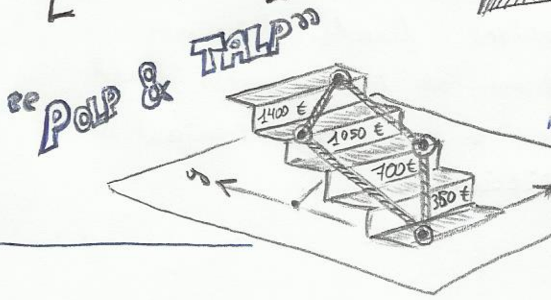
ESCOLA PIA SABADELL

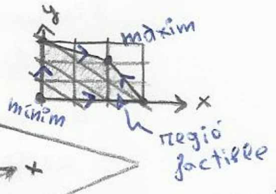
[29-març-14]

MATES - SOCI

2n BAT. RESUM:

- T.5 "Sistemes d'inequacions lineals"
- T.6 "Programació lineal"





$f(x,y) = 350x + 350y$ €

1.- SISTEMES D'INEQUACIONS LINEALS.

▶ Són com sistemes d'equacions lineals, és a dir, expressions de tipus $\boxed{ax + by = c}$, on en comptes d'un igual $\boxed{=}$ hi ha un signe de desigualtat o inequació: $\boxed{\leq}$ (també poden ser $\boxed{\geq}$, i fins i tot $\boxed{<}$ ó $\boxed{>}$, encara que aquests dos no solen sortir en problemes de la SELE).

És a dir: expressions de tipus $\boxed{ax + by \leq c}$. (1)

▶ Si tenim un sistema d'N inequacions, llavors, voldrà dir que tenim el següent conjunt d'expressions:

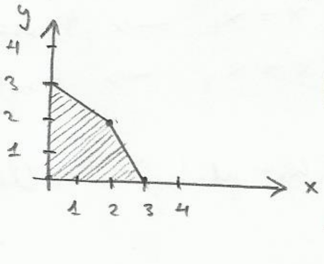
$$(2)\quad \boxed{\begin{cases} a_1 x + b_1 y \leq c_1 \\ a_2 x + b_2 y \leq c_2 \\ \dots \\ a_N x + b_N y \leq c_N \end{cases}}$$

Per exemple: En el problema de "POLP i TALP", el sistema d'inequacions era:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \frac{1}{2}x + y \leq 3 \\ 2) & 2x + y \leq 6 \\ 3) & x \geq 0 \\ 4) & y \geq 0 \end{array}\right\} (3)$$

▶ La solució d'un sistema d'inequacions no és una parella de valors (x,y) que representen un punt del pla: això passaria si fossin equacions. La solució és una regió del pla, anomenada "regió factible" (o "regió solució"), tal que les coordenades de qualsevol punt que pertany a aquesta regió verifiquen alhora totes les inequacions del sistema.

Exemple: en el problema de "POLP & TALP", aquesta era la regió de tots els punts que verificaven les ineqs. [3] ⟶



(4)

▶ MÈTODE per a trobar la regió factible (o "regió solució") d'un sistema d'inequacions lineals (en un problema de programació lineal direm "a partir d'un conjunt de restriccions").

1r Convertim les inequacions en equacions:

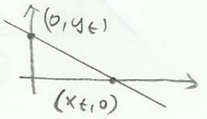
$$\left\{\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y \le c_1 \\ \dots \\ a_N x + b_N y \le c_N \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ \dots \\ a_N x + b_N y = c_N \end{array}\right. \quad (5)$$

2n Cadascuna de les equacions que hem trobat representa una recta: la dibuixem. Recordem algunes tècniques:

a) trobant els punts de tall:

$$\left\{\begin{array}{l} x=0 \rightarrow \text{trobem } y_t \rightarrow (0, y_t) \text{ és punt de tall amb } Y \\ y=0 \rightarrow \text{trobem } x_t \rightarrow (x_t, 0) \text{ és punt de tall amb } X \end{array}\right.$$

⇒ representem $(0, y_t)$ i $(x_t, 0)$ i els unim amb el regle:

