TASCA AVALUACIÓ CONTINUADA — TEMA 3

2n de Batxillerat

Continguts

Instruccions:

Data de lliurament: dijous, 25 de febrer, al principi de la classe.

Heu de lliurar fets per vosaltres tots els exercicis: C1, C4, C6, C8, C11 i C13, i també tota la secció D.

Veureu que de vegades els enunciats parlen de solucions, però aquestes no apareixen. El motiu és que les he tretes per a que ho feu tot per vosaltres mateixos. Tampoc no trobareu cap solució d'aquestes integrals en tot el meu web.

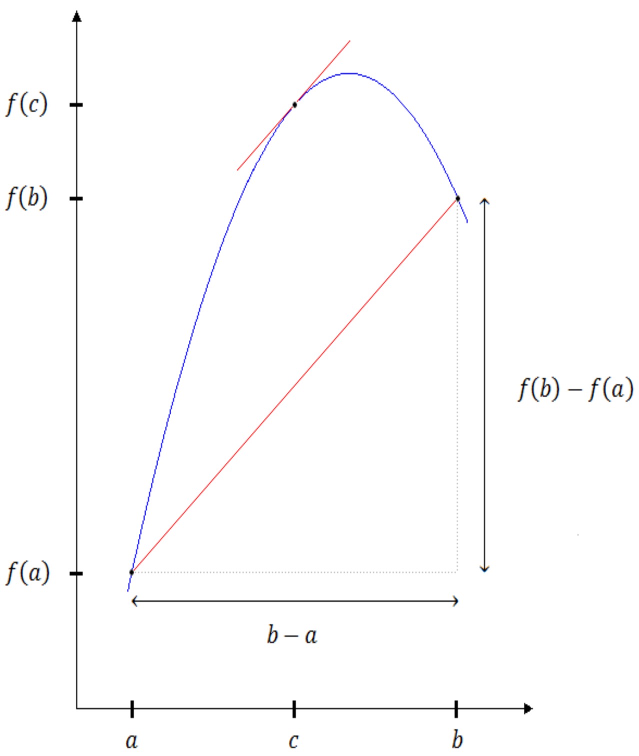
Recordeu que per a aprovar el tema d'integrals serà necessari treure, com a mínim, un 2,5 sobre 5 del total de punts de càlcul de primitives: dos punts són de la present tasca, i tres dels exericicis de càlcul de primitives de l'examen del dia 4 de març.

A.- RECORDATORI de DERIVADES

FITXA I "Algunes regles de derivació"

1)	$y = k$	$\longrightarrow$	$y' = 0$	**8)** $(\sin u)' = u' \cos u$
2)	$y = x$	$\longrightarrow$	$y = 1$	**9)** $(\cos u)' = -u' \sin u$
3)	$y = u + v$	$\longrightarrow$	$y' = u' + v'$	**10)** $(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = (1 + \mathrm{tg}^2\, u)\, u'$
4)	$y = ku$	$\longrightarrow$	$y' = ku'$	**11)** $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
5)	$y = u^k$	$\longrightarrow$	$y' = k\, u^{k-1}\, u'$	**12)** $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
6)	$y = e^u$	$\longrightarrow$	$y' = u' e^u$	**13)** $(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
7)	$y = \ln u$	$\longrightarrow$	$y' = \frac{u'}{u}$	

FITXA II "El Teorema del Valor Mitjà"



Teorema: Sigui $f(x)$ una funció contínua en $[a, b]$ i derivable en $]a, b[$.

Aleshores, existeix al menys un punt $c \in]a, b[$ tal que

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}.$$

Interpretació geomètrica

El teorema diu que sempre podem trobar un punt interior c que tingui tangent paral·lela a la corda que uneix els extrems de l'interval.

B.- DEFINICIÓ de PRIMITIVA

Definició: Sigui $f(x)$ una funció definida en $[a,b]$. Anomenem funció primitiva d' $f(x)$ a qualsevol funció $F(x)$ definida en $[a,b]$ tal que la seva derivada coincideixi amb $f(x)$ en $]a,b[$.

