1.4 Derivades: Unitat de síntesi (i repàs)

11. Problemes de: optimització, extrems (▲), punts d'inflexió (■), rectes tangents (**T**) i interpretació de gràfiques (**G**):

A.- Considereu tots els prismes rectes de base quadrada amb una àrea total A fixada. Anomeneu x el costat de la base del prisma i y la seva altura.

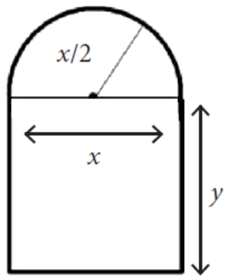
a) Trobeu l'expressió del volum i de l'àrea total del prisma en funció de les variables x i y.

b) Comproveu que el que té el volum màxim és en realitat un cub. (Nota: cal comprovar que el candidat és realment un màxim).

B.- De tots els triangles rectangles d'hipotenusa 6, quin és el que té àrea màxima? Especifiqueu les seves dimensions —base i altura— i el valor de la seva àrea. (No cal que comproveu que el candidat realment és un màxim).

C.- De tots els rectangles de perímetre 6, quin és el que té la diagonal més petita? Especifiqueu les seves dimensions —base i altura— i el valor de la seva diagonal. Quin nom reben aquest tipus de rectangles? (No cal que comproveu que el candidat realment és un mínim).

D.- La portalada d'una catedral està formada, en la part superior, per un arc de mitja circumferència que recolza sobre dues columnes, com il·lustra la figura adjunta, en què x és el diàmetre de la circumferència, és a dir, la distància entre columnes, i y és l'alçària de cada columna. [SELE'15]



a) Comproveu que la funció $f(x,y)=\frac{\pi x^2}{8}+xy$ determina l'àrea d'aquesta portalada.

b) Si el perímetre de la portalada fa 20 m, determineu les mides x i y de la portalada que en maximitzen l'àrea.

E.- Siguin x i y les mesures dels costats d'un rectangle inscrit en una circumferència de diàmetre 2. [SELE'15]

a) Comproveu que la superfície del rectangle, en funció de x, és donada per l'expressió $S(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$.

b) Calculeu els valors de les mesures x i y per als quals la superfície del rectangle és màxima i calculeu el valor d'aquesta superfície màxima.

F.- (■) Troba, justificadament, l'abscissa d'un punt d'inflexió de cadascuna de les funcions següents:

a) $f(x)=(x-4)^3$ $\quad g(x)=(5-x)^4$ $\quad h(x)=6(x-2)^5$ $\quad u(x)=11x^5-17$

b) $v(x)=\cos x$ $\quad w(x)=\sin x$ $\quad z(x)=\operatorname{tg} x$

G.- (▲, ■, **T**) Sigui la funció $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$. [SELE'15]

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = 1$.

b) Calculeu les abscisses dels punts de la gràfica en què hi ha un mínim relatiu, un màxim relatiu o una inflexió.

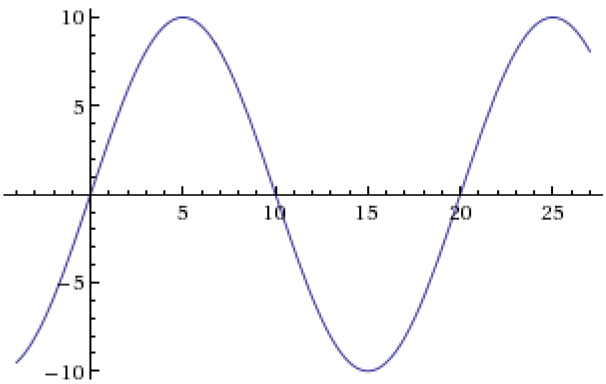
H.- (**T**) La gràfica de la funció $f(x) = x^4 + bx^2 + c$ és tangent a l'eix X en l'origen, i en els punts d'abscissa $x = -1$ i $x = 1$ les rectes tangents a la gràfica d' f són paral·leles a aquest eix.

Trobeu b i c.

I.- (**T**) Sigui la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Sabem que la gràfica d'aquesta funció és tangent a la recta r: $y = x + 3$ en el punt d'abscissa $x = -1$, i que en el punt d'abscissa $x = 1$ la recta tangent és paral·lela a la recta r.

Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c. [SELE'13]

J.- (▲, ■, **G**) Considera la següent gràfica d'una certa funció f:



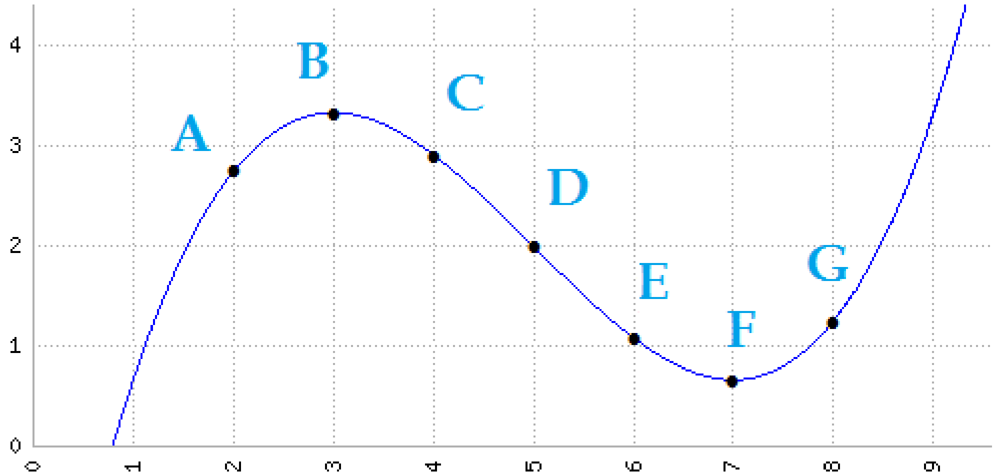
a) Indica les abscisses dels mínims, màxims i punts d'inflexió d' f a la regió representada. Després, fes la taula de creixement/decreixement d' f. Ha d'incloure: en la filera de la funció, els extrems i intervals de creixement i decreixement; en la filera de la derivada, els signes i zeros.

b) Fes la taula de concavitat/convexitat d' f. Cal que incloguis: en la filera de la funció, els punts d'inflexió i els intervals de concavitat/convexitat; en la filera de la derivada, els intervals de creixement i decreixement; en la filera de la segona derivada, els signes i els zeros. Recorda que:

- on f és còncava la derivada creix, i per tant la 2a derivada és positiva;
- on f és convexa la derivada decreix, i per tant la 2a derivada és negativa;
- els punts de canvi de curvatura o "punts d'inflexió" es corresponen, doncs, a punts on la derivada té un extrem, i per tant la segona derivada val zero.

c) A partir de les fileres de la derivada de les dues taules que has fet, dibuixa de manera aproximada la gràfica d' f'. A la representació que facis han de quedar clars els valors de les abscisses on f' té extrems i on talla l'eix X. (Els valors exactes de les ordenades no són importants, però).

K.- (▲, ■, **T**, **G**) Considera la següent gràfica d'una certa funció f:



a) Considera els punts A, B, C, D, E, F i G, d'abscisses respectives:

$x_A = 2 \qquad x_B = 3 \qquad x_C = 4 \qquad x_D = 5 \qquad x_E = 6 \qquad x_F = 7 \qquad x_G = 8.$

Siguin t_A, t_B i t_C les rectes tangents a la gràfica d' f en els punts A, B i C. Dibuixa, sobre l'anterior figura, un petit segment de cadascuna d'aquestes tres rectes (a llapis!). A la vista del teu dibuix, classifica de major a menor els respectius pendents m_A, m_B i m_C de les tres tangents.

b) En la regió $x \in [2, 4]$, la derivada d' f creix o decreix? (Justifica-ho a partir de les rectes tangents que has dibuixat en l'apartat anterior). Quin signe té, per tant, f'' en aquesta regió? Com es diu el tipus de curvatura d' f en aquesta regió?

c) Repeteix els apartats (a) i (b) per als punts E, F i G i la regió $x \in [6, 8]$.

