

1.- Vectors

- Expressa en forma polar el vector posició de cadascun dels punts següents:
 $A = (1, -1)$ $B = (-1, -\sqrt{3})$
Calcula les coordenades cartesianes de M, si $\vec{OM} = 6_{45^\circ}$
- Fes les següents operacions amb vectors:
 - $\vec{a} + \vec{b} =$
 - $5 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b} + 4 \vec{c} =$
 - $3 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} =$
 - $\vec{a} \cdot (\vec{c} + \vec{b}) =$
 - $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) =$sent $\vec{a} = (-3, 5)$, $\vec{b} = (2, 8)$ i $\vec{c} = (1, -5)$
- Siguin $A = (-1, 4)$, $B = (-3, 2)$ i $C = (3, -5)$ tres vèrtex consecutius d'un paral·lelogram.
Troba les coordenades del quart vèrtex D.
Troba el punt mig del segment AC i el punt mig del segment BD. Et coincideixen?
- Donats $\vec{u} = (-2, 5)$ i $\vec{v} = (3, -4)$, calcula:
 - El producte escalar
 - Els mòduls
 - L'angle que formen.
 - L'angle format pels vectors \vec{u} i $-\vec{v}$
- Teoria: Definició i propietats del producte escalar.
Posa exemples de les propietats.
- Sabent que $|\vec{u}| = 2$ i que $|\vec{v}| = 3$, calcula:
 $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

2.- NOMBRES REALS

1. Classifica els nombres reals següents en racionals i irracionals:

$$\sqrt{0'49}, -\frac{3}{20}, \sqrt{\frac{9}{121}}, \sqrt[3]{16}, -9, 3'022, 1+e, 1 + \sqrt{5}, \sqrt[3]{2}, 3 - \pi$$

2. Calcula de forma exacte i aproximada (amb 3 decimals) l'àrea i l'altura d'un triangle equilàter de costat 4 cm.

3. Expressa en forma d'una sola potència:

a) $\frac{1}{10^4}$ b) $\sqrt[5]{8^3}$ c) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ d) $\sqrt[7]{a^2}$

4. Efectua les expressions següents, expressant-les de la manera més senzilla possible:

a) $2\sqrt{5} + 3\sqrt{20} - \sqrt{125} =$

b) $3\sqrt{12} - 2\sqrt{75} - 7\sqrt{27} + \sqrt{300} =$

5. Simplifica els radicals següents:

a) $\sqrt{200}$ b) $\sqrt[6]{8^2}$ c) $\sqrt[3]{a^6 \cdot b^4}$ d) $\sqrt{360}$

6. Racionalitza i simplifica el resultat:

a) $\frac{3}{\sqrt{6}}$ b) $\frac{-2}{\sqrt{8}}$ c) $\frac{5}{2-\sqrt{10}}$ d) $\frac{4}{\sqrt{3}+7}$

7. Calcula i expressa el resultat com una sola potència:

a) $3^4 \cdot 3^3 \cdot 3^{-5} =$ b) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{8} =$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{1+\sqrt[5]{2^3}}} =$ d) $\frac{a^{-3} \cdot a^5}{a^{-2}} =$

8. Calcula:

a) $(1 + \sqrt{2})^2 =$

b) $(2\sqrt{3} - 1)^2 =$

c) $(4\sqrt{2} - 2\sqrt{6})^2 =$

3.- NOMBRES REALS, POLINOMIS I EQUACIONS

1. Indica quins dels nombres següents són racionals i quins són irracionals:

$$\frac{-3}{8} \quad 4,457643 \quad -\sqrt{49} \quad -2,012131\dots \quad 6,24545\dots \quad \sqrt[3]{5}$$

2. Racionalitza els denominadors:

$$\frac{3}{\sqrt{15}} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \quad \frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}$$

3. Resol les equacions i inequacions següents:

$$2 + \sqrt{2x+1} = -7 \quad |x-5| > 1$$

4. Resol les inequacions següents:

b) $3 - 2x \leq 5 - 8x$

c) $x^2 - 4 \geq x$

5. Descompon en factors els polinomis següents, i troba'n les arrels:

a) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ b) $x^4 - 6x^2 + 9$

6. Opera i simplifica:

$$\frac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2} - \frac{x - a}{x + a} =$$

7. Resol les equacions:

a) $4 \cdot 2^{5x-3} = 4096$ b) $3\log_2 x - 2\log_2 \frac{x}{3} = 2\log_2 3 + 1$

8. Fes servir la definició de logaritme i calcula:

$$\log_2 125 \quad \log 0,000001 \quad \log_{0,25} 64$$

4.- FUNCIONS: CONTINUÏTAT I LÍMITS

- a) Dibuixa una gràfica d'una funció i una que no sigui d'una funció.
b) Dona una funció que el seu domini sigui $[0, +\infty)$
c) Dona una funció que no estigui definida en $x = -3$.
d) si $g(x) = \cos x$ i $f(x) = 2x - 3$, troba $(f \circ g)$ i $(g \circ f)$