És a dir, $\boxed{F(x) \text{ és primitiva d' } f(x) \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x)}$.

Exemple: La funció $F(x) = \sin x$ és una primitiva de la funció $f(x) = \cos x$, doncs: $F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$ ■

C.- EXERCICIS i DEDUCCIÓ d'algunes PROPIETATS

C1.- [*Exercici bàsic*] Troba una funció primitiva $F(x)$ de cadascuna de les següents funcions $f(x)$. L' a representa una constant —un número real—. Nota: Pots consultar les regles de derivació de la "Fitxa I" per a orientar-te; quan creguis que tens una $F(x)$, només has de derivar per a comprovar-ho.

a) $f(x) = \cos x \quad \rightarrow \quad F(x) = \sin x$
b) $f(x) = {}^{1}\!/_{x} \quad \rightarrow \quad F(x) =$
c) $f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad F(x) =$
d) $f(x) = 2 \quad \rightarrow \quad F(x) =$
e) $f(x) = 6 \quad \rightarrow \quad F(x) =$
f) $f(x) = 1 \quad \rightarrow \quad F(x) =$
g) $f(x) = 15 \quad \rightarrow \quad F(x) =$
h) $f(x) = a \quad \rightarrow \quad F(x) =$
i) $f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad F(x) =$

C2.- [*Solucions C1 + def. d'integral indefinida*] Un resultat possible de l'anterior exercici **C1.i** és $F(x) = 17$, doncs la derivada d'una constant dóna zero. Evidentment, la constant pot ser qualsevol: $F(x) = 5$, per exemple, és un altre resultat vàlid del mateix exercici.

En general, podem expressar tot aquest conjunt de resultats de la següent manera: $F(x) = k$, volent dir que k és una constant qualsevol.

Seguint un raonament semblant, és molt fàcil veure que les següents funcions solucionen la resta d'apartats de l'exercici **C1**:

Veiem, doncs, que sempre existeixen moltes (infinites) primitives d'una funció qualsevol. En general podem afirmar que:

Si $F(x)$ és una primitiva d' $f(x)$, llavors $G(x) = F(x) + k$ també ho és.

(Per a qualsevol valor de $k \in \mathbb{R}$).

Aquesta expressió $F(x) + k$ rep el nom d'integral indefinida (o primitiva general) d' $f(x)$, i s'escriu:

$$\int f(x)dx = F(x) + k$$

C3.- [*Problema d'ampliació. Dificultat: alta*]

Demostra, fent servir el teorema del valor mitjà ("Fitxa II"), que:

Totes les primitives de la funció $h(x) = 0$ tenen necessàriament la forma $H(x) = k$.

Ajuda: Fixa't que si demostres que, per a qualsevol interval $[a, b]$, el teorema obliga a que sigui $H(a) = H(b)$, aleshores ja hauràs demostrat el que volem.

Comentari (sobre aquest resultat): Ja sabem que si tenim una primitiva $F(x)$ de la funció $f(x)$, aleshores sumant-li una constant a $F(x)$ tenim una altra primitiva d' $f(x)$, $G(x) = F(x) + k$. Ara ens podríem preguntar si això també funciona en l'altra direcció, és a dir: imaginem que tenim dues primitives d' f, $F(x)$ i $G(x)$, aleshores ¿sempre existeix una constant k tal que $G(x) = F(x) + k$?

Anem a veure que la resposta és afirmativa. Per a fer-ho, definim la funció $H(x) = G(x) - F(x)$ i la derivem:

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

O sigui que $H'(x) = 0$. Però tu acabes de demostrar que això implica necessàriament que $H(x) = k$, i per tant:

$$G(x) - F(x) = k \;\Rightarrow\; G(x) = F(x) + k,$$

com volíem demostrar. Dit d'una altra manera: si aconseguim una primitiva qualsevol $F(x)$ de la funció $f(x)$, aleshores qualsevol altra primitiva d' $f(x)$ és igual a $F(x) + k$ per a un cert valor de la constant k. Per això aquesta expressió rep el nom de "primitiva general".