d) Notem a simple vista que al punt D canvia la curvatura de la funció, i per tant és un punt d'inflexió. Els punt d'inflexió són els únics en els quals la recta tangent travessa la corba (en les regions convexes, en canvi, la tangent queda sempre per sobre, i en les còncaves queda per sota, com pots veure al teu dibuix si l'has fet bé). Tenint això en ment, tracta de dibuixar un petit segment de la tangent en D. Observant el pendent de les tangents que has dibuixat, contesta:

- des de B a D, f' creix o decreix?
- des de D a F, f' creix o decreix?
- si dibuixéssim la gràfica d' f' ¿què trobaríem, per tant, en $x = 5$ (on hi havia el punt d'inflexió d' f)?
- quant val $f''(5)$?

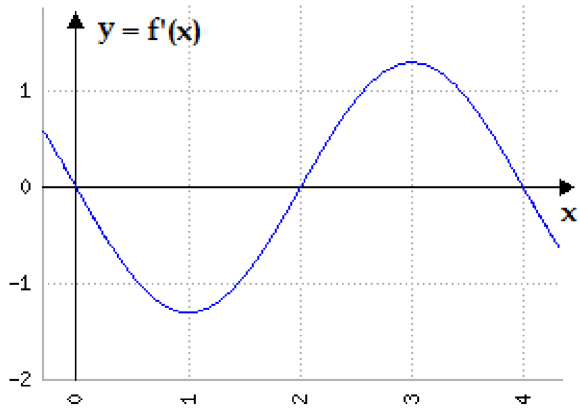
L.- (▲, ■) Troba tots els extrems i punts d'inflexió de les funcions següents:

a) $f(x) = \frac{1}{x} + x \qquad g(x) = \frac{1}{x} \qquad h(x) = x - e^x \qquad z(x) = e^x$

b) $u(x) = e^{(-3x^2)} \qquad v(x) = 8\frac{x-4}{(x-2)^2}$

NOTA: no oblidis calcular tant les abscisses com les ordenades!

M.- (▲, ■, **G**) Considera la següent gràfica de la derivada d'una certa funció f:



a) Indica les abscisses dels mínims, màxims i punts de tall amb l'eix X de la funció derivada, f'.

b) Fes les taules de creixement/decreixement i de concavitat/convexitat de la funció original, f.

c) Dibuixa de manera aproximada la gràfica d' f. (Nota: no et preocupis pels valors exactes de les ordenades en el dibuix que facis).

N.- (**T**, **G**) Considera la gràfica del problema anterior, de la derivada d'una certa funció f. Sabent que $f(2) = 7$, troba l'equació de la recta tangent a la gràfica d' f en el punt d'abscissa $x = 2$.

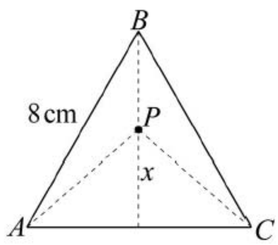
O.- [SELE'12]

Un triangle equilàter de vèrtexs A, B i C té els costats de 8 cm. Situem un punt P sobre una de les altures del triangle, a una distància x de la base corresponent.

a) Calculeu l'altura del triangle de vèrtexs A, B i C.

b) Indiqueu la distància del punt P a cadascun dels vèrtexs (en funció de x).

c) Determineu el valor de x perquè la suma dels quadrats de les distàncies del punt P a cadascun dels tres vèrtexs sigui mínima.



12. Troba la derivada de les següents funcions, i simplifica adientment el resultat. Entre claudàtors tens indicades, com a guia, les regles de derivació que cal fer servir (o les més importants) en cada cas. Pots consultar la taula de derivades del tema anterior, 1.3.

a) $f(x) = 7 - x$ **[1 a 5]**

b) $f(x) = 1 - x^9$ **[1 a 5]**

c) $f(x) = 5x^{-3} - 2x^{2/5} - x + 11$ **[1 a 5]**

d) $f(x) = \frac{x}{1-x}$ **[1 a 5, 8]**

e) $f(x) = \frac{x^2-4}{(2-x)^2}$ **[1 a 5, 8]**

f) $f(x) = (3x+2)^4$ **[1 a 5]**

g) $f(x) = \frac{1}{x^9}$ **[5]**

h) $f(x) = 13\sin x$ **[4, 11]**

i) $y = \cos^8 x$ **[5, 12]**

j) $y = \operatorname{tg}^2 x$ **[5, 13]**

k) $y = 2\sin^2 x$ **[4, 5, 11]**

l) $y = \frac{13}{\sin^2 x}$ **[4, 5, 13]**

m) $y = 120\sqrt{x}$ **[4, 6]**

n) $y = \sqrt{5-4x}$ **[1 a 4, 6]**

o) $y = 6\sqrt{\operatorname{tg} x}$ **[4, 6, 13]**

p) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ **[5]**

q) $y = 6\ln x$ **[4, 10]**

r) $y = \ln^2 x$ **[5, 10]**

s) $y = \sqrt{1+\ln x}$ **[2, 3, 6, 10]**

t) $y = 7e^{5x+11}$ **[1 a 5, 9]**

u) $y = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$ **[5, 9]**

v) $y = \frac{1}{2\sqrt{2-3x}} - \sqrt{2-3x}$ **[3, 5, 6]**

w) $y = \frac{\ln 2x}{2-4x^2}$ **[8, 10]**

x) $y = \sin 4x \cdot \operatorname{tg} 3x$ **[7, 11, 13]**

y) $y = \operatorname{tg}^2\sqrt{x}$ **[5, 6, 13]**

z) $y = \operatorname{tg}(ax^2+bx+c)$ **[1 a 5, 13]**

AJUDA: repàs de potències i arrels

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n} \qquad x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

$$(x^n)^m = x^{n\cdot m} \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$\sqrt[m]{x^n} = x^{n/m} \qquad a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$$

13. Material addicional.

A) Algunes tècniques de resolució de problemes:

1.- Passar a llenguatge matemàtic la informació que ens dóna l'enunciat.

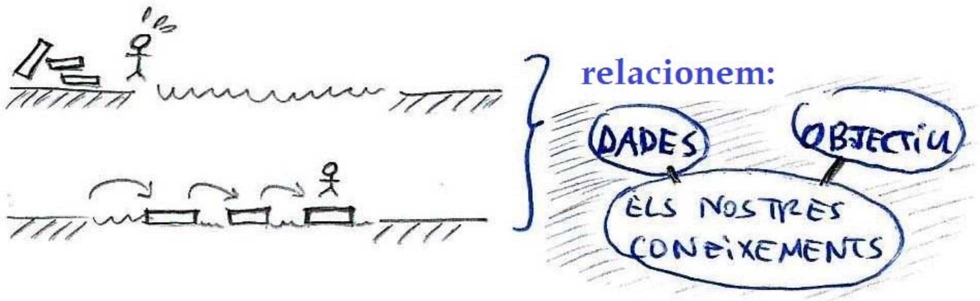
2.- Fer un diagrama, esquema o dibuix.

3.- Relacionar amb un problema semblant que ja sabem resoldre.

4.- Separar en sub-problemes més fàcils que fem per separat.

5.- Identifiquem clarament què ens donen i què ens demanen. Després, imaginem què necessitaríem tenir per a trobar el que ens demanen. Finalment, tractem de connectar-ho amb les dades.

6.- Metàfora del RIU:



B) Directrius per a enfrontar-se a un examen de mates (o física o química):

1.- La primera cosa que cal fer davant d'un examen és llegir-lo sencer i preguntar els dubtes a la professora o el professor.

2.- Tot seguit, comencem per les preguntes que sabem fer (en comptes de fer-les en l'ordre en què estan ficades). Assegura't d'haver entès BÉ cada enunciat abans de fer res.

3.- Si ens encallem amb una pregunta, i portem ja uns minuts pegant-li voltes sense avançar-hi, deixem un espai en blanc al paper i anem a per una altra.

4.- Quan ja només quedin sense contestar les que no sabem fer o les que hem deixat a mitges, tornem a intentar-les, donant prioritat a les que puntuïn més, o a les que intuïm que estem més a punt de solucionar.

5.- Al final, convé fer un esforç i intentar les que creiem que no sabem fer. De vegades, fent un examen ens sorprenem a nosaltres mateixos.

6.- Una regla d'or: abans d'entregar, repassa!