I. E. S. JÚLIA MINGUELL 2n Batxillerat	dj, 4 de febrer 2016
Matemàtiques — Avaluació Continuada 2.2 FUNCIONS: «Continuïtat i representació» (II)	Alumne: LLIURAMENT: dm, 9 de febrer 2016

Fes l'estudi complet de les següents tres funcions, i representa-les gràficament:

a) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{x-1}{4}$ **b)** $g(x) = x \cdot e^x$ **c)** $h(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

MÈTODE COMPLET per a representar funcions explícites:

1.- SIMETRIES i PERIODICITAT:

- Si $f(x) = f(x+T)$: periòdica $\Rightarrow$ estudiem només un $I = [a,\ a+T]$
  - no existiran els límits en $\pm\infty$, i per tant ∄AH ni AO.
- Si $f(-x) = f(x)$: parell $\Rightarrow$ estudiem només $x \geq 0$, doncs:
  - la gràfica és simètrica respecte l'eix Y ("mirall").
  - curvatura/extrem en $-x$ igual que en x; creixement, el contrari.
- Si $f(-x) = -f(x)$: senar $\Rightarrow$ estudiem només $x \geq 0$, doncs:
  - gràfica simètrica respecte origen ($x < 0$ és $x > 0$ rotada 180º).
  - creixement en $-x$ igual que en x; curvatura/extrem, contraris.

2.- DOMINI i CONTINUÏTAT:

- Localitzem: tots els denominadors d, els radicands d'arrels d'índex parell R, i els arguments de logs A. (Si $\exists$ més d'un: $d_1,\ d_2,\ d_3$ ...)
- Esbrinem els punts on $d = 0$, les regions on $R < 0$ i les regions on $A \leq 0$ $\Rightarrow$ el domini serà tot $\mathbb{R}$ excepte tots aquests punts i regions.
- $f(x)$ serà derivable i contínua en tots els punts interiors del domini.

3.- ASÍMPTOTES:

AV: candidats x on «$\text{denominador} = 0$ ó $\log 0$»: hi fem límits laterals.

AH: dreta, si $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existeix i és finit; esquerra, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

AO: només si algun dels límits de les AH ens ha donat $\pm\infty$

4.- EXTREMS i TAULA CR/DECR:

Fronteres a la taula: candidats a extrem i valors d'x que provoquin «$\text{denominador} = 0$ ó $\log 0$» en 1a derivada $f'(x)$.

5.- INFLEXIONS i TAULA DE CURVATURA:

Fronteres a la taula: candidats a p. inf. i valors d'x que provoquin «$\text{denominador} = 0$ ó $\log 0$» en 2a derivada $f''(x)$.

6.- PUNTS de TALL: x = 0 —> tall amb eix Y
y = 0 —> tall(s) amb eix X

7.- REPRESENTACIÓ GRÀFICA:

$\boxed{1r}$: <u>Asímptotes</u> i/o comportament en $\pm\infty$
(mirem taula CC/CV per a ficar les fletxetes)

$\boxed{2n}$: <u>Extrems</u>, <u>talls</u>, <u>inflexions</u> i més punts d'ajuda si cal
(mirem taula CR/DECR per a ficar els segments-guia)

$\boxed{3r}$: <u>Traçat</u> de la corba:
passant suaument pels punts i respectant curvatura.

a/

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{x-1}{4}$$

1 SIMETRIES i PERIODICITAT:

$\boxed{f \text{ no és periòdica}}$;

$$f(-x) = \frac{1}{(-x-2)^2} + \frac{-x-1}{4} = \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{x+1}{4} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{f \text{ no té simetries}}$ (més tècnicament: "no té paritat definida")

2 DOMINI i CONTINUÏTAT:

(el denominador 4 no mai val zero)

$$d = (x-2)^2 = 0 \Longrightarrow \boxed{x=2} \notin D[f] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{D[f] = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)}$$

només cal "treure" el 2

La funció està construïda sumant, multiplicant, dividint i/o component funcions elementals; per tant, és derivable en tots els punts interiors del seu domini: en aquest cas, en tot el domini — doncs tots els intervals que el formen són oberts, i per tant tots els punts són interiors —. Conseqüentment, $\boxed{f \text{ és contínua en tot } D[f]}$

3 ASIMPTOTES:

AV: $d = 0 \Longrightarrow \boxed{x=2}$ candidat

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{x-1}{4}\right)=\dfrac{1}{0^+}+\dfrac{1}{4}=+\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{x-1}{4}\right)=\dfrac{1}{0^+}+\dfrac{1}{4}=+\infty \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\boxed{x=2}$ és A.V.

