[dj, 7 de novembre]

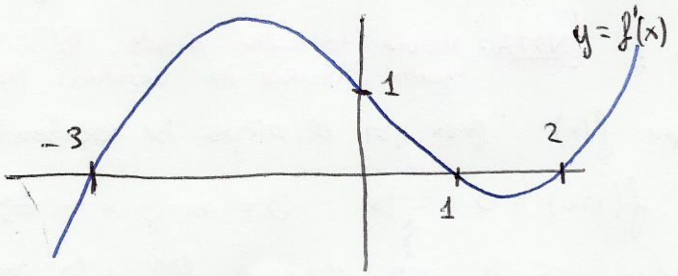
MATES: PROBLEMES PAU '13

juny'13: SÈRIE 4, probl. 6

LA CAPÇALERA de la SÈRIE diu: «En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué»

SÈRIE 4 [juny de 2013]

6 La función $f(x)$ es derivable y pasa por el origen de coordenadas. La gráfica de la $f'(x)$ es:



a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$. [1 punt]

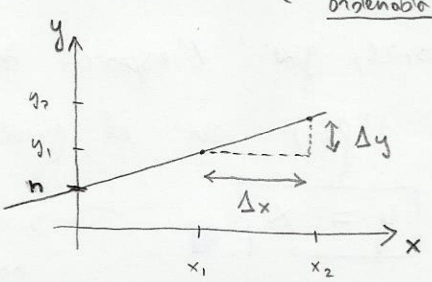
b) Indique las abscisas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifique estos extremos. [1 punt]

RESOLUCIÓ:

a/ Recordatoris:

1. «Equació d'una recta»: $\boxed{y = mx + n}$

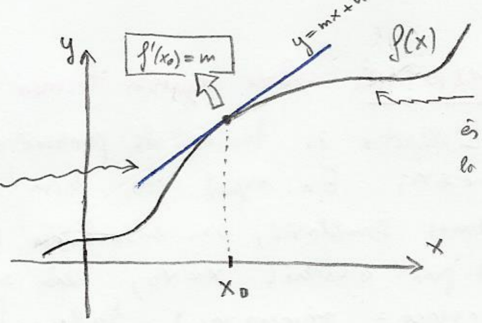
2 paràmetres:
- "pendent": el que pugem dividit el que avancem
- "ordenada en l'origen": $y(x=0)=n$



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2. «Significat geomètric de la derivada» [de la funció $f(x)$, en el punt d'abscissa x_0]:

«És el pendent de la recta tangent a la gràfica d' $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = x_0$»



aquesta corba és la gràfica de la nostra funció f.

aquesta recta és la tangent a la gràfica en el punt d'abscissa x_0.

Si la seva equació fos $y = mx+n$, aleshores $\Longrightarrow$ $\boxed{f'(x_0) = m}$

▶ Per a contestar l'apartat (a), veiem que necessitarem trobar els dos paràmetres $\left\{ \begin{array}{l} m: \text{pendent} \\ n: \text{ordenada en l'origen} \end{array} \right\}$ de la recta tangent.

per tal de ser capaços d'escriure la seva equació, que tindrà la forma $\boxed{y = mx + n}$ (*).

▶ Busquem, doncs, a l'enunciat, si tenim dades suficients per a esbrinar m i n: [NOTA: veure comentari a sota, "@", sobre aquesta tècnica de resolució del problema]

- l'enunciat diu que $f(x)$ "pasa por el origen de coordenadas", és a dir: $f(x=0) = 0 \overset{[*]}{\Longrightarrow} 0 = m \cdot 0 + n \Longrightarrow \boxed{n=0}$.

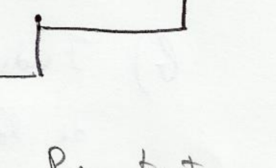
(JUSTIFICACIÓ: el punt d'abscissa $x=0$ és [*] comú a $f(x)$ i la seva tangent en aquest punt, per definició)

> **NOTA:** sempre que una funció passi per l'origen, la seva ordenada en l'origen val zero; si es tracta d'una recta $y = mx + n$, llavors $n = 0$.

- l'enunciat ens dóna la gràfica d' $f'(x)$. Per tant, mirant-la podem trobar $\boxed{f'(x=0) = 1}$. Segons la interpretació geomètrica de la derivada, aquest valor és el pendent de la tangent en el punt, o sigui:

$$\boxed{m = f'(x=0) = 1}$$

▶ CONCLOEM, doncs, que l'equació de la recta tangent a la gràfica d' $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=0$ és: $\boxed{y = x}$ ■ ⟶ és a dir, aquesta recta:



@: COMENTARI sobre aquesta tècnica de resolució del problema:

L'objectiu és trobar els paràmetres m i n de l'equació de la tangent, $y = mx + n$. En aquest cas, hem trobat primer n i després m. En problemes semblants, on ens donin la gràfica de $f'(x)$ i el valor de $f(x_0) = y_0$ per al punt d'interès $x = x_0$, serà en general més convenient procedir a la inversa: primerament trobem $\boxed{m = f'(x_0)}$, i després n fent $\boxed{y_0 = m x_0 + n}$.
(En aquest problema hem usat: $x_0 = 0 \Longrightarrow f(x_0) = n$, però no és el cas general).