- Troba el domini de definició de les funcions següents:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 + 1} & h(x) &= \frac{x-3}{x^2 + x - 6} & j(x) &= \frac{1}{\sqrt{4-x}} \\ g(x) &= \sqrt{x^2 - 9} & i(x) &= \log(x-2) \end{aligned}$$

- Representa les funcions següents:

$$y = -3x + 2 \qquad y = 2^x \qquad y = \ln(x + 3)$$

- Troba la funció inversa de les següents funcions:

$$a) \quad y = 5x - 2 \qquad b) \quad y = \log_3(x - 1) \qquad c) \quad y = \frac{x^2 - 4}{2}$$

Comprova que al compondre cada funció amb la seva inversa obtenim la identitat.

- a) **Continuïtat d'una funció en un punt.** Quines condicions s'han de donar per que una funció sigui continua en $x = a$?
b) **Tipus de discontinuïtat.** Explica quins tipus de discontinuïtat es poden donar i en quines condicions es donen.

- Troba el límit quan $x \rightarrow \infty$ de les funcions racionals:

$$f(x) = \frac{7x-3}{2x^3-3} \qquad g(x) = \frac{12x^2+2x-5}{6x^2-8x} \qquad h(x) = \frac{x^4-2}{7x^2+20x-1}$$

- Troba els límits següents i indica si en el punt on busquem el límit la funció és continua, en cas contrari, quin tipus de discontinuïtat presenta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 - 3x + 2} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{3x^2 - 2x - 8} \\ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad i \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad si \quad f(x) = \begin{cases} -x-1 & si \quad x \leq -1 \\ 3x^2-3 & si \quad -1 < x < 1 \\ 3 & si \quad x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

5.- FUNCIONS

1. a) **Continuïtat d'una funció en un punt.** Quines condicions s'han de donar per que una funció sigui continua en $x = a$?
b) **Tipus de discontinuïtat.** Explica quins tipus de discontinuïtat es poden donar i en quines condicions es donen.
2. Troba els límits següents i indica si en el punt on busquem el límit la funció és continua, en cas contrari, quin tipus de discontinuïtat presenta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 - 3x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{3x^2 - 2x - 8}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad i \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad si \quad f(x) = \begin{cases} -x - 1 & si \quad x \leq -1 \\ 3x^2 - 3 & si \quad -1 < x < 1 \\ 3 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

3. Fes (aproximadament) la representació gràfica de la funció:

$$h(x) = \frac{x - 3}{x^2 + x - 6}$$

- a) Domini.
 - b) Punts de tall amb els eixos de coordenades.
 - c) Asímptotes
 - d) Col·loca la funció respecte les asímptotes calculant els límits laterals.
4. Calcula, fent servir la definició de derivada:

$$f'(4) \quad si \quad f(x) = 5x - x^2$$

$$f'(-1) \quad si \quad f(x) = \frac{3}{x - 2}$$

5. Troba la funció derivada de les següents funcions:

- a) $y = 5x^4 - 2x^3 - x^2 + 7x - 10$

- b) $g(x) = (-4x + 7) \cdot \log_3 x$

- c) $y = \frac{x^2 - 4}{2x - 3}$
- d) $f(x) = e^x \cdot \sqrt{x}$

- e) $y = \frac{3}{x^2} - \sqrt[3]{x} + \frac{2}{x\sqrt{x}} - 3\sqrt{5}$

6.- RECTES EN EL PLA

1.- Donada la recta $r: 3x + 2y - 8 = 0$:

- Calculeu l'**angle** que forma aquesta recta amb el semieix positiu d'abscisses.
- Trobeu els **punts de tall** d'aquesta recta amb els eixos de coordenades.
- Escriviu l'equació d'una recta **paral·lela** a aquesta recta que passi pel punt $A(1,2)$.
- Escriviu l'equació d'una recta **perpendicular** a aquesta recta que passi pel punt $B(-2,4)$.
- Indiqueu si els **punts** $C(-1,2)$ i $D(2,1)$ pertanyen a aquesta recta.

2.- Trobeu l'equació de las diferents rectes proposades:

- La recta que passa pels **punts** $E(1,-3)$ i $F(-2,-5)$.
- La recta que forma un **angle** de 30° amb el semieix positiu d'abscisses i que passa pel punt $G(4,-1)$.
- La recta que forma un **angle** de 0° amb el semieix positiu d'abscisses i que passa pel punt $H(2,3)$.
- La recta que forma un **angle** de 90° amb el semieix positiu d'abscisses i que passa pel punt $I(-3,9)$.
- Representeu gràficament totes aquestes rectes.