AH: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{x-1}{4}\right)=\dfrac{1}{\infty}\pm\infty=\pm\infty \Rightarrow \nexists$ AH

AO: $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x(x-2)^2}+\dfrac{x}{4x}-\dfrac{1}{4x}\right)=\dfrac{1}{4}$

$n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{(x-2)^2}+\cancel{\dfrac{x}{4}}-\dfrac{1}{4}\cancel{-\dfrac{1}{4}x}\right)=$

$=\dfrac{1}{\infty}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4} \Rightarrow$ r: $\boxed{y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{4}}$

és AOe i AOd

4 EXTREMS i TAULA CR/DECR:

$\boxed{f'(x)=-\dfrac{2}{(x-2)^3}+\dfrac{1}{4}}=0 \Rightarrow \dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{(x-2)^3} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)^3=8 \Rightarrow x-2=\sqrt[3]{8}=2 \Rightarrow \boxed{x=4}$;
candidat.

denom $=0 \Rightarrow (x-2)^3=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$ discontinuïtat en f'

	$x<$	2	$<x<$	4	$<x$
f':	⊕	$\nexists$	⊖	0	⊕
f:	↗	$\nexists$	↘	∪	↗

$f'(12)=-\dfrac{2}{1000}+\dfrac{1}{4}\simeq\dfrac{1}{4}=\oplus$

$f'(3)=-\dfrac{2}{1^3}+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{7}{4}=\ominus$

$f'(0)=-\dfrac{2}{\ominus}+\dfrac{1}{4}=\oplus+\oplus=\oplus$

$$\Rightarrow \quad x = 4 \rightarrow y = f(4) = \frac{1}{(4-2)^2} + \frac{4-1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A(4,1) \text{ és mínim}}$$

5 CURVATURA i INFLEXIÓ:

$$\boxed{f''(x) = \frac{6}{(x-2)^4}} = 0 \underset{x \neq 2}{\rightarrow} 6 = 0 \quad \text{ABSURD} : \nexists \text{ solució, } \nexists \text{ candidats} \Rightarrow \boxed{\nexists \text{ P. INF}}$$

$$d = (x-2)^4 = 0 \rightarrow \boxed{x=2} \text{ discontinuïtat en } f''$$

	$x <$	2	$< x$
f'':	$+$	$\nexists$	$+$
f:	$\cup_{cc}$	$\nexists$	$\cup_{cc}$

$$\frac{6}{(x-2)^4} \underset{x\neq 2}{=} \frac{6}{+} = +$$

6 PUNTS de TALL:

$$x = 0 \rightarrow y = \frac{1}{4} + \frac{-1}{4} = 0 \Rightarrow \boxed{B(0,0) \text{ tall } X, Y}$$

$$y = 0 \rightarrow \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{x-1}{4} = 0 \rightarrow \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1-x}{4}$$

$$\rightarrow \cancel{4} = (1-x)(x-2)^2 = (1-x)(x^2+4-4x) =$$

$$= x^2 + 4 - 4x - x^3 - 4x + 4x^2 =$$

$$= -x^3 + 5x^2 - 8x + \cancel{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -x^3 + 5x^2 - 8x = (-x^2 + 5x - 8)\,x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{punt } B \ \checkmark \\ -x^2 + 5x - 8 = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{-7}}{-2} \notin \mathbb{R}$$

