INS JÚLIA MINGUELL 2n Batxillerat	dv, 18 de març 2016
Matemàtiques — Tasca Continuada 4 «Matrius i Sistemes d'equacions lineals»	Alumne: LLIURAMENT: dm, 5 d'abril 2016

NOTA: cal justificar matemàticament tots els passos que feu. És a dir: si esteu calculant un producte de matrius, com a mínim ha d'haver-hi un pas intermedi, en el qual estiguin suficientment indicades totes les operacions que feu per a avaluar el producte; o si esteu aplicant Gauss, cal indicar amb la notació que hem vist a classe quines transformacions feu sobre la matriu, i escriure també el resultat de cadascuna d'aquestes operacions; etc. Els exercicis que no estiguin justificats així, encara que el resultat escrit sigui el correcte, no puntuaran.

ACTIVITATS

1. Classifica els següents sistemes d'equacions lineals. Quan el sistema sigui compatible, resol-lo. Si és compatible determinat, després comprova la solució.

a)

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = -1 \\ x + 2y = 3 \\ -x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 7x - 2y = -5 \\ 5x + 11y = -4 \\ 4x + 3y = -3 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 4x - y + 3z = -2 \\ 3x + 2y - 4z = 5 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x - y = 2 \\ x + 3y = -2 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} 2x + y + 9z - 2w = -5 \\ -2x + 2y - z + w = -3 \\ 7x + 2y + z - 2w = 9 \\ x + 3y + 2z + w = 5 \end{cases}$$

2. Operacions amb matrius i equacions matricials.

a) Comprova la següent propietat de la transposició de matrius:

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

Fes-ho amb les matrius següents, realitzant el càlcul indicat en el membre esquerre de l'equació, després l'indicat en el membre dret, i comprovant finalment que ambdós càlculs donen el mateix:

.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Sigui la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula el resultat de fer $(A + 2 \cdot I)^2$, sent-hi I la matriu identitat 2x2. (Nota: la segona potència d'una matriu quadrada M qualsevol es calcula així: $M^2 = M \cdot M$).

c) Sigui el següent sistema d'equacions, que anem a escriure amb llenguatge matricial:

$$\begin{cases} 3x - y = -100 \\ 4x + 2y = -100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 \\ -100 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

Resol el sistema multiplicant per l'esquerra amb la inversa la darrera equació matricial. Després, ves al sistema original amb la solució trobada i comprova-la.

d) Donades les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

troba una matriu X tal que $A \cdot B + X = C$.

e) Una matriu X, amb dues columnes, verifica $A \cdot X = B$, sent-hi:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Digues raonadament quantes files té X. Després, troba X sabent que la seva primera fila és $(1 \quad 0)$.

f) Siguin les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determina les matrius X i Y tals que $X - 2Y = A$ i $2X - Y = B$.

g) Sigui la matriu:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcula les seves potències M^2, M^3 i M^4.

h) Considera la mateixa matriu M de l'exercici anterior. Sense tornar a fer explícitament els càlculs de cap producte matricial, aprofita els resultats que has trobat en l'exercici anterior per a deduir quant val M^5. Calcula també M^6, M^8, M^{15} i M^{100}.

i) Si A i B són dues matrius $m \times m$, llavors sempre es compleix que:

$$\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Comprova-ho avaluant les tres expressions amb les matrius següents, i verificant que el resultat és sempre el mateix:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

j) Siguin A i B dues matrius $m \times m$ regulars (és a dir: invertibles, o, equivalentment, amb determinant diferent de zero). Llavors, el seu producte també serà una altra matriu $m \times m$ regular. (Això queda garantit amb la propietat que hem estudiat en l'exercici anterior). Podrem afirmar, a més a més, que també es verifica la següent propietat:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Comprova-ho avaluant ambdós membres de l'equació anterior amb les matrius següents, i verificant que el resultat és sempre el mateix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Problemes de matrius que depenen de paràmetres.

a) Esbrina per a quins valors del paràmetre k la matriu següent no té inversa (és a dir: has de trobar els valors del paràmetre que fan que el determinant sigui zero):

$$M(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 3 \\ 4 & 1 & -k \end{pmatrix}$$

b) Sigui la matriu $A = M(2)$, construïda fent $k = 2$ en l'exercici anterior, i les següents dues matrius columna:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Considera el sistema $AX = B$ i triangularitza la seva matriu ampliada $\overline{A}$ amb el mètode de Gauss. Quin rang té la matriu de coeficients A? És el rang més alt que pot tenir una matriu 3×3? Digues si és invertible la matriu A a partir de la resposta que has donat a l'exercici anterior. Finalment, classifica el sistema $AX = B$ amb el teorema de Rouché-Frobenius. Si és compatible, resol-lo.

c) Sigui la matriu $A = M(1)$, construïda fent $k = 1$ en l'exercici (3.a), i les següents dues matrius columna:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Considera el sistema $AX = B$ i triangularitza la seva matriu ampliada $\overline{A}$ amb el mètode de Gauss. Quin rang té la matriu de coeficients A? És el rang més alt que pot tenir una matriu 3×3? Digues si és invertible la matriu A a partir de la resposta que has donat a l'exercici (3.a). Finalment, classifica el sistema $AX = B$ amb el teorema de Rouché-Frobenius. Si és compatible, resol-lo.

