PROCEDIMENT GENERAL

per a solucionar EQUACIONS TRIGONOMÈTRIQUES

1.- Passem a una única funció trigonomètrica:

La nostra equació inicial pot tenir sinus, cosinus i tangents. Nosaltres voldrem deixar-ho tot expressat únicament en termes d'una d'elles —la que més ens convingui—.

- **Exemple:** $\sin\alpha - \cos\alpha = 0 \rightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1 \rightarrow \boxed{tg\,\alpha = 1}$$

- Fórmules que ens poden resultar útils per a fer-ho:

$$\boxed{tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \quad (a) \qquad \boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \quad (b)$$

(c)

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B \quad (c.1)$$
$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B \quad (c.2)$$
$$tg(A+B) = \frac{tg A + tg B}{1 - tg A\, tg B} \quad (c.3)$$

(d)

$$\sin(2A) = 2\sin A\cos A \quad (d.1)$$
$$\cos(2A) = \cos^2 A - \sin^2 A \quad (d.2)$$
$$tg(2A) = \frac{2\,tg A}{1 - tg^2 A} \quad (d.3)$$

2.- Aïllem en l'equació resultant la funció trigonomètrica que hem triat.

Si tenim dificultats per a fer-ho, podem dir-li "y" a aquesta funció i fer l'aïllament amb y. Al final hem d'expressar el resultat amb la funció trigonomètrica original, però.

- **Exemples:** i) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0 \xrightarrow{[b]} 1 - \cos^2\alpha - \cos^2 = 0$

$$\rightarrow 2\cos^2\alpha = 1 \rightarrow \boxed{\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

ii) $\cos^2\alpha + \cos\alpha - 2 = 0 \xrightarrow{y = \cos\alpha} y^2 + y - 2 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow y = \frac{-1 \pm\sqrt{1 + 4\cdot 1\cdot 2}}{2} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ y = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} \cos\alpha = 1 \\ \cos\alpha = -2 \end{cases}}$$

NOTA: aquesta solució s'ha de rebutjar, dones no existeix cap α amb cosinus −2. En la calculadora, de fet, arcos(−2) = ERROR.

3.- Interpretem el resultat del càlcul per a escriure totes les solucions possibles.

CAL RECORDAR:

▶ «Sempre que dividim tota l'equació per una expressió, ~~els resultats~~ les solucions d'aquesta expressió igualada a zero també són solucions de la nostra equació original» (e)

• Exemple: $\operatorname{tg} 2\alpha = 3\operatorname{tg}\alpha \xrightarrow{(d.3)} \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = 3\operatorname{tg}\alpha \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{2}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = 3$ → ara continuem resolent la darrera equació, però hem de prendre nota que les solucions de $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = 0} \rightarrow \alpha = k\,180°$ també solucionen la nostra equació original.

dividim entre $\operatorname{tg}\alpha$ els dos costats de l'equació.

▶ «La calculadora ens dóna només un resultat quan fem un arcsin, arcos o arctg, però aquest no és l'únic resultat possible» Si θ_c és el que ens ha donat la calculadora, trobem la solució general en cada cas de la manera següent:

$$\boxed{\arccos x = \theta_c \Rightarrow \begin{cases} \theta = \theta_c + k\,360° \\ \theta = -\theta_c + k\,360° \end{cases}} \quad (f)$$

la "reflexió en l'estany": 

$$\boxed{\arcsin x = \theta_c \Rightarrow \begin{cases} \theta = \theta_c + k\,360° \\ \theta = (180° - \theta_c) + k\,360° \end{cases}} \quad (g)$$

la "reflexió en el mirall": 

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = \theta_c \Rightarrow \theta = \theta_c + k\,180°} \quad (h)$$

▶ També «ens apareix més d'un resultat quan fem una arrel quadrada (!)» (i)

• Exemple: $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \begin{cases} (+): & x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ (-): & x = \arccos\dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

▶ «De vegades (sobretot si hem elevat al quadrat tota l'equació), ens apareixen falses solucions que hem de rebutjar» (j)

↳ Ho comprovem anant a l'equació original i substituint. Ex: $\sqrt{1-\cos^2 x} = \cos x \rightarrow 1-\cos^2 x = \cos^2 x \rightarrow$
$\rightarrow x = 45° + k\,90°$, però volem només $x = 45° + k\,180°$ //

4.- Un exemple que inclou molts dels anteriors punts:

EQUACIÓ ORIGINAL: $\boxed{\frac{1}{2}\sin\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha = 0}$ (1).