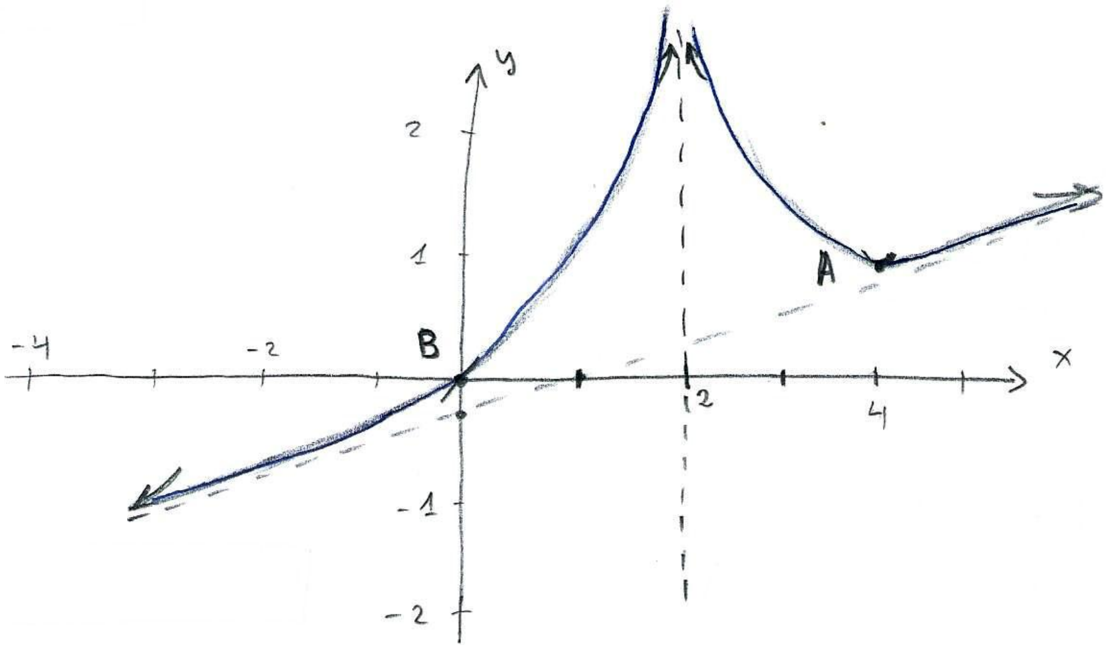
($\nexists$ solució).

7 REPRESENTACIÓ GRÀFICA:

A(4,1) mín AV: $x = 2$ $\uparrow\uparrow$

B(0,0) tall X, Y AO: $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \rightarrow$ talls AO: $(0, -0'25)$, $(1, 0)$

CR/DECR: 2, 4: $\nearrow \nexists \searrow \cdot \nearrow$ CURV: 2: $\cup \quad \cup$



b/ $g(x) = x \cdot e^x$

1 SIMETRIES i PERIODICITAT: $\boxed{g \text{ no és periòdica}}$;

$g(-x) = -x \cdot e^{-x} = -\frac{x}{e^x} \neq g(x), \quad -g(x)$

$\Rightarrow$ $\boxed{g \text{ no té simetries}}$ (no és ni senar ni parella).

2 DOMINI i CONTINUÏTAT:

com que no hi ha cap denominador, logaritme ni arrel (ni arcsin ni arccos, si volem filar prim), i es tracta del producte de dues funcions elementals,

$\boxed{D[g] = \mathbb{R}}$, i serà derivable i contínua en tot el seu domini (com que no hi ha extrems d'intervals al domini, tots els punts són interiors.

3 ASIMPTOTES:

AV: ni denominadors ni log's en $g \Rightarrow \nexists$ candidats $\Rightarrow \boxed{\nexists \text{ AV's}}$

AH:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} xe^x = \infty \cdot e^{\infty} = \infty \cdot \infty = \infty \Rightarrow \boxed{\nexists \text{ AH.d}} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \left(-\infty\, e^{-\infty} = \dfrac{-\infty}{e^{\infty}} = \dfrac{-\infty}{\infty} \text{ IND}\right) = \end{cases}$$

preparem per a L'H

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} \underset{\frac{\infty}{e^{\infty}} = \frac{\infty}{\infty}:\ L'H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = -\frac{1}{e^{\infty}} = \boxed{0^-}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{y = 0 \text{ és AH.e}}$

AOd: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty \Rightarrow \boxed{\nexists \text{ AO}}$

llavors, per a gràfica en extrema dreta, recordarem només: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

4 EXTREMS i CR/DECR :

$\boxed{g'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)} = 0 \Rightarrow 1+x=0$

$\forall x,\ e^x \neq 0$

$\Rightarrow \boxed{x=-1}$ candidat

$g'(x)$ no té log's ni denoms $\Rightarrow \nexists$ disconts.