C4.- [*Exercici bàsic*] Troba una funció primitiva $F(x)$ de cadascuna de les següents funcions $f(x)$. Pots ajudar-te mirant la "Fitxa I" de pàg. 2, parant especial atenció a les regles núm. 3 i 5.

a)	$f(x) = 1 + \cos x$	$\longrightarrow$	$F(x) = x + \sin x$
b)	$f(x) = \sin x$	$\longrightarrow$	$F(x) =$
c)	$f(x) = a + e^x$	$\longrightarrow$	$F(x) =$
d)	$f(x) = \sin x + \cos x$	$\longrightarrow$	$F(x) =$
e)	$f(x) = \cos x - 1/x$	$\longrightarrow$	$F(x) =$
f)	$f(x) = 2x$	$\longrightarrow$	$F(x) =$
g)	$f(x) = 3x^2$	$\longrightarrow$	$F(x) =$
h)	$f(x) = 4x^3$	$\longrightarrow$	$F(x) =$
i)	$f(x) = 5x^4$	$\longrightarrow$	$F(x) =$
j)	$f(x) = 6x^5$	$\longrightarrow$	$F(x) =$
k)	$f(x) = 7x^6$	$\longrightarrow$	$F(x) =$
l)	$f(x) = \cos x - 4x^3$	$\longrightarrow$	$F(x) =$
m)	$f(x) = 3x^2 - 2$	$\longrightarrow$	$F(x) =$

C5.- [*Solucions C4 + fórmula d'integral de la suma*] Heus aquí una possible solució de cada apartat de l'exercici **C4:**

Als apartats **a**, **c**, **d**, **e**, **l** i **m** has resolt casos concrets del problema general de trobar la primitiva de la suma de funcions, que és igual a la suma de primitives (com a conseqüència de la regla 3 de "Fitxa I"). És a dir:

$$\boxed{\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx} \qquad \text{Eq. (1)}$$

C6.- [*Exercici estàndard*] Calcula les següents integrals indefinides, sent-hi $p \neq -1$. **Ajuda**: hauràs de tenir en ment les regles 4 i 5 de pàg. 2. Pots guiar-te amb els casos que estan resolts. **Nota**: recorda-te'n de sumar una constant al final!

a) $\int 3\cos x\,dx = 3\sin x + k$ **b)** $\int 4e^x\,dx$

c) $\int \frac{-2}{x}dx$ **d)** $\int a\cos x\,dx$ **e)** $\int a\sin x\,dx$

f) $\int 12x^2\,dx = \int 4\cdot 3x^2\,dx = 4x^3 + k$ **g)** $\int 6x^2\,dx$

h) $\int(-x^2)\,dx$ **i)** $\int(-9x^2)\,dx$ **j)** $\int 8x^3\,dx$

k) $\int 36x^5\,dx$ **l)** $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + k$ **m)** $\int x^2\,dx$

n) $\int x^3\,dx$ **o)** $\int x^4\,dx$ **p)** $\int x^5\,dx$

q) $\int x^p\,dx$ **r)** $\int 5x^p\,dx = \frac{5}{p+1}x^{p+1} + k$

s) $\int 7x^p\,dx$ **t)** $\int(-x^p)\,dx$ **u)** $\int bx^p\,dx$

v) $\int x^{-2}\,dx = -x^{-1} + k = -\frac{1}{x} + k$ **w)** $\int x^{-4}\,dx$

x) $\int \frac{1}{x^3}dx$ **y)** $\int x^{1/3}\,dx$ **z)** $\int \sqrt{x}\,dx$

C7.- [*Algunes sols. C6 + fórmules: int. de constant per funció, int. de potències*] Heus aquí la solució d'alguns apartats del **C6** (I vol dir "integral"):

Fixa't que en molts dels apartats de l'exercici has aplicat la següent regla d'integració (basada en la regla 4 de pàg. 2):

$$\boxed{\int \lambda\cdot f\,dx = \lambda\int f\,dx} \qquad \text{Eq. (2)}$$

és a dir: **«**integral de constant per funció és igual a la constant per la integral de la funció**»**.