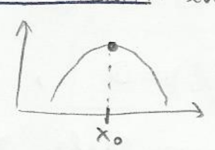
b/ **Recordatori:** **3.** "Extrems relatius": màxims i mínims [locals]

- **Definició** de **màxim local** (o "relatiu"): $f(x)$ té un màxim local en $x = x_0$ si x_0 pertany a un interval obert $]a, b[$ del domini tal que $\boxed{f(x) < f(x_0)}$ per a tot $x \neq x_0$ que pertanyi a l'interval.
- **Definició** de **mínim local** (o "relatiu"): tot igual, però ara hauria de donar-se que $\boxed{f(x) > f(x_0)}$ per a tot $x \neq x_0$ a dins de l'interval.

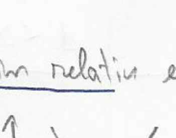
⇒ Aquestes definicions rigoroses poden ser poc intuitives d'emprar. En molts casos només ens caldrà fer anar:

- un **teorema** que diu que
  - si $\boxed{f'(x_0) = 0 \text{ i } f''(x_0) < 0}$ ⇒ màxim relatiu en x_0
  - si $\boxed{f'(x_0) = 0 \text{ i } f''(x_0) > 0}$ ⇒ mínim relatiu en x_0

- la **noció intuitiva**:
  - màxim relatiu en $x = x_0$ ⇒
    - per a $x < x_0$, "a l'esquerra", $f(x)$ creix ($\Rightarrow \boxed{f'(x) > 0}$)
    - per a $x > x_0$ "a la dreta", $f(x)$ decreix ($\Rightarrow \boxed{f'(x) < 0}$)



  - mínim relatiu en $x = x_0$ ⇒
    - per a $x < x_0$ "a l'esquerra", $f(x)$ decreix ($\Rightarrow \boxed{f'(x) < 0}$)
    - per a $x > x_0$ "a la dreta", $f(x)$ creix ($\Rightarrow \boxed{f'(x) > 0}$)

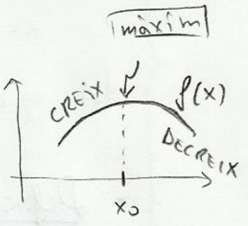


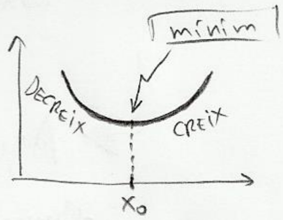
COM APLICAR-LA en la pràctica, pàg. següent

⇨ APLICACIÓ de la "noció intuitiva":

Només ens cal entendre què li passa al signe de $f'(x)$ al voltant del punt $x = x_0$, "candidat a extrem":

	$x < x_0$ "a l'esquerra" (o "abans")	x_0	$x > x_0$ "a la dreta" (o "després")
Si MÀXIM, $f'(x)$:	+ ("f creix")	$=0$	− ("f decreix")
Si MÍNIM, $f'(x)$:	− ("f decreix")	$=0$	+ ("f creix")





(!) Sempre $\boxed{f'(x)=0}$ en x_0 és condició necessària d'extrem local (!)

• Algunes precisions de rigor matemàtic: existeixen extrems d'un altre tipus: màxims o mínims "absoluts": el punt x_0 amb un $f(x_0)$ més gran (o petit, si és mínim) que tota la resta d'x del domini sencer. A més a més, la condició $f'(x)=0$ d'extrem relatiu és necessària, però no suficient: existeixen punts amb $f'(x)=0$ que no són extrems ("punts d'inflexió amb tangent horitzontal"). Igualment, existeixen extrems relatius amb $f'(x)=0$ però $f''(x)=0$ (ni positiva ni negativa); per exemple, $f(x)=x^4$ té un mínim a l'origen.

▷ Per a contestar l'apartat (b), localitzem a la gràfica els punts on $f'(x)$ s'anul·la: $\boxed{f(-3)=f(1)=f(2)=0}$, que seran els nostres candidats a extrems, i fem una taula amb el signe de la derivada abans i després d'ells:

	$x<-3$	$x=-3$	$-3<x<1$	$x=1$	$1<x<2$	$x=2$	$x>2$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+

⇨ $\left.\begin{matrix} x=-3 \\ x=2 \end{matrix}\right\}$: mínims relatius, perquè a l'entorn $f(x)$ decreix a l'esquerra i creix a la dreta.

$x=1$: màxim relatiu, perquè a l'entorn $f(x)$ creix a la dreta i decreix a l'esquerra.