3.- Donats els punts $A(2,0)$ i $B(4,2)$:

- Troba el punt mig entre A i B .
- Troba l'equació general de la mediatriu. (Recta perpendicular al segment AB pel punt mig).
- Fes la intersecció d'aquesta recta amb la recta $r: -2x + y - 3 = 0$.
- Calcula la distància entre A i B .
- Calcula la distància de A a la recta r .

7.- TRIGONOMETRIA

Pots ajudar-te usant la següent aplicació per a visualitzar dos angles, les seves relacions, i els valors dels seus respectius sinus i cosinus:

<https://tube.geogebra.org/student/m676023>

A) Exercicis conceptuals:

- A1.-** Quina relació existeix entre $\sin \alpha$ i $\sin(\pi - \alpha)$? I entre $\cos \alpha$ i $\cos(\pi - \alpha)$?
- A2.-** Quina relació existeix entre $\cos \alpha$ i $\cos(-\alpha)$? I entre $\sin \alpha$ i $\sin(-\alpha)$?
- A3.-** Quant val una volta sencera expressada en graus? I en radianis? Quina relació existeix entre $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ i $\sin(\alpha + 2\pi)$, $\cos(\alpha + 2\pi)$?
- A4.-** Sigui $\alpha = 0,2$ rad. Quant val β , si és l'angle resultant d'anar obrint α fins fer una volta sencera? Quant val γ , que resulta de partir d' α i fer dues voltes senceres? Quina relació hi ha entre els sinus d' α , β i γ ? I entre els seus cosinus?
- A5.-** Sigui α un cert angle. Quant val β , si resulta de partir d' α i fer n voltes senceres? (Sent n un nombre natural). Quina relació hi ha entre $\sin \alpha$ i $\sin \beta$? I entre els seus cosinus?
- A6.-** Quina relació existeix entre $\sin \alpha$ i $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$?

B) Exercicis pràctics:

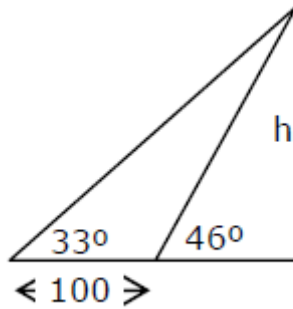
- B1.-** Sabem que $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (NOTA: $\frac{\pi}{4}$ rad = 45°). Sense usar la calculadora, troba el valor de: $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\left(3\frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\left(5\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\frac{\pi}{4}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\left(3\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\left(5\frac{\pi}{4}\right)$.
- B2.-** Sabem que $\cos(60^\circ) = 0,5$. Sense usar la calculadora, troba el valor de: $\cos(300^\circ)$, $\cos(120^\circ)$, $\cos(240^\circ)$.
- B3.-** Sabem que $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866025$. Digues un angle que tingui el mateix valor per al cosinus. És l'únic possible? Suma-li 360° a 30° i calcula el seu cosinus. Com expliques el resultat? Quant donarà si li sumes $2 \cdot 360^\circ = 720^\circ$? I si li sumes $n \cdot 360^\circ$, per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$ (és a dir, $n = 0, 1, 2, 3 \dots$)?
- B4.-** Si $\sin \alpha = 0,6$ ¿quant val α ? A partir del resultat obtingut amb la calculadora, troba un altre resultat possible.
- B5.-** Si $\sin \alpha = 0,3$ ¿quant val α ? Troba, primerament, dos resultats de la "primera volta". Després, troba'n més sumant o restant voltes senceres.
- B6.-** Sabem que $\sin \alpha = 0,2$ i $\cos \beta = 0,9$. Troba tots els valors possibles d' α i de β .

C) Problemes amb triangles (pàg. següent):

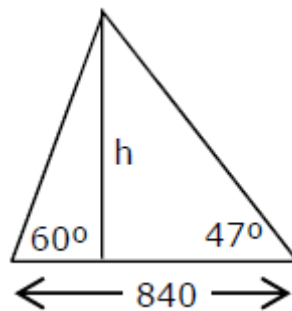
C1.- L'ombra d'un arbre quan els raigs del sol formen amb l'horitzontal un angle de 36° medeix 11 m. Quina és l'altura de l'arbre?

C2.- El fil d'un estel medeix 50 m de llarg, i forma amb l'horitzontal un angle de 37° . A quina altura vola l'estel?

C3.- Per a mesurar l'altura d'un edifici es mesuren els angles d'elevació des de dos punts distants 100 m. Quina és l'altura si els dos angles són 33° i 46° ?



C4.- Dues persones disten entre sí 840 m. Ambdues veuen, simultàniament, un avió amb angles d'elevació de 60° i 47° , respectivament. A quina altura vola l'avió?



C5.- Per a mesurar l'altura d'una muntanya es mesuren els angles d'elevació des de dos punts distants 480 m i situats a 1200 m sobre el nivell del mar. Quina és l'altura si els dos angles són 45° i 76° ?