Una altra manera de veure aquesta regla és dir que el signe integral $\int$ és "transparent" per a les constants, $\int \lambda = \lambda \int$.

L'ús d'aquesta "transparència" és la que ens ha permès, també, fer algunes altres integrals com ara la **C6.l**, on hem multiplicat i dividit tota la integral per 2 (la qual cosa és com multiplicar per la unitat, és a dir: no canvia res), i hem deixat el 2 que multiplica a dins i el 2 que divideix a fora per conveniència:

$$\int x\,dx = \frac{2}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + k$$

El mateix procediment és el que hem emprat en l'apartat **C6.q**, on hem multiplicat i dividit per $p+1$ (no hi ha cap problema en dividir entre $p+1$ perquè l'enunciat ja ens avisa que $p \neq -1$):

$$\int x^p\,dx = \frac{p+1}{p+1}\int x^p\,dx = \frac{1}{p+1}\int (p+1)x^p\,dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + k$$

Aquest resultat es basa, de fet, en una combinació de les regles 4 i 5 de la pàg. 2, i constitueix una de les regles de integració més importants:

$$\boxed{\int x^p\,dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} \qquad (\text{si } p \neq -1)} \qquad \text{Eq. (3)}$$

(No hem escrit la constant k per claredat, però no hem d'oblidar-la mai quan fem integrals indefinides).

Amb la darrera regla podem integrar qualsevol potència d'exponent diferent de menys u, la qual cosa inclou, per exemple, arrels, doncs no són altra cosa que potències d'exponent fraccionari; vegem l'apartat **C6.z**:

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{1}{3/2}x^{3/2} + k = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + k$$

El cas $p = -1$ en l'Eq. (3) no presenta cap problema, doncs l'integrand (allò que integrem) s'esdevé $1/x$, i sabem que la integral d'això dóna un logaritme neperià (veure exercici **C1.b**; també, regla 7 de pàg. 2):

$$\boxed{\int x^p\,dx = \ln|x| + k \qquad (\text{si } p = -1)} \qquad \text{Eq. (4)}$$

C8.- [*Exercici estàndard*] Calcula les següents integrals indefinides fent servir les regles expressades en les darreres equacions (1), (2), (3) i (4).

a) $\int 3x^6\,dx$ **b)** $\int \frac{2}{x^2}dx$ **c)** $\int 5\sqrt[3]{x^2}\,dx$

d) $\int \frac{7}{\sqrt{x}}dx$ **e)** $\int \frac{x^3}{4}dx$ **f)** $\int (3 - 2x^2 + x^3)\,dx$

g) $\int (5 - 3x)^2\,dx$ **h)** $\int 5x^2 \cdot \sqrt[7]{x} \cdot dx$ **i)** $\int \frac{\sqrt{x}}{x^4}dx$

j) $\int \frac{4x^5-2x^3-7x^2+2x-4}{5x^3}\,dx$ **k)** $\int \left(\frac{3}{x^2}-\frac{3}{x}+3+5\frac{x^2}{\sqrt{x}}-2x^2-x^3\right)dx$

l) $\int (1+x)^2\,dx$ **m)** $\int (4-3x^2)\cdot\sqrt{x}\,dx$ **n)** $\int \left(\sqrt[5]{x}-\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$

o) $\int \frac{4x^2+7x-6\sqrt{x}+3}{5\sqrt[4]{x}}\,dx$ **p)** $\int \frac{7x^3-2x-\sqrt[3]{x}+3}{x^2}\,dx$

C9.- [*Solucions d'alguns apartats de C8*]

C10.- [*Problema d'ampliació. Dificultat: baixa-moderada*]

En física es treballa sovint amb la posició, velocitat i acceleració de les partícules[1], que són tres funcions del temps: $r(t),\ v(t),\ a(t)$.