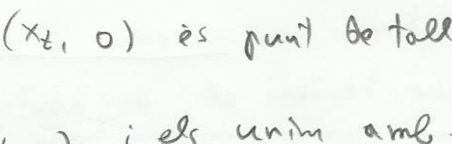


Exemple: en "POLP & TALP", amb la inequació o restricció de la benzina (la nº 1 en [3]), $\frac{1}{2}x + y \le 3$

⇒ fem l'equació: $\boxed{\frac{1}{2}x + y = 3}$; trobem els punts de tall:

$$\left\{\begin{array}{l} x=0 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot 0 + y = 3 \rightarrow y_t = 3 \rightarrow (0,3) \text{ tall amb } Y \\ y=0 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x + 0 = 3 \rightarrow x_t = 6 \rightarrow (6,0) \text{ tall amb } X \end{array}\right.$$

⇒ representem:



b) trobant dos punts qualsevol encara que no siguin els de tall:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 \rightarrow \text{trobem } y_1 \rightarrow \text{representem } (x_1, y_1) \\ x = x_2 \rightarrow \text{trobem } y_2 \rightarrow \text{representem } (x_2, y_2) \end{array}\right\} \rightarrow \text{unim amb regle}$$

c) el "pliki-pliki": aïllem la y, identifiquem el pendent m ↘

→ i a partir d'un punt qualsevol (x_0, y_0) n'avancem una i en pugem m ("en baixem", per a m negatives).

Exemple (POLB 1 TALP): ineq ① ⇒ $\frac{1}{2}x + y = 3$, aïllem y:

$y = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{m} x + \underbrace{3}_{n}$; sabem que n = 3 i per tant podem començar en l'eix Y a l'altura 3 (aquest és el significat de l'n, "ordenada en l'origen"):

ara unim amb el regle els punts inicial (I) i final (F) que hem trobat.

3r Esbrinem quina és la regió del pla "bona" per a cada recta (→ i la "ratllem").

De cadascuna de les rectes que hem dibuixat, només una regió ("per sobre" o "per sota") verificarà la corresponent inequació. Per a saber quina és la regió bona, el millor truc és substituir l'origen (0,0) en la ineq. i veure si se satisfà. És a dir, per exemple amb la ① de [2], faríem x=0 ; y=0 :

$$\underbrace{a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot y}_{0} \leq c_1$$

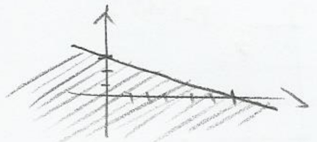
⇒ si $0 \leq c_1$ és veritat, ratllem el costat on està (0,0).
si $0 \leq c_1$ és fals, ratllem el contrari

Exemple (POLP & TALP):

La restricció (o "inequació") ① del sistema [3], que abans hem representat com a recta , tenia la forma $\frac{1}{2}x + y \le 3$ originalment. Hi substituïm l'origen (0,0):

$$\frac{1}{2}\cdot 0 + 0 \le 3 \Rightarrow 0 \le 3,$$

i com que el que hem trobat és veritat, ratllem la mateixa part on està l'origen (0,0) —que en aquest cas és "per sota"—:

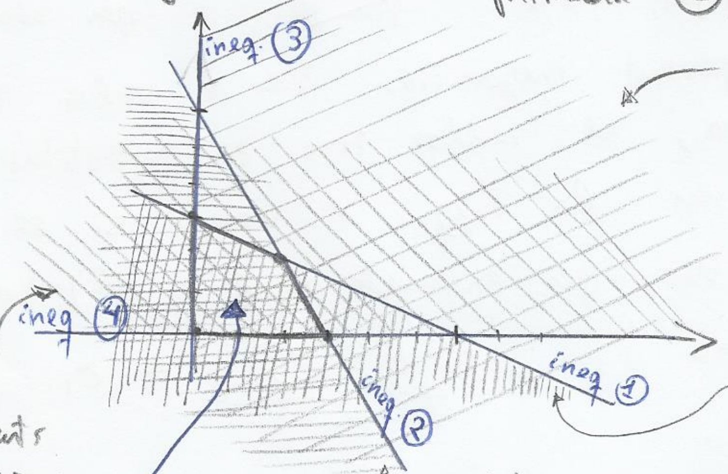
 .