	$x<$	-1	$<x$
g':	$\ominus$	0	$\oplus$
g:	↘	◡	↗

$g'(0) = \oplus \cdot 1 = \oplus$

$g'(-11) = \oplus \cdot (-10) = \ominus$

$x=-1 \rightarrow y = g(-1) = -\frac{1}{e} \Rightarrow$

$\boxed{\text{mínim: } A\left(-1, -\frac{1}{e}\right)} \simeq (-1, -0'4)$

5 CURVATURA i INFLEXIÓ :

$\forall x,\ e^x \neq 0$

$\boxed{g''(x) = e^x + e^x + xe^x = e^x(2+x)} = 0 \Rightarrow 2+x=0$

$\Rightarrow \boxed{x=-2}$ candidat; g'' no té log's, denoms $\Rightarrow \nexists$ disconts.

	$x<$	-2	$<x$
g'':	$\ominus$	0	$\oplus$
g:	∩ cv	INF	∪ cc

$g''(0) = \oplus \cdot 2 = \oplus$

$g''(-12) = \oplus \cdot (-10) = \ominus$

$x=-2 \rightarrow y = g(-2) = -\frac{2}{e^2} \Rightarrow$

$\boxed{\text{P. INF: } B\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)} \simeq (-2, -0'3)$

6 PUNTS de TALL :

$x=0 \rightarrow y = g(0) = 0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0$

$\Rightarrow \boxed{C(0,0) \text{ tall } X, Y}$

$y=0 \rightarrow 0 = x \cdot e^x \Rightarrow \begin{cases} x=0 \ ✓ \\ e^x=0 : \text{no té solució.} \end{cases}$

7 REPRESENTACIÓ GRÀFICA:

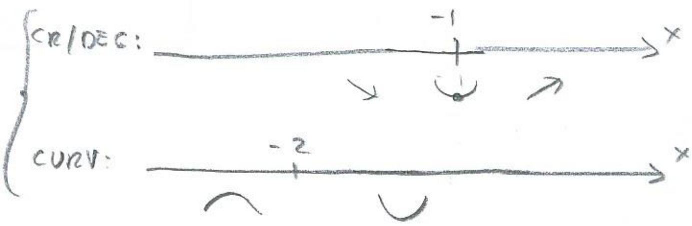
límit en $x \to +\infty$: $+\infty$

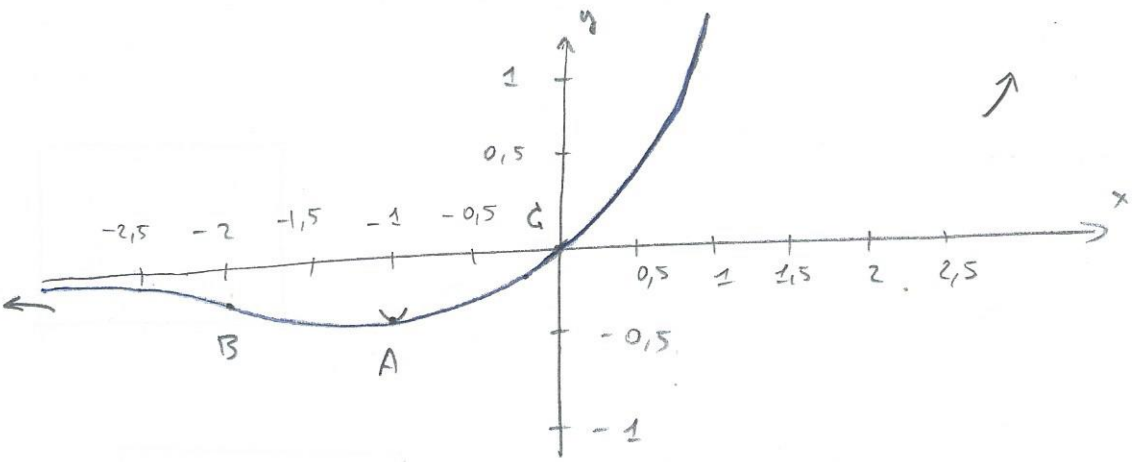
A $(-1, -0'4)$ min

B $(-2, -0'3)$ inf

C $(0, 0)$ tall X, Y

AH.e: $\boxed{y = 0}$ (eix X)





c/

$$h(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

1 SIMETRIES i PERIODICITAT:

$\boxed{h \text{ no és periòdica}}$;

$$h(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -h(x) \Longrightarrow \boxed{h \text{ és senar}}$$

2 DOMINI i CONTINUÏTAT:

punts a excloure

$$\text{denominador} = x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \left[x = \pm\sqrt{1} = \pm 1\right]$$

$$\Longrightarrow \boxed{D[h] = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)}$$