Sabem, a més a més, que la velocitat és la derivada de la posició respecte del temps, la qual cosa vol dir que la posició és la integral de la velocitat (doncs integració i derivació són operacions inverses):

$$v(t) = r'(t) \quad \Leftrightarrow \quad r(t) = \int v(t)\,dt$$

El mateix podem dir sobre l'acceleració: és la derivada de la velocitat respecte del temps, i per tant la velocitat és la integral de l'acceleració,

$$a(t) = v'(t) \quad \Leftrightarrow \quad v(t) = \int a(t)\,dt$$

Anem a imaginar un moviment tal que l'acceleració sigui constant tot el temps. Representarem aquesta constant, senzillament, amb la lletra a.

a) Troba, integrant dues vegades respecte del temps la funció acceleració, les funcions velocitat $v(t)$ i posició $r(t)$ d'aquest moviment. Reconeixes aquestes funcions? Quin nom rep aquest tipus de moviment?

b) En cadascuna de les integrals de l'apartat anterior t'haurà aparegut sumant una constat d'integració (pots dir-li K a la primera i C a la segona, per exemple). Quin significat té cadascuna? En física, aquestes constants habitualment no s'escriuen com K ó C. Com se les sol designar?

Ajuda: si dubtes en la interpretació de les constants, prova de fer $t = 0$ en les funcions que has trobat per a la velocitat i la posició.

Comentari: sempre que la variable independent respecte de la qual integrem té o pot tenir un significat de "temps", es poden interpretar de manera semblant a com ho has fet tu ara les constants d'integració que surten (i sovint ens referim a elles com a "condicions inicials").

[1] Anem a suposar tot el temps que el nostre moviment té lloc en una dimensió, per tal d'evitar els vectors.

C11.- [*Exercici estàndard + ús bàsic de regla de la cadena*]

En la integral següent hi ha un cosinus que té un 3 multiplicant la x:

$$\int \cos 3x \, dx$$

És important adonar-nos que la primitiva de $f(x) = \cos 3x$ no és la funció $F(x) = \sin 3x$. Si derivem, a causa de la regla de la cadena el 3 ens "surt" a fora: $F'(x) = (\sin 3x)' = 3\cos 3x$. (No hem fet res més que aplicar la regla de derivació 8 de la pàg. 2).

Això ens porta a fer el truc de multiplicar i dividir tota la integral per 3. El 3 que divideix roman a fora de la integral, però el que multiplica hi entra:

$$\int \cos 3x \, dx = \frac{3}{3}\int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3}\int 3\cos 3x \, dx$$

(ja sabem que el signe integral és "transparent" a les constants; recordem l'Eq. (2) de pàg. 6).

Ara sí que podem fer $\int 3\cos 3x \, dx = \sin 3x$, i llavors podem concloure que:

$$\int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3}\sin 3x + k$$

(Per a convèncer-nos que hem fet bé la integral, només hem de derivar el resultat i veure que dóna el que toca).

Calcula les següents integrals indefinides fent servir aquesta tècnica. Pots guiar-te amb l'exemple anterior i amb els casos que estan resolts:

a) $\int \sin 5x \, dx$ **b)** $\int \cos(7x - 1) \, dx$ **c)** $\int 2\sin(1 - x) \, dx$

d) $\int (5x + 3)^7 \, dx = \frac{1}{5}\int 5(5x + 3)^7 \, dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}(5x + 3)^8 + k = \frac{1}{40}(5x + 3)^8 + k$

e) $\int (3x - 1)^6 \, dx$ **f)** $\int (4 - x)^3 \, dx$ **g)** $\int 4(4 - x)^3 \, dx$

h) $\int \frac{1}{8x+5} dx = \frac{8}{8}\int \frac{1}{8x+5} dx = \frac{1}{8}\int \frac{8}{8x+5} dx = \frac{1}{8}\ln|8x + 5| + k$

i) $\int \frac{1}{3x-9} dx$ **j)** $\int \frac{1}{x-5} dx$ **k)** $\int \frac{7}{2x+5} dx$

