}{v'(x)}}$$

si u i v són polinomis, ens en quedem amb el monomi de major grau de cadascun si $\alpha = \infty$, o de menor si $\alpha = 0$

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} u\cdot v} = \boxed{0\cdot\infty} \longrightarrow \text{transformem en L'HÔP:}$$

$$0\cdot\infty = \frac{\infty}{1/0} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{(baixem el zero)}$$

$$0\cdot\infty = \frac{0}{1/\infty} = \frac{0}{0} \quad \text{(baixem l'}\infty\text{)}$$

de vegades només cal pujar un dels factors al numerador de l'altre, fer el producte de dues fraccions (i simplificar, si és necessari factoritzant polinomis), etc.

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} u^v} = \left\{\begin{array}{c}\boxed{1^\infty} \\ \boxed{\infty^0} \\ \boxed{0^0}\end{array}\right\} = \boxed{e^{\lim_{x\to\alpha} v \ln u}} \leftarrow \text{demo: amb } b = e^{\ln b}$$

«FÓRMULA GENERAL»

l'anàlisi del límit de l'exponent ens duu a L'HÔPITAL, doncs és $0\cdot\infty$.

... les 1^∞ admeten una fórmula equivalent més senzilla:

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} u^v = e^{\lim_{x\to\alpha} v(u-1)}}$$

«FÓRMULA d'Euler»

Tècniques d'anàlisi per a

$$\boxed{\text{INDETERMINACIONS} \quad \infty - \infty}$$

$\boxed{\text{CAS: } \sqrt{A} - \sqrt{B}}$ ⇝ multipliquem i dividim pel CONJUGAT ⇝ $\dfrac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$.

NOTA: el conj. de $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ és $\sqrt{A} + \sqrt{B}$

$\boxed{\text{CAS: fracció − fracció}}$ ⇝ FEM la RESTA: $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad - cb}{bd}$.

$\boxed{\text{CAS: polinomi}}$ ⇝ domina la potència d'exponent més alt.

ALTRES TÈCNIQUES d'ANÀLISI de LIMITS

quan l'expressió és una fracció:

- treure factor comú al num. i al den. i simplificar.
- factoritzar els polinomis al num. i al den. i simplificar.
- multiplicar tot el num. i tot el den. per $1/x^n$,

  on n serà el més petit entre l'exponent més alt del numerador i l'exponent més alt del denominador.

  ↳ comentaris: → per a decidir qui és n, si un monomi és a dins d'una $\sqrt{\cdots}$, hem de dividir el seu exponent entre 2.

  → aquesta tècnica és útil si $x \to \pm\infty$.

EXEMPLE:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x} + \sqrt{x+6}}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}\left(\sqrt{4x^2+x} + \sqrt{x+6}\right)}{\frac{1}{x}\left(x + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4 + 1/x} + \sqrt{1/x + 6/x^2}}{1 + \sqrt{1/x}} = \frac{\sqrt{4+0} + \sqrt{0}}{1 + \sqrt{0}} = \frac{2}{1} = 2 \,//$$