I. E. S. JÚLIA MINGUELL 2n Batxillerat	dv, 29 de gener 2016
Matemàtiques — Avaluació Continuada 2.2 FUNCIONS: «Continuïtat i representació» (I)	Alumne: LLIURAMENT: dm, 2 de febrer 2016

Fes l'estudi (sense *domini*, *continuïtat*, *periodicitat* ni *simetries*) i representa:

$$f(x) = 1 - x - \frac{1}{x+1}$$

MÈTODE (ABREUJAT) per a representar funcions:

1.- ASÍMPTOTES:

AV: candidats són els valors d'x on: «$\text{denominador} = 0 \quad \text{ó} \quad \log 0$»;
—> hi fem límits laterals.

AH: dreta, si $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existeix i és finit; esquerra, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

AO: només si algun dels límits de les AH ens ha donat $\pm\infty$:

$r\colon\ y = mx + n$ és AOd si existeixen i són finits els límits:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$$

$s\colon\ y = Mx + N$ és AOe si existeixen i són finits els límits:

$$M = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$N = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - Mx)$$

2.- EXTREMS i TAULA CR/DECR:

Igual que amb polinomis, però ara les fronteres dels intervals de la taula no només són els candidats a extrem, sinó també els valors d'x que provoquin: «$\text{denominador} = 0 \quad \text{ó} \quad \log 0$» en 1a derivada $f'(x)$.

3.- INFLEXIONS i TAULA DE CURVATURA:

Igual que amb polinomis, però ara les fronteres dels intervals de la taula no només són els candidats a p. inf., sinó també els valors d'x que provoquin: «$\text{denominador} = 0 \quad \text{ó} \quad \log 0$» en 2a derivada $f''(x)$.

4.- PUNTS de TALL: x = 0 —> tall amb eix Y
y = 0 —> tall(s) amb eix X

5.- REPRESENTACIÓ GRÀFICA:

$\boxed{1r}$: Asímptotes i/o comportament en $\pm\infty$
(mirem taula CC/CV per a ficar les fletxetes)

$\boxed{2n}$: Extrems, talls, inflexions i més punts d'ajuda si cal
(mirem taula CR/DECR per a ficar els segments-guia)

$\boxed{3r}$: Traçat de la corba:
passant suaument pels punts i respectant curvatura.

$$\boxed{f(x) = \frac{3x^2+6x}{x-1}}$$

ESTUDI [abreujat] i REPRESENTACIÓ GRÀFICA. (EXEMPLE)

(sense: domini, continuïtat, simetries, periodicitat)

$\boxed{1}$ ASÍMPTOTES

AV: denom $=0 \rightarrow x-1=0 \rightarrow x=1$ candidat

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3x^2+6x}{x-1} = \dfrac{3+6}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3x^2+6x}{x-1} = \dfrac{3+6}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\boxed{x=1} \text{ és A.V.}}$$

AH:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2+6x}{x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2-6x}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\nexists \text{ AH.}}$$

AOd:

$$\boxed{m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x+6}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x} = 3}$$

$$\hookrightarrow \boxed{n = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+6x}{x-1} - 3x\right) =}$$

$$= (\infty - \infty \text{ IND}) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+6x-3x(x-1)}{x-1}\right) =$$

restem fraccions

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{3x^2}+6x\cancel{-3x^2}+3x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{9x}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{9x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} 9 = \boxed{9} \Rightarrow \boxed{r: y = 3x+9} \text{ és AOd}$$

AOe:

$$M = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x} = 3 = m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - Mx\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2+6x}{x-1} - 3x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{9x}{x-1} = 9 = n$$

⇒ per tant, $\boxed{\text{r també és AO es}}$

2 extrems i creixement : $\boxed{f(x)'} = \dfrac{(6x+6)(x-1)-(3x^2+6x)}{(x-1)^2} =$

$$= \frac{6x^2 - \cancel{6x} + \cancel{6x} - 6 - 3x^2 - 6x}{(x-1)^2} = \boxed{\frac{3x^2-6x-6}{(x-1)^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \; 3x^2 - 6x - 6 = 0 \;\underset{:3}{\Longrightarrow}\; x^2 - 2x - 2 = 0$$

(si $x \neq 1$)

$$\Rightarrow \boxed{x} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4\cdot 1\cdot 2}}{2} = \begin{cases} \oplus \; \boxed{1+\sqrt{3}} \simeq 2{,}7 \\ \ominus \; \boxed{1-\sqrt{3}} \simeq -0{,}7 \end{cases}$$

CANDIDATS a EXTREM

▶ Taula : les fronteres dels intervals són els candidats : els punts on $\boxed{\text{denom.} = 0}$, $\boxed{\log 0}$ en f' (en aquest cas: $x = 1$).

	$x <$	$-0{,}7$	$< x <$	1	$< x <$	$2{,}7$	$< x$
f' :	$\oplus$	0	$\ominus$	$\nexists$	$\ominus$	0	$\oplus$
f :	↗	∩	↘	$\nexists$	↘	∪	↗

$f'(-1) = \dfrac{3+6-6}{(\dots)^2}$ $\oplus$

$f'(0) = \dfrac{-6}{1}$ $\ominus$

$f'(10) = \dfrac{300-60-6}{(\dots)^2} = \oplus$

$f'(2) = \dfrac{3\cdot 4 - 6\cdot 4 - 6}{(\dots)^2} = \dfrac{\ominus}{\oplus} = \ominus$