Per ser h una divisió de dos funcions polinòmiques, serà derivable (i per tant contínua) en tots els punts interiors del seu domini. Atès que $D[h]$ està format només per intervals oberts, tots els punts són interiors, d'on: $\boxed{h \text{ és contínua en tot } D[h]}$

3 ASÍMPTOTES:

AV: candidats ⇝ denom. = 0 ⟹ $x^2-1=0 \Rightarrow \boxed{x=\pm 1}$

dos candidats

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^3}{x^2-1} = \dfrac{(-1)^3}{0^+} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^3}{x^2-1} = \dfrac{(-1)^3}{0^-} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty \end{array}\right\}$$

$\boxed{\boxed{x=-1} \text{ és AV}}$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^3}{x^2-1} = \dfrac{1^3}{0^-} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3}{x^2-1} = \dfrac{1^3}{0^+} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{array}\right\}$$

$\boxed{\boxed{x=1} \text{ és AV}}$

AH: $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} (x) = \pm\infty$$

$\Rightarrow \boxed{\nexists \text{ AH's}}$

AO: $$\boxed{m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1}$$

$$\hookrightarrow n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(h(x) - mx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - \frac{x(x^2-1)}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{\cancel{x^3} \cancel{-x^3} + x}{x^2-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\pm\infty} = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{y = x}$ és AO a esquerra i a dreta

4 EXTREMS i CREIXEMENT / DECR:

$$h'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x^4-3x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2-3)=0$$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \to \boxed{x=0} \\ x^2-3=0 \to \boxed{x=\pm\sqrt{3}} \end{cases}$: tres candidats.

denom $=0 \Rightarrow \boxed{x=\pm 1}$: dos discont.

		-1,7		-1		0		1		1,7	
h':	+	0	−	∄	−	0	−	∄	−	0	+
h:	↗	∩	↘	∄	↘	?	↘	∄	↘	∪	↗

(aquesta part de la taula la omplint considerant que h senar)

$$h'(0,1) = \frac{0,0001 - 0,03}{+} = \frac{-}{+} = -$$

$$h'(1,1) = \frac{1,1^4 - 3\cdot 1,1^2}{+} = \frac{-2,1659}{+} = \frac{-}{+} = -$$

$$h'(10) = \frac{10000-300}{+} = \frac{+}{+} = +$$

$\Rightarrow \begin{cases} x = +\sqrt{3} \to y = \frac{\sqrt{27}}{3-1} = \sqrt{27}/2 \Rightarrow \text{mínim: } A\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{27}}{2}\right) \simeq (1'7, 2'6) \\ x = -\sqrt{3} \to y = (h \text{ senar}) = \frac{-\sqrt{27}}{2} \Rightarrow \text{màxim: } B\left(-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{27}}{2}\right) \simeq (-1'7, -2'6) \end{cases}$

5 CURVATURA i INFLEXIÓ :

$$\boxed{h''(x)} = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^{\cancel{2}\,1} - (x^4-3x^2)\cdot 2\,\cancel{(x^2-1)}\cdot 2x}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{\cancel{4x^5} - 4x^3 - 6x^3 \boxed{+6x} \cancel{-4x^5} + 12x^3}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \boxed{\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}} = 0$$

$\longrightarrow$ denom $= (x^2-1)^3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$ dues discont.

$\nexists \leftarrow$ si $x \neq \pm 1$

$$2x^3+6x = 0 \Rightarrow x(2x^2+6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \leftarrow 1 \text{ candidat} \\ 2x^2+6=0 \Rightarrow x^2 = -\frac{6}{2} = -3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-3} : \nexists \text{ solució} \end{cases}$$

		-1		0		1	
h'':	$\ominus$	$\nexists$	$\oplus$	0	$\ominus$	$\nexists$	$\oplus$
h:	$\cap$ cv	$\nexists$	$\cup$ cc	INF	$\cap$ cv	$\nexists$	$\cup$ cc

(regió $x<0$ la omplim tot considerant que h senar)

$$h''(10) = \frac{2000+60}{99^3} = \frac{\oplus}{\oplus} = \oplus$$

$$h''(0{,}1) = \frac{0{,}002+0{,}6}{(0{,}01-1)^3} = \frac{\oplus}{\ominus^3} = \frac{\oplus}{\ominus} = \ominus$$

$\Rightarrow x=0 \rightarrow y = h(0) = \frac{0}{0-1} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{C(0,0) \text{ és INF}}$

(com ocorre amb totes les funcions contínues senars)

NOTA: com que $h'(0)=0$, és P. INF "amb tangent horitzontal", estil [dibuix].