(6)

4t La "regió solució" (o "regió factible") del nostre sistema d'N inequacions és la que, al final, té ratlles corresponents a les N restriccions (o "inequacions").

Exemple (POLP & TALP): després de fer amb les inequacions o restriccions ②, ③ i ④ de [3] el mateix que hem fet amb la primera ①, ens queda:

(7)



ratlles corresponents a ③ $x \ge 0$

ratlles corresponents a ① $\frac{1}{2}x + y \le 3$

ratlles corresponents a ④ $y \ge 0$

ratlles corresponents a ② $2x + y \le 6$

... concloem que aquesta regió amb forma d'estel és la regió solució del sistema.

ESCOLA PIA SABADELL

[29 - març - 14]

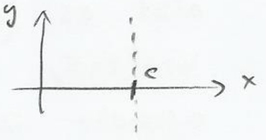
M2 - soci

RESUM: T.5 "Sistemes d'ineqs. lin."
T.6 "Programació lineal"

iii/viii

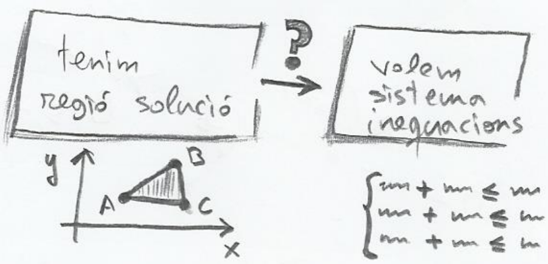
▶ Alguns COMENTARIS:

- Quan la inequació o restricció té la forma $x \geq c$ (o $x \leq c$) és una recta vertical i no ratllem "per sobre" o "per sota", sinó "a dreta" o "a esquerra".



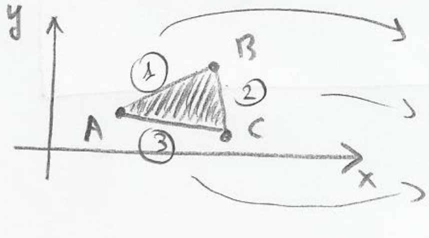
- En la pràctica, no és necessari ratllar les regions: n'hi ha prou amb tenir ben identificada quina restricció (ineq.) es correspon amb cada recta, i també si el costat bo per a cadascuna és "per sobre" o "per sota": la regió solució (o factible) serà la que ho satisfaci per a totes alhora.

2.- EL "PROBLEMA INVERS":



Quan un enunciat ens diu com és una regió solució del pla i ens demana esbrinar quines són les inequacions que el tenen com a solució, cal seguir el camí invers al que hem vist en el punt anterior:

1r a partir dels vèrtexs de la regió, esbrinem les equacions (explícites, millor!) de les rectes associades a cada costat.



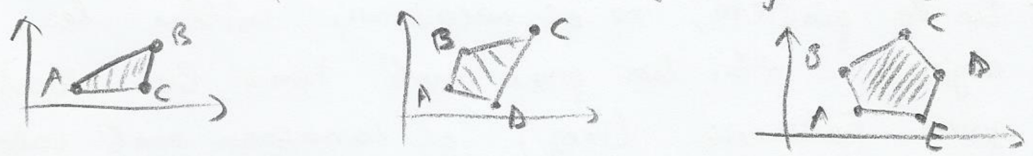
recta "AB": que passa per A i B; conté el costat ①.

recta "BC": passa per B i C; conté ②.

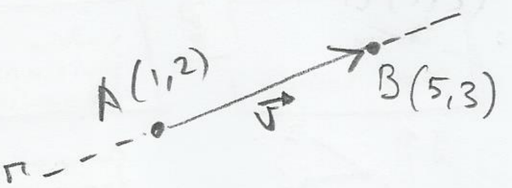
recta "AC": passa per A i C; conté ③.

• **COMENTARI**: de vegades, l'enunciat ens dóna només una representació gràfica de la regió, i d'aquesta gràfica haurem de deduir les coordenades dels vèrtexs.

En uns altres casos, ens dóna les coordenades dels vèrtexs directament, i nosaltres hem de deduir la forma que té la regió. Normalment això es fa per intuïció: hom representa els vèrtexs, uneix amb segments els més propers i apareix una figura poligonal plana (un triangle, un quadrilