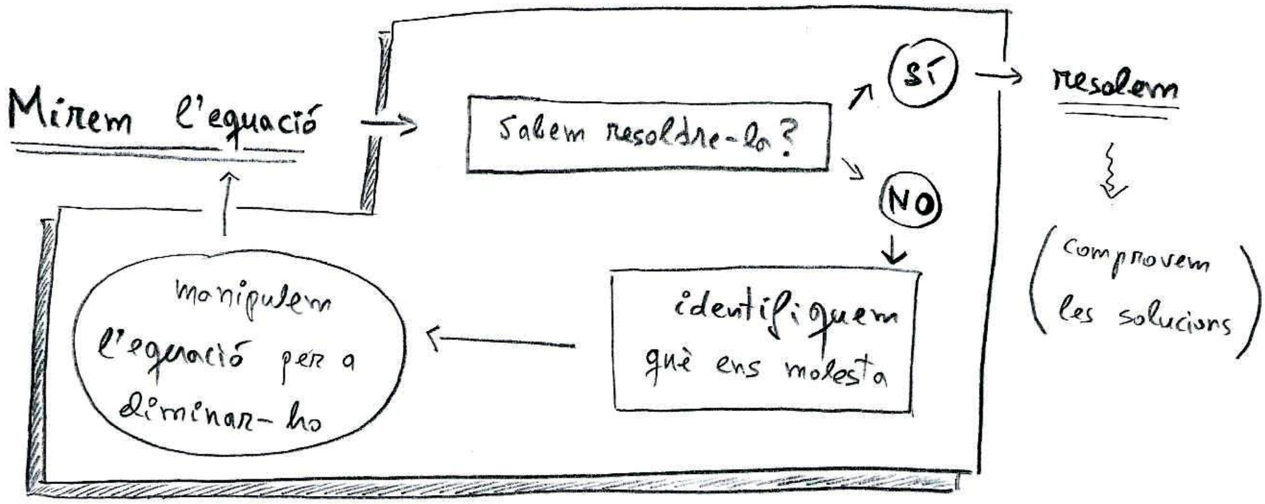
Pepe Ródenas Borja
[febrer 2016]

Mates (1r Bat.)

Resum de: Tècniques de Resolució d'equacions.

Esquema del procediment general:



- El nombre d'equacions que sabem resoldre és molt petit. Comparant mentalment la forma d'aquestes equacions amb la que hem de resoldre descobrirem quin o quins elements o característiques d'aquesta "ens molesta", és a dir: ens impedeix la resolució directa.

- Si, malgrat tot, no som capaços de trobar què és concretament el que ens està impedint la resolució, podem manipular l'equació una mica tractant de simplificar-la (p. ex., traient factor comú), i re-comencem el procés.

- Sobre el FINAL del PROCÉS:
  - si trobem $\boxed{0=0}$, vol dir que qualsevol valor d'x soluciona l'equació (era una "identitat").
  - si trobem coses com $\boxed{6=0}$, $\boxed{2=0}$, etc. ⇒ no té solució.
  - de vegades, trobem "falses solucions": és molt convenient anar a l'equació original i comprovar la solució.

LLISTAT d'equacions que SABEM RESOLDRE directament:

- (a) $\boxed{\text{1r grau, 2n grau, biquadrada}}$

$ax^2 + bx + c = 0 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$ax^4 + bx^2 + c = 0 \rightarrow x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- (b) $\boxed{e^x = A} \rightarrow \quad x = \ln A$; també la recíproca:

$\ln x = M \rightarrow x = e^M$

- (c) $\boxed{A \cdot B = 0} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ (A i B són expressions on apareix l'x)

p. exemple: $\boxed{(x^2-1)\sin x = 0}^{(1)} \rightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow$ resolem per separat aquestes 2 equacions.