6 PUNTS de TALL:

$x=0 \rightarrow y=0 \Rightarrow \boxed{C(0,0) \text{ tall amb X, Y}}$

$y=0 \rightarrow \dfrac{x^3}{x^2-1}=0 \longrightarrow x^3=0 \rightarrow x=0$ ✓

$x \neq \pm 1$

7 REPRESENTACIÓ GRÀFICA:

mín: $A(1'7,\ 2'6)$

màx: $B(-1'7,\ -2'6)$

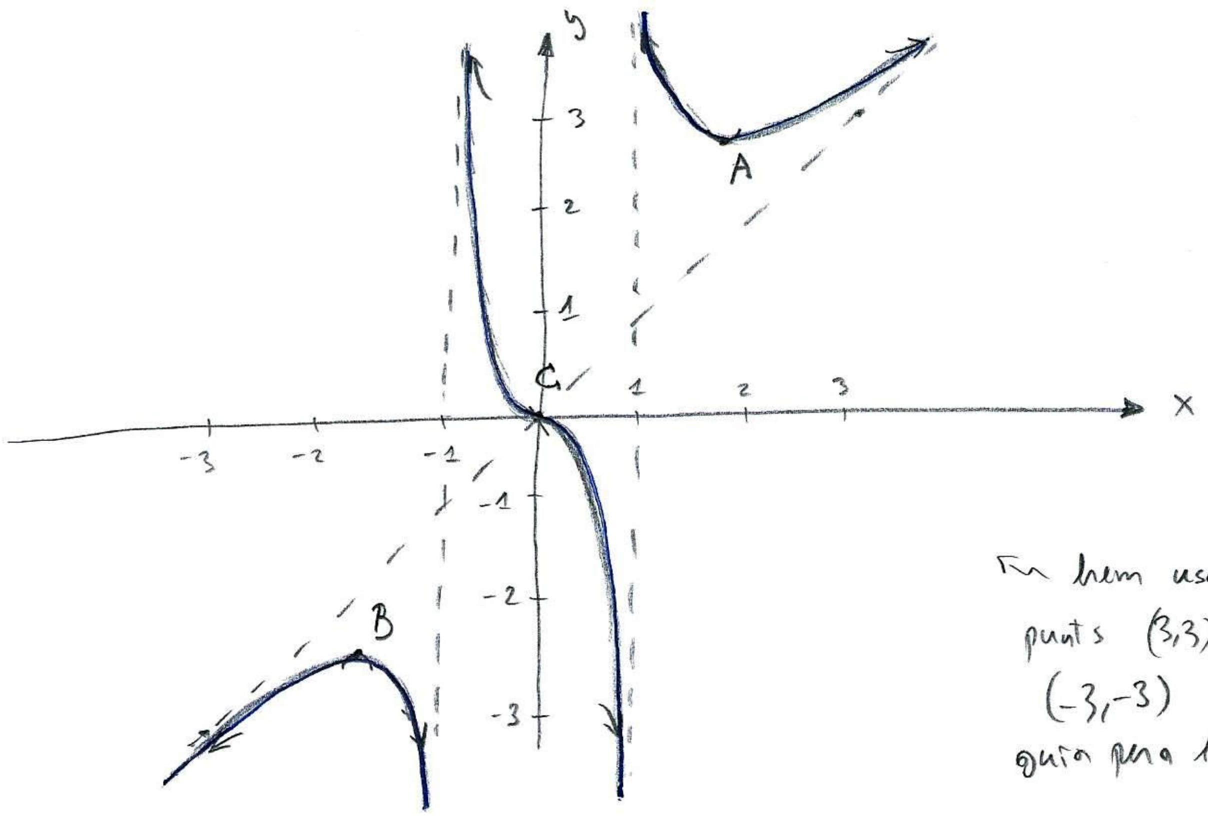
tall X, Y & INF: $C(0,0)$

AV: $\boxed{x=-1}$, $\boxed{x=+1}$ ambdues

AO: $\boxed{y=x}$ (bisectriu del 1r quadrant)

CR/DEC: $-1{,}7 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 1{,}7$

CURV: $-1 \quad 0 \quad 1$



Hem usat punts (3,3) i (-3,-3) com a guia per a l'AO.