1.2 Interpretació geomètrica de la derivada

4. Problemes introductoris de rectes tangents:

E) Sigui la paràbola $f(x) = 8x - 2x^2$.

a) Fes-ne la representació gràfica a la regió $x\epsilon[0,4]$, $y\epsilon[0,9]$.

b) Representa-hi els punts d'abscissa $x_A = 1$, $x_B = 2$, $x_C = 3$, dibuixa aproximadament la recta tangent a la paràbola en cada punt, i digues si en aquests tres punts la funció creix, decreix o té un extrem.

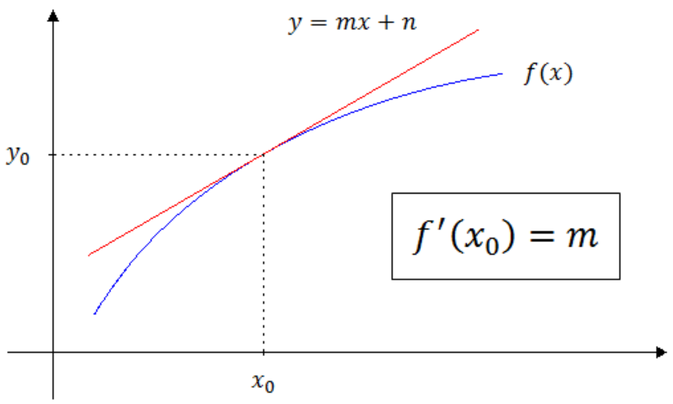
c) Troba l'equació $y = mx + n$ de cadascuna de les tres rectes tangents.

d) Representa gràficament $f'(x)$ a l'interval $x\epsilon[0,4]$, i fes una taula indicant les regions on $f'(x)$ és positiva, negativa o zero.

F) Repeteix els quatre apartats del problema anterior, ara amb la paràbola $f(x) = 2x^2 - 8x + 11$, estudiant-la en la regió $x\epsilon[0,4]$, $y\epsilon[0,11]$.

AJUDA (I) "Significat geomètric de la derivada"

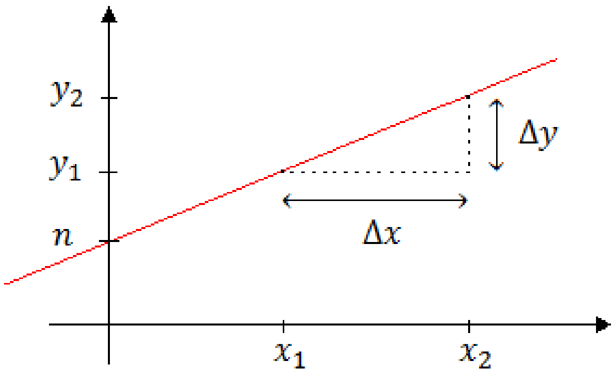
La derivada de la funció $f(x)$ en $x = x_0$, que escriurem com $f'(x_0)$, s'interpreta geomètricament com **«** el **pendent** de la recta **tangent** a la gràfica d' $f(x)$ en el punt d'abscissa x_0**»**



El punt comú a la gràfica d' $f(x)$ i a la recta tangent, de coordenades (x_0, y_0), rep el nom de "punt de tangència".

AJUDA (II) "Equació d'una recta": $\boxed{y = mx + n}$

Queda determinada pels seus dos paràmetres $\begin{cases} \text{pendent } m: & \text{“el que pugem dividit el que avancem”.} \\ \text{ordenada en l'origen } n: & x = 0 \Rightarrow y = n \end{cases}$