d) Els sistemes $AX = B$ tals que tots els elements de la columna B són zeros reben el nom de sistemes "homogenis" (per exemple, el sistema de l'exercici anterior és homogeni). Considera el següent sistema homogeni:

$$\begin{pmatrix} 2k & 4k \\ 1 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad AX = B$$

Estudia per a quins valors del paràmetre k la matriu de coeficients A és invertible (o "regular"), i per a quins és no invertible.

e) Considera el sistema de l'exercici anterior si $k = 2$ i triangularitza la seva matriu ampliada. Quin rang té la matriu de coeficients A? Té rang màxim? És A invertible (consulta el que has contestat a l'exercici (3.d)? Si és invertible, resol el sistema amb el mètode de calcular la matriu inversa A^{-1} i multiplicar amb ella per l'esquerra. Altrament, resol el sistema a partir de la matriu ampliada triangularitzada.

f) Considera el sistema de l'exercici anterior si $k = -2$ i triangularitza la seva matriu ampliada. Quin rang té la matriu de coeficients A? Té rang màxim? És A invertible (consulta el que has contestat a l'exercici (3.d)? Si és invertible, resol el sistema amb el mètode de calcular la matriu inversa A^{-1} i multiplicar amb ella per l'esquerra. Altrament, resol el sistema a partir de la matriu ampliada triangularitzada.

g) Sigui $AX = B$ l'expressió matricial d'un sistema homogeni d' m equacions lineals i n incògnites. Pot ser aquest sistema incompatible? Per què? (Pista: imagina com quedaria la matriu ampliada després de completar la triangularització per Gauss).

h) Els sistemes com el de l'exercici anterior sempre tenen una solució, que rep el nom de "solució trivial" (o "impròpia"). Quina és aquesta solució per a qualsevol sistema homogeni?

4. Rangs de sistemes de vectors. Sistemes lliures i sistemes lligats:

i) Les matrius fila d' n components reben també el nom de **vectors**, i es diu que formen l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$. Habitualment escrivim els vectors amb una fletxeta per sobre: $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$.

ii) Sigui un conjunt S format per m vectors d' n components, $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_m\} \subset \mathbb{R}^n$. També en direm «un sistema d' m vectors d' $\mathbb{R}^n$». Definim el **rang r del sistema** S com el rang de la matriu construïda ficant els vectors d' S com a files. (Aquest rang, és clar, el calculem per Gauss).

iii) Un conjunt S d' m vectors d' $\mathbb{R}^n$ es diu que és un "**sistema lliure**" si el seu rang coincideix amb el número de vectors del sistema, $r = m$. Interpretació: cap vector pot ésser "mort" per la resta amb operacions del mètode de Gauss.

iv) Un conjunt S d' m vectors d' $\mathbb{R}^n$ es diu que és un "**sistema lligat**" si el seu rang és menor que el número de vectors del sistema, $r < m$. Interpretació: com a mínim hi ha un vector del sistema que podrà ésser "mort" per la resta aplicant les operacions del mètode de Gauss.

v) Cas particular: $S = \{\vec{v}, \vec{u}\} \subset \mathbb{R}^2$, és a dir: sistema format per dos vectors de dos components $(m = n = 2)$. N'interpretem el rang de la següent manera:

- $r = 1 \Rightarrow$ els vectors estan en la mateixa recta (són "paral·lels").
- $r = 2 \Rightarrow$ els vectors defineixen els costats d'un paral·lelogram. L'àrea d'aquest paral·lelogram és el valor absolut del determinant de la matriu formada agafant els vectors com a files. Direm que aquest conjunt de vectors S forma una **base de l'espai** $\mathbb{R}^2$.

vi) Cas particular: $S = \{\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\} \subset \mathbb{R}^3$, és a dir: sistema format per tres vectors de tres components $(m = n = 3)$. N'interpretem el rang de la següent manera:

- $r = 1 \Rightarrow$ els vectors estan en la mateixa recta (són "paral·lels").
- $r = 2 \Rightarrow$ els vectors estan en el mateix pla (són "coplanaris").
- $r = 3 \Rightarrow$ els vectors defineixen les arestes d'un paral·lelepípede. El volum d'aquest paral·lelepípede és el valor absolut del determinant de la matriu formada agafant els vectors com a files. Direm que aquest conjunt de vectors S forma una **base de l'espai** $\mathbb{R}^3$.

vii) Exercicis de rangs de sistemes de vectors: calcula el rang de cadascun dels següents sistemes de vectors, i digues si el sistema és lliure o lligat. Quan trobis una base d' $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$, calcula també l'àrea del paral·lelogram que defineixen (o el volum del paral·lelepípede, en $\mathbb{R}^3$).

a) $S = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

b) $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

c) $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, -1, 0)\}$

d) $S = \{(3, 0, 0), (0, 2, 0)\}$

e) $S = \{(3, 0), (0, 2)\}$

f) $S = \{(3, 0), (0, 2), (3, 2)\}$

g) $S = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\ (0, 0, 0, 1)\}$

h) $S = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$