- trigonomètriques: (d) $\boxed{\sin x = M}^{(*)}$, (e) $\boxed{\cos x = M}^{(*,*)}$, (f) $\boxed{tg\, x = M}^{(*,*,*)}$

$[*]$: $x = \arcsin M = \begin{cases} \alpha_c + 2\pi k \\ (\pi - \alpha_c) + 2\pi k \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$[*,*]$: $x = \arccos M = \begin{cases} \alpha_c + 2\pi k \\ -\alpha_c + 2\pi k \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$[*,*,*]$: $x = \operatorname{arctg} N = \alpha_c + \pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

(on "α_c" és el número que ens dóna la calculadora quan fem, en cada cas, arcsinus, arccosinus o arctangent).

p. exemple: $\boxed{\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}}^{(2)} \rightarrow x = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \quad \forall k \mathbb{Z}$

Tècniques de reducció d'equacions no directament resolubles a alguna de les 8 anteriors:

- Multiplicar tota l'equació per un número o expressió diferent de zero. ← [INDICAT per a ELIMINAR DENOMINADORS que ens molesten]

  - Per exemple: $\boxed{\frac{x^2-1}{x+2}=0}$ (3) $\xrightarrow{}$ $x^2-1=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$ ■

    (multipliquem per $(x+2)$. ambdós membres de l'eq.) → ⚠ no serà vàlid però $x+2=0 \rightarrow x=-2$. Si aquest valor ens surt com a suposada solució al final, l'haurem de rebutjar.

  - Quan hi ha més d'un denominador a eliminar, podem eliminar-los tots alhora multiplicant pel producte de tots ells (els denominadors), però sovint és més indicat multiplicar pel mínim comú múltiple del conjunt de denominadors. Per exemple:

$$\boxed{\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x}} \text{ (4)} \Rightarrow \frac{\cancel{x}(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x}\cancel{(x-1)}}-\frac{x\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}}=\frac{\cancel{x}(x+1)(x-1)}{\cancel{x}}$$

$x^2-x \rightarrow x(x-1)$

$x^2-1 \rightarrow (x+1)(x-1)$

• $x(x+1)(x-1)$

$$\Rightarrow \cancel{x}+1\cancel{-x}=x^2-1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{1}=\pm 1}$$

aquestes, però, són "falses solucions", donat que amb totes dues es fa zero el segon denominador de l'eq. inicial. Per tant, l'equació no té cap solució ■

- Treure factor comú → i apliquem: $A \cdot B = 0 \to \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

  - p. exemple:

(5)

$$\boxed{x \ln x - 6x = 0} \to x(\ln x - 6) = 0 \to \begin{cases} \cancel{x = 0} \to \text{falsa, perquè dona a } \ln 0. \\ \ln x - 6 = 0 \to \end{cases}$$

$$\to \ln x = 6 \to \boxed{x = e^6}$$

(6)

$$\boxed{x e^{2x} - e^{2x} = 0} \to e^{2x}(x-1) = 0 \to \begin{cases} e^{2x} = 0 : \text{no té sol.} \\ x - 1 = 0 \to \boxed{x = 1} \end{cases}$$

(7)

$$\boxed{x^2 \sin x - \sin x + x^2 - 1 = 0} \underset{\sin x \text{ f. comú}}{\to} \sin x (x^2 - 1) + x^2 - 1 = 0 \to$$

$$\underset{(x^2-1) \text{ f. comú}}{\to} (\sin x + 1) \cdot (x^2 - 1) = 0 \to \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \to \boxed{x = \pm\sqrt{1} = \pm 1} \\ \sin x - 1 = 0 \to \end{cases}$$

$$\to \sin x = -1 \to \boxed{x = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

  - és molt típic en polinomis: si no hi ha terme independent, factoritzem x^m, sent-hi m el menor exponent del polinomi:

(8)

$$\boxed{x^8 - x^7 - 4x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 3x^3 = 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 (x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3x - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \to \boxed{x = 0} \\ x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3x - 3 = 0 : \text{resolem per Ruffini:} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & -1 & -4 & +4 & +3 & -3 \\
1 & & 1 & 0 & -4 & 0 & 3 \\
\hline
 & 1 & 0 & -4 & 0 & 3 & \underline{|0} \\
1 & & 1 & 1 & -3 & -3 & \\
\hline
 & 1 & 1 & -3 & -3 & \underline{|0} & \\
-1 & & -1 & 0 & 3 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & -3 & \underline{|0} & &
\end{array}$$

$\Rightarrow \boxed{x = 1}$

$\Rightarrow \boxed{x = -1}$

$\to x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{3}}$

- Treure factors $(x-a)$, on $a \in \mathbb{Z}$, en polinomis de coeficients enters: a és arrel del polinomi, i ha de ser divisor enter del terme independent. No sempre serà possible, i la millor manera d'intentar-ho és fer la divisió per Ruffini del polinomi original entre $(x-a)$:

$$\boxed{x^4 + 2x^3 - 13x - 26 = 0} \quad (9)$$

divisors enters de -26: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 13, \pm 26\}$, provem amb el -2:

	1	+2	0	−13	−26
−2		−2	0	0	26
	1	0	0	−13	0

residu zero: la divisió entre $(x+2)$ és exacta, $x=-2$ sí és arrel.

quocient: $x^3 - 13$

$$\Rightarrow \quad x^4 + 2x^3 - 13x - 26 = (x+2)(x^3-13) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \rightarrow \boxed{x=-2} \\ x^3-13=0 \rightarrow \boxed{x=\sqrt[3]{13}} \end{cases}$$

- Canvi de variable: de vegades veiem una expressió en x (sovint es repeteix a més d'un lloc de l'equació) a la qual podem dir, per exemple, y, de manera que x desapareix de l'equació, i ens en queda una altra equació en y que sí sabem resoldre. Les biquadrades en són un cas particular, però és típic de trigonomètriques i exponencials, també. Per exemple:

$$\boxed{e^{2x} + e^x - 6 = 0} \; (10) \xrightarrow[y=e^x]{} \boxed{y^2 + y - 6 = 0} \rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2+4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x = 2 \rightarrow \boxed{x = \ln 2} \\ e^x = -3 \rightarrow \text{no té solució} \end{cases}$$

- Elevar tota l'equació al quadrat, o a una altra potència, per a eliminar una arrel (que prèviament haurem aïllat). P. exemple:

$$\boxed{\sqrt{x+1}-2=0}^{(11)} \rightarrow \sqrt{x+1}=2 \xrightarrow{(\ldots)^2} x+1=4 \rightarrow \boxed{x=4-1=3}$$

Aquest mètode, però, és un dels típics que introdueixen molt sovint "falses solucions", per tant és especialment indicat comprovar les solucions al final. Per exemple:

$$\boxed{\sqrt{x+1}+2=0}^{(12)} \rightarrow \sqrt{x+1}=-2 \xrightarrow{(\ldots)^2} x+1=4 \rightarrow \boxed{x=4-1=3},$$

però això no verifica l'eq. original, que, per tant, no té solució.

- Passar restant un terme que va sumant, o sumant un terme que va restant, a l'altre membre de l'equació.

p. exemple: $\boxed{7e^x-2e^{-x}=0}^{(13)} \rightarrow 7e^x=2e^{-x}=\frac{2}{e^x} \rightarrow$

$$\rightarrow e^{2x}=\frac{2}{7} \rightarrow 2x=\ln\frac{2}{7} \rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{7}}$$

- Canvi de base en el logaritme:

  - Usem la fórmula: $\boxed{\log_b x=\frac{\ln x}{\ln b}}$ (9) (canvi de base)
  - Recordem la definició de logaritme: $\boxed{b^x=M \Leftrightarrow x=\log_b M}$ (h)
  - Exemples:

$$\boxed{2^x-0{,}125=0}^{(14)} \rightarrow 2^x=0{,}125 \rightarrow \boxed{x=\log_2 0{,}125=\frac{\ln 0{,}125}{\ln 2}=-3}$$

$$\boxed{2^{\frac{x}{2}+2}+2^x-5=0}^{(15)} \rightarrow 2^2\,2^{x/2}+2^x-5=\left(\sqrt{2^x}\right)^2+4\sqrt{2^x}-5=0$$

$y=\sqrt{2^x}$

$$\rightarrow y^2+4y-5=0 \rightarrow \sqrt{2^x}=\frac{-4\pm\sqrt{16+4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}= \begin{cases} =1 \rightarrow 2^x=1^2=1 \\ =-5 \rightarrow \text{no té solució} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\log_2 1=\frac{\ln 1}{\ln 2}=\frac{0}{\ln 2}=0}$$

- passar a una única funció trigonomètrica: sovint hi haurà més d'una manera de fer-ho, i algunes seran més ràpides que unes altres.

  — identitat fonamental: (i) $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$ $\rightarrow \begin{cases} \sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} \\ \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} \end{cases}$

  amb aquestes dues equacions podrem posar-ho tot en termes de sinus (o de cosinus) de manera molt sistemàtica, però convé tractar d'usar unes altres tècniques si es pot, per a evitar les arrels.

  p. exemple: $\boxed{\sin x + \cos x = 0}$ (16) $\rightarrow \sin x + \sqrt{1-\sin^2 x} = 0$

  $\rightarrow \sin x = -\sqrt{1-\sin^2 x} \rightarrow \sin^2 x = 1 - \sin^2 x \rightarrow$

  $\rightarrow 2\sin^2 x = 1 \rightarrow \sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \arcsin\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow$

  $\oplus$: $\boxed{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ (\pi - \frac{\pi}{4}) + 2\pi k = \boxed{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ → substituint veiem que això no soluciona l'eq.

  $\ominus$: $\boxed{x} = \begin{cases} \boxed{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \; \blacksquare \\ (\pi + \frac{\pi}{4}) + 2\pi k = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$ → no és solució!

  — aplicar la definició de: (j) $\boxed{\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}}$ i de vegades dividint tota l'equació entre $\cos x$ ja queda reduïda a una eq. en termes només de la tangent, per exemple. Podem resoldre més ràpidament l'exemple anterior d'aquesta manera:

  $\boxed{\sin x + \cos x = 0}$ (16.bis) $\xrightarrow[\div \cos x]{} \operatorname{tg} x + 1 = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \rightarrow$

  $\rightarrow \boxed{x = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} + \pi k} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \; \blacksquare$

  (es pot veure que aquest conjunt de solucions i el que abans hem trobat són idèntics)

— ús d'altres identitats trigonomètriques. Potser les que apareixen més sovint són les fórmules de la suma d'angles i les fórmules de l'angle doble:

$$\boxed{\begin{aligned} &\begin{cases} \sin 2x = 2\sin x\cos x \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \end{cases} \\ &\begin{cases} \sin(A+B) = \cos A \sin B + \sin A \cos B \\ \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \end{cases} \end{aligned}} \quad (k)$$

p. exemple:

$$\boxed{\sin x = \frac{1}{4\cos x}} \ (17) \rightarrow 2\sin x \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \rightarrow$$

(si $4\cos x \neq 0$)

$$\rightarrow 2x = \arcsin\frac{1}{2} = \begin{cases} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{12} + \pi k \\ x &= \frac{5\pi}{12} + \pi k \end{aligned} \quad \forall k \in \mathbb{Z}} \ \blacksquare$$

ALGUNES CONSIDERACIONS ADDICIONALS:

- Cal recordar que existeixen algunes equacions sense solució: $\boxed{\frac{1}{A} = 0, \quad e^A = 0, \quad e^A = \text{negatiu}, \quad A^2 = \text{negatiu} \ldots}$ (l)

  (A és una expressió en termes d'x, com ara: $x^2 - 4$)

- Recordem les següents identitats notables que haurem d'usar molt sovint:

$$\boxed{\begin{aligned} (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}} \quad (m)$$