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

5. Troba la derivada de les següents funcions:

47) $f(x) = x^2 \sin x$

48) $f(x) = \sqrt{x} \cos x$

49) $f(x) = x^3 \sin x$

50) $f(x) = x^3 \sin 5x$

51) $f(x) = 5x^4 \cos(x-1)$

52) $f(x) = \frac{1}{x} \cos(x-1)$

53) $f(x) = \frac{\sin(x-1)}{x}$

54) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

55) $y = x^5 \cos(7x+2)$

56) $y = -\frac{2}{9} \cdot \sqrt[3]{x} \sin x$

57) $y = \frac{x}{2} \cos 9x + x^2$

58) $y = x \cos x - x \sin x$

59) $y = x^m \cos(nx + a)$

60) $y = \frac{x}{11} - x^{2/5} \sin \frac{x}{2}$

61) $y = (x^3 - 6x + 1) \sin x$

62) $y = (\cos 6x) \cdot (x^7 - x + 2)$

63) $y = (\cos x)^5$

64) $y = (\sin(2x+3))^8$

65) $y = (\cos x)^2$

66) $y = (\sin(6x-1))^7$

67) $y = (2\cos x + 1)^3$

68) $y = (-9x^2 + x + 3)^5$

69) $y = x^5 (\cos x)^6$

70) $y = 6x^3 \sin^2 x$

71) $y = \frac{1}{x^5} - \cos^2 x$

72) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\cos^5 x$

73) $y = x^{7/8} - \sqrt{x}\cos x$

74) $y = \frac{2\sin 5x}{\sqrt{x}}$

75) $y = \sqrt[5]{x}\cos(1-x)$

76) $y = \sqrt{5x}$

77) $y = \sqrt{4x+1}$

78) $y = \frac{1}{2x^5-1}$

79) $y = \frac{4}{\sqrt{x^3-x}}$

80) $y = \frac{x-1}{x+1}$

81) $y = \frac{2x+3}{7-x}$

82) $y = \operatorname{tg} x$

83) $y = \frac{x^3-x}{2-x}$

84) $y = \frac{6+x^2}{x^2-x}$

85) $y = \frac{x}{\cos x}$

86) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin x}$

87) $y = \frac{14x^3-2x^2+22x}{2x}$

88) $y = \frac{1-2x+x^2}{x-1}$

89) $y = \frac{x^3-3x^2+7}{x+3}$

90) $y = \frac{1-x}{x-1}$

91) $y = \frac{\cos x}{1+\sqrt{x}}$

92) $y = \frac{Ax^2+B}{m-x}$

93) $y = \sin(4x^2-2x+5)$

94) $y = 5\cos(x^7)$

95) $y = -\frac{2}{7}\sin(4x-x^3)$

96) $y = \sqrt{5}\sin(x^2)+4x$

97) $y = \sqrt[6]{x} - \sin(3x+x^2)$

98) $y = \sin(\sin x)$

99) $y = 2\cos(\cos x)$

100) $y = \operatorname{tg}(9x)$

101) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2 \operatorname{tg} x$

102) $y = \sqrt{5x}\sin^2(x^2)$

6. Problemes de rectes tangents i introducció a la representació de polinomis:

G) Troba l'equació de la recta tangent a $f(x) = -x^2 + x - 3$ que sigui paral·lela a la recta r: $y = -x + 9$.

H) Sigui la funció $f(x) = -x^3 + x$. **1.-** Troba els seus punts de tall amb eixos Y i X. **2.-** Fes la taula de creixement, decreixement i extrems d'f. **3.-** Troba els límits d'f en $x \to +\infty$ i $x \to -\infty$. **4.-** Utilitza tota aquesta informació per a fer la gràfica d'f.

I) Sigui una certa funció polinòmica $y = f(x)$, de la qual sabem que talla amb eix Y en $y = -2$; talla amb eix X en $x = 1$, $x = 6$ i $x = 8$; té un màxim a $(3,3)$ i un mínim a $(7,-1)$; té un punt d'inflexió a $(5,1)$; i les seves tendències a esquerra i dreta són, respectivament: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Fes:
1.- La seva taula de creixement i decreixement. **2.-** La seva representació gràfica.

J) Troba l'equació de la recta tangent a $f(x) = \sqrt{x} + 2$ que sigui paral·lela a la recta r: $y = 3x - 7$.

7. Representa gràficament els següents polinomis:

g) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$

h) $f(x) = x^5 - x^3$

i) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$

j) $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x$

k) $f(x) = x^4 + 4x$

l) $f(x) = -2x(x+1)(x-1)^2$

AJUDA: mètode per a representar polinomis, pas a pas:

1.- $x = 0$ $\Rightarrow$ punt TALL eix Y

2.- $y = 0$ $\Rightarrow$ punt TALL eix X

3.- $y' = 0$ $\Rightarrow$ taula signes & zeros y' $\Rightarrow$ creixement, decreixement, extrems

4.- $y'' = 0$ $\Rightarrow$ taula signes & zeros y'' $\Rightarrow$ concavitat, convexitat, punts inflexió

5.- límits $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ $\Rightarrow$ esbrinem tendència a dreta i esquerra

GRÀFICA: representem tots els elements anteriors i els unim amb suavitat.