- La primera cosa que veiem és que podem treure $\sin\alpha$ factor comú i eliminar-lo ("passa dividint a la dreta", on tenim un zero):

$$[1] \Rightarrow \sin\alpha\left(\frac{1}{2} - \sin\alpha\cos\alpha\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} - \sin\alpha\cos\alpha = 0 & (2) \\ \sin\alpha = 0 & (3) \end{cases}$$

... ara, doncs, haurem de resoldre l'eq. [2], però sense oblidar (recordem [e] a la segona pàgina) que les solucions de [3], $\sin\alpha = 0$, també solucionen la nostra equació original [1].

- Abans d'ocupar-nos de [2], anem a deduir les solucions de [3]:

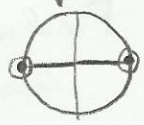
$$\sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \arcsin 0 = 0$$

aquest és el resultat que la calculadora ens dóna, però recordem que n'hi ha més: aplicant [9] (segona pàgina) veiem que:

$\alpha = 0 + k\,360^\circ = k\,360^\circ$

$\alpha = (180^\circ - 0) + k\,360^\circ = 180^\circ + k\,360^\circ$

són també solució, la qual cosa es pot expressar de manera més compacta així: $\boxed{\alpha = k\,180^\circ}$ (4)



- Continuem la resolució analitzant [2]:

$$[2] \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2} \underset{[6]}{\Rightarrow} \sqrt{1-\cos^2\alpha}\,\cos\alpha = \frac{1}{2} \underset{(\ldots)^2 = (\ldots)^2}{\Rightarrow}$$

NOTA: molt probablement, en elevar al quadrat tota l'equació estem introduint "falses solucions" que al final haurem de rebutjar.

$$\Longrightarrow (1-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha = \frac{1}{4} \Longrightarrow \cos^4\alpha - \cos^2\alpha + \frac{1}{4} = 0 \quad (5)$$

- Aquesta darrera equació no és massa difícil de resoldre, però potser ens resulti una mica incòmoda d'entendre i manipular tal qual la tenim expressada. Fem el canvi $y = \cos\alpha$ per a veure-la més clarament:

$$[5] \Longrightarrow y^4 - y^2 + \frac{1}{4} = 0 \Longrightarrow y^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot \frac{1}{4}}}{2\cdot 1} = \frac{1}{2},$$

és a dir, hem reconegut i resolt una equació de tipus "biquadrada". Ara desfem el canvi: $y = \cos\alpha$:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad (6),$$

on hem aplicat (j), doncs si només haguéssim considerat el signe $\oplus$ ens estaríem deixant solucions.

- Ara resolem [6] per als dos signes, i interpretem els resultats de la calculadora segons [j]:

$$[6] \Longrightarrow \begin{cases} \text{signe } (+): & \alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ \to \begin{cases}\alpha = 45^\circ + k360^\circ \\ \alpha = -45^\circ + k360^\circ\end{cases} \\ \text{signe } (-): & \alpha = \arccos\frac{-1}{\sqrt{2}} = 225^\circ \to \begin{cases}\alpha = 225^\circ + k360^\circ \\ \alpha = 135^\circ + k360^\circ\end{cases} \end{cases} \Longrightarrow$$

que podem expressar tot d'una, així:

$$\Longrightarrow \boxed{\alpha = 45^\circ + k90^\circ} \quad (7)$$

- Finalment, ens cal comprovar que totes les solucions que hem trobat satisfan realment l'equació original [1].
↳ o sigui: [4] i [7]. És fàcil veure que [4] sí és solució, però de totes les [7] hem de rebutjar les dels 2n i 4t quadrants, doncs donen al sinus i el cosinus signe diferent, i llavors [2] no es satisfà (i per tant, tampoc [1]).

CONCLUSIÓ: $\boxed{\begin{cases}\alpha = k180^\circ \\ \alpha = 45^\circ + k180^\circ\end{cases}}$