C13.- [*Exercici estàndard*] Calcula les següents integrals indefinides fent servir les regles expressades en les equacions (1), (2), (3) i (4) de les pàgines anteriors, així com la tècnica que has aprés en l'exercici **C11**. També pots consultar la "Fitxa I" de pàg. 2.

a) $\int \frac{1}{4x-3}\,dx$ **b)** $\int \frac{5}{5x+1}\,dx$ **c)** $\int \sqrt{1+7x}\,dx$

d) $\int \frac{23}{\sqrt{1-x}}\,dx$ **e)** $\int (5-17x)^2\,dx$ **f)** $\int 10(2-x)^9\,dx$

g) $\int (ax^2+bx+c)\,dx$ **h)** $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ **i)** $\int \frac{-4}{\cos^2 7x}\,dx$

j) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ **k)** $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **l)** $\int \frac{20}{1+(5x+4)^2}\,dx$

D.- EXERCICI de SÍNTESI

Fes a llapis en aquest full les següents deu integrals. Com que són casos representatius de tot el que has treballat fins aquí, potser et sigui útil anotar aclariments al costat d'alguns dels passos —o afegir comentaris personal sobre l'ús de cada tècnica—. Acaba-les totes abans de mirar les solucions (secció E).

I.- POTÈNCIES

$$\int x^p\,dx = \begin{cases} = & \text{(si } p \neq -1) \\ & \\ = & \text{(si } p = -1) \end{cases}$$

- ► $\int x\,dx =$
- ► $\int \frac{6}{x}\,dx =$
- ► $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$

II.- CONSTANT PER FUNCIÓ

$$\int \lambda \cdot f\,dx =$$

- ► $\int 4x\,dx =$
- ► $\int \cos 6x\,dx =$

III.- SUMA DE FUNCIONS

$$\int (f+g)\,dx =$$

- ► $\int \left(x + \frac{1}{x} + 2\right) dx =$
- ► $\int \frac{2x^2+x}{x}\,dx =$

E.- PROPOSTA de RESUM

Heus aquí un resum de les tres tècniques bàsiques del càlcul d'integrals immediates, amb exemples representatius resolts (en blau).

Nota: per no sobrecarregar la fórmula, en la primera regla hem omès la constat d'integració (el $+k$), però en la pràctica cal no oblidar-se mai de ficar-la.

I.- POTÈNCIES

$$\boxed{\int x^p\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{p+1}}{p+1} & p \neq -1 \\ \ln|x| & p = -1 \end{cases}}$$

- ► $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + k$
- ► $\int \frac{6}{x}dx = 6\ln|x| + k$
- ► $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-1/2}\,dx = 2x^{1/2} + k = 2\sqrt{x} + k$

II.- CONSTANT PER FUNCIÓ

$$\boxed{\int \lambda \cdot f\,dx = \lambda \int f\,dx}$$

- ► $\int 4x\,dx = 4\int x\,dx = 4\frac{1}{2}x^2 + k = 2x^2 + k$
- ► $\int \cos 6x\,dx = \frac{6}{6}\int \cos 6x\,dx = \frac{1}{6}\int 6\cos 6x\,dx = \frac{1}{6}\sin 6x + k$

III.- SUMA DE FUNCIONS

$$\boxed{\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx}$$

- ► $\int \left(x + \frac{1}{x} + 2\right)dx = \int x\,dx + \int \frac{1}{x}dx + \int 2\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + 2x + k$
- ► $\int \frac{2x^2+x}{x}dx = \int (2x+1)\,dx = \int 2x\,dx + \int dx = x^2 + x + k$