⇒ extrems: $\begin{cases} f(1-\sqrt{3}) = 1{,}61 \; \Rightarrow \; \text{màxim } A(-0'7,\ 1'6) \\ f(1+\sqrt{3}) = 22{,}4 \; \Rightarrow \; \text{mínim } B(2'7,\ 22) \end{cases}$

3 inflexions i curvatura: $\boxed{f''(x) =}$

$$= \frac{(6x-6)(x-1)^{\cancel{2}} - (3x^2-6x-6)\,2\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{6x^2 \cancel{-6x} \cancel{-6x} + 6 - 6x^2 \cancel{+12x} + 12}{(x-1)^3} = \boxed{\frac{18}{(x-1)^3} = 0}$$

$\Rightarrow$ (si $x \neq 1$) $18 = 0$ no té solució !! $\rightsquigarrow$ $\nexists$ candidats a p. INF, i per tant $\boxed{\nexists \text{ p. INF.}}$

▶ **Taula**: les fronteres dels intervals són els candidats i els punts on $\boxed{\text{denom}=0}$, $\boxed{\log 0}$ en f'' (en aquest cas, $x = 1$):

	$x <$	1	$< x$
f'':	$-$	$\nexists$	$+$
f:	$\frown$	$\nexists$	$\smile$

$$f''(0) = \frac{18}{(-1)^3} = -$$

$$f''(2) = \frac{18}{1^3} = +$$

canvia curvatura encara que $\nexists$ p. INF, degut a una asímptota antisimètrica en $x = 1$ (una "discontinuïtat")

4 PUNTS de TALL:

$x = 0 \rightarrow y = f(0) = \frac{0}{-1} = 0 \Rightarrow \boxed{C(0,0)}$ tall amb X i Y.

$y = 0 \rightarrow \frac{3x^2+6x}{x-1} = 0 \xrightarrow{\text{si } x \neq 1} 3x^2 + 6x = 0 \rightarrow$

$\overset{\rightarrow}{\text{factoritzem } x}$ $x(3x+6)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 : C \text{, ja coneixiem} \\ x=-2 \Rightarrow \boxed{D(-2,0)} \text{ tall amb X.} \end{cases}$

$\boxed{5}$ REPRESENTACIÓ :

A $(-0'7, 1'6)$ màx

B $(2'7, 22)$ min

C $(0,0)$ tall

D $(-2,0)$

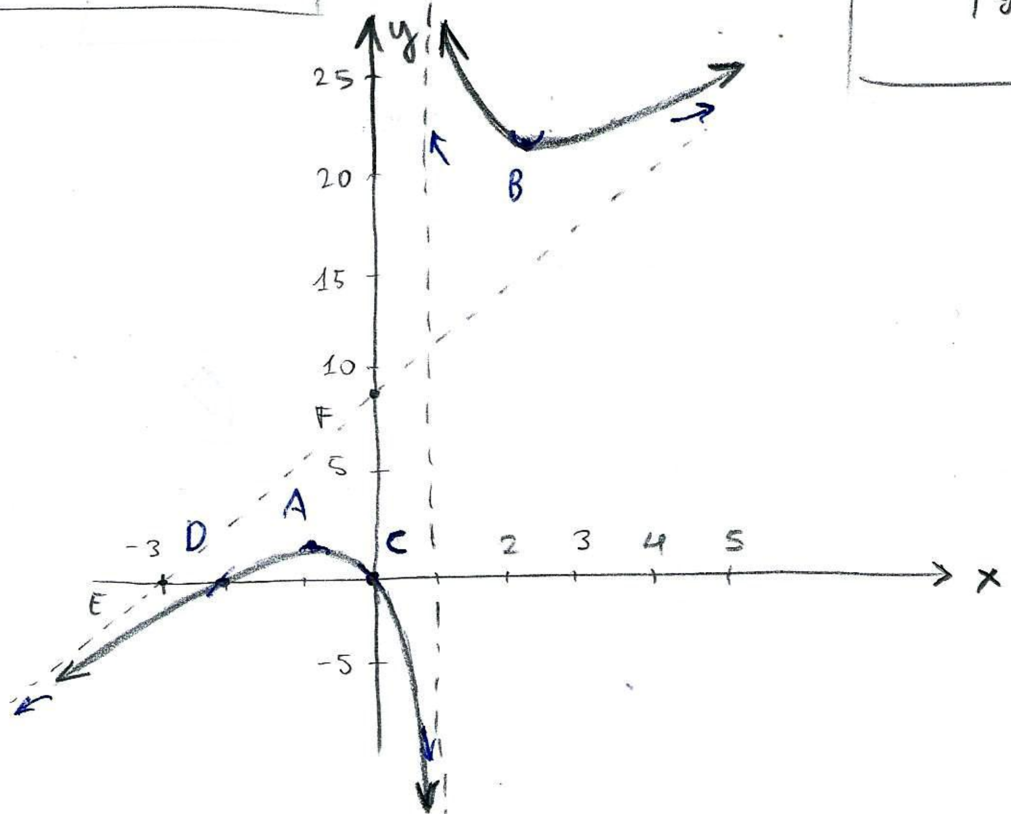
A.V.: $\boxed{x=1}$

A.O e/d : $\boxed{y = 3x+9}$ →

→ per a representació, punts de tall:

$x=0 \rightarrow E(0,9)$

$y=0 \rightarrow F(-3,0)$



NOTA: Hem seguit el següent ordre en la representació:

1r ASÍMPTOTES i/o comportament en $\pm\infty$ (mirant taula CC/CV per a ficar les fletxetes).

2n EXTREMS, TALLS i INFL. (mirant taula CR/DECR per a segments-guia).

3r TRAÇAT de la corba passant pels punts, respectant curvatura.