1.3 Problemes d'optimització

8. Problemes introductoris:

K) De cadascuna de les següents funcions:

$f(x) = x^2$ $\quad g(x) = x^3$ $\quad h(x) = x^4$ $\quad u(x) = x^5$

1.- Troba els extrems aplicant el teorema de les derivades successives.

2.- Només amb el que hagis trobat en l'anterior apartat i fent també el càlcul dels límits en $x \to +\infty$ i $x \to -\infty$, representa gràficament aquestes funcions.

L) Troba els punts d'inflexió de la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ usant el teorema de les derivades successives.

M) Troba els extrems i punts d'inflexió de la funció $f(x) = x^4 + 4x$ usant el teorema de les derivades successives.

N) Sigui la funció: $f(x) = \frac{4}{(x-2)^2} + x$.

1.- Amb el mètode que tu vulguis (el de la taula de creixement o el del teorema de les derivades successives) troba'n els extrems.

2.- Quin és el domini d'aquesta funció?

Teorema de les derivades successives

1. EXTREMS: $x = x_0$ és extrem si $\boxed{f'(x_0) = 0}$ i la primera no nul·la en x_0 $\boxed{f^{(n)}(x_0) \neq 0}$ té ordre <u>n parell</u>. Llavors,

· Si $f^{(n)}(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; x_0$ mínim

· Si $f^{(n)}(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; x_0$ màxim

2. PUNTS d'INFLEXIÓ: $x = x_0$ és punt d'inflexió si $\boxed{f''(x_0) = 0}$ i la primera a partir d' f'' no nul·la en x_0 $\boxed{f^{(n)}(x_0) \neq 0}$ té ordre <u>n senar</u>.

9. Troba la derivada de les següents funcions. Entre claudàtors tens indicades, com a guia, les regles de derivació que cal fer servir (o les més importants) en cada cas. Pots consultar la taula de derivades de la pàg. següent.

a) $f(x) = x - 1$ **[1 a 5]**

b) $f(x) = x^3 + 6$ **[1 a 5]**

c) $f(x) = 6x^3 + 2x^2 - x + 9$ **[1 a 5]**

d) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ **[1 a 5, 8]**

e) $f(x) = \frac{5x^2+2x}{3x^4-x^3}$ **[1 a 5, 8]**

f) $f(x) = (6x+5)^3$ **[5]**

g) $f(x) = \frac{1}{x^5}$ **[5]**

h) $f(x) = 6\cos x$ **[4, 12]**

i) $y = \sin^3 x$ **[5, 11]**

j) $y = \mathrm{tg}^9\, x$ **[5, 13]**

k) $y = 10\sin^2 x$ **[4, 5, 11]**

l) $y = \frac{14}{\cos^2 x}$ **[4, 5, 12]**

m) $y = 2\sqrt{x}$ **[4, 6]**

n) $y = \sqrt{4x+5}$ **[1 a 4, 6]**

o) $y = 5\sqrt{\cos x}$ **[4, 6, 12]**

p) $y = \frac{7}{\sqrt{x}}$ **[4, 5]**

q) $y = 5\ln x$ **[4, 10]**

r) $y = \ln^7 x$ **[5, 10]**

s) $y = \sqrt{\ln x}$ **[6, 10]**

t) $y = 2e^x$ **[4, 9]**

u) $y = \sqrt{e^x}$ **[5, 9]**

v) $y = e^x + \ln x$ **[3, 9, 10]**

w) $y = \frac{\ln x}{1+x^2}$ **[8, 10]**

x) $y = \sin x \cdot \ln x$ **[7, 10, 11]**

y) $y = \mathrm{tg}\, x \cdot \sqrt{x}$ **[6, 7, 13]**

z) $y = ax^2 + bx + c$ **[1 a 5]**

AJUDA: repàs de potències i arrels

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n} \qquad x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

$$(x^n)^m = x^{n\cdot m} \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$\sqrt[m]{x^n} = x^{n/m} \qquad a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$$

Regles de derivació: (sent-hi k i m constants, i u i v funcions)

1)	$y = k$	$\rightarrow$	$y' = 0$	**9)**	$(e^x)' = e^x$
2)	$y = x$	$\rightarrow$	$y' = 1$	**10)**	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
3)	$y = u + v$	$\rightarrow$	$y' = u' + v'$	**11)**	$(\sin x)' = \cos x$
4)	$y = ku$	$\rightarrow$	$y' = ku'$	**12)**	$(\cos x)' = -\sin x$
5)	$y = u^m$	$\rightarrow$	$y' = m\, u^{m-1}\, u'$	**13)**	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
6)	$y = \sqrt{u}$	$\rightarrow$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$		
7)	$y = u \cdot v$	$\rightarrow$	$y' = u'v + uv'$		
8)	$y = \frac{u}{v}$	$\rightarrow$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$		

NOTA: si en les darreres 9, 10, 11, 12 i 13 canviem x per una funció u,

$$x \rightarrow u$$

en el resultat de la derivada cal:

i) canviar també $x \rightarrow u$

ii) al final multiplicar per u'

Exemple: $(e^u)' = e^u \cdot u'$

10. Problemes d'extrems i optimització [enunciats reals de la SELECTIVITAT]:

problema O

Considereu tots els prismes rectes de base quadrada amb un volum V fixat. Anomeneu x el costat de la base del prisma i y la seva altura.

a) Trobeu l'expressió del volum i de l'àrea total del prisma en funció de les variables x i y.

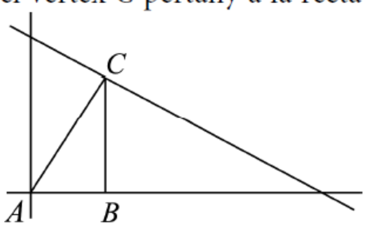
b) Comproveu que el que té àrea total mínima és en realitat un cub.

problema P

Un triangle rectangle situat en el primer quadrant té el vèrtex A en l'origen de coordenades, el vèrtex $B = (x, 0)$ en el semieix positiu d'abscisses i el vèrtex C pertany a la recta $x + 2y = 8$. L'angle recte és el que correspon al vèrtex B.

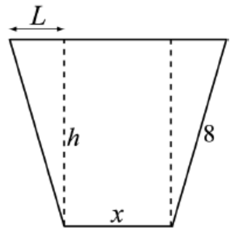
a) Comproveu que l'àrea del triangle es pot expressar de la manera següent: $A(x) = 2x - \frac{x^2}{4}$.

b) Trobeu els vèrtexs B i C perquè l'àrea del triangle sigui màxima i comproveu que es tracta realment d'un màxim.



problema Q

Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplària superior del canal sigui el doble de l'amplària inferior i que els costats no paral·lels siguin de 8 metres. A la dreta teniu un esquema de la secció del canal.



a) Trobeu el valor del segment L de la gràfica en funció de la variable x (amplària inferior del canal).

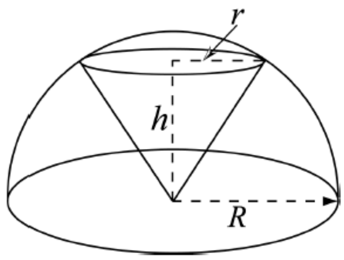
b) Sabem que l'àrea d'un trapezi és igual a l'altura multiplicada per la semisuma de les bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció és donada per

$$A(x) = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}$$

c) Calculeu el valor de x perquè l'àrea de la secció del canal sigui màxima (no cal que comproveu que és realment un màxim).

problema R

En una semiesfera de radi R inscrivim un con situant el vèrtex al centre de la semiesfera, tal com es veu en el dibuix.



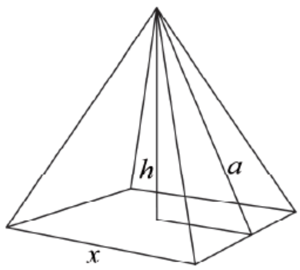
a) Sabent que el volum d'un con és igual a l'àrea de la base multiplicada per l'altura i dividida per 3, comproveu que, en aquest cas, podem expressar el volum com

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3}(R^2 - h^2)$$

b) Trobeu les dimensions d'aquest con (el radi de la base i l'altura) perquè el seu volum sigui màxim i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

problema S

Volem construir una tenda en forma de piràmide regular de base quadrada. Disposem de 300 m² de tela per a la fabricació de les quatre cares de la tenda (se suposa que en l'elaboració de les cares no es perd gens de tela). Designem x la longitud d'un costat de la base de la tenda.



a) Sabent que el volum d'una piràmide és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura, comproveu que, en aquest cas,

$$V(x) = \frac{x\sqrt{(9 \times 10^4) - x^4}}{6}$$

b) Determineu el valor de x perquè el volum sigui el més gran possible (no cal que comproveu que el valor obtingut correspon realment a un màxim).

problema T

Donada la funció $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$:

a) Determineu la relació que han de complir els paràmetres a, b i c perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=-1$.

b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè hi hagi un punt d'inflexió de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=0$.

c) Determineu la relació entre els paràmetres a, b i c sabent que la gràfica de $f(x)$ talla l'eix OX en el punt d'abscissa $x=-2$.

d) Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c perquè es compleixin les tres propietats anteriors alhora.

problema U

Sigui $f(x)=x^2\cdot e^{-ax}$ quan $a\neq 0$.

a) Calculeu el valor de a perquè aquesta funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=2$.

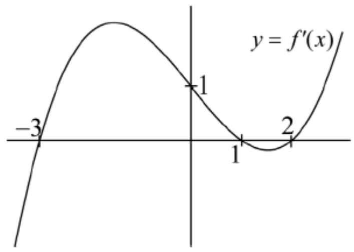
b) Quan $a=2$, classifiqueu-ne els extrems relatius.

problema V

La funció $f(x)$ és derivable i passa per l'origen de coordenades. La gràfica de la funció derivada és la que veieu aquí dibuixada, essent $f'(x)$ creixent als intervals $(-\infty, -3]$ i $[2, +\infty)$.

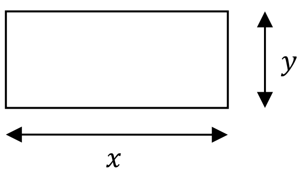
a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$.

b) Indiqueu les abscisses dels extrems relatius de la funció $f(x)$ i classifiqueu aquests extrems.



PROBLEMA GUIA: **«Trobar el rectangle de perímetre fixat amb àrea màxima»**

1.- fem esquema o dibuix:



2.- escrivim les funcions involucrades:

Àrea: $A(x,y)=x\cdot y$ (a maximitzar)

Perímetre: $P=2x+2y$ (és constant: "restricció")

3.- substituïm amb la restricció en la funció a maximitzar:

$$P=2x+2y \quad\Rightarrow\quad y=\frac{P}{2}-x \quad\Rightarrow\quad A(x)=x\cdot\left(\frac{P}{2}-x\right)=\frac{P}{2}x-x^2$$

4.- trobem l'extrem: $A'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{P}{2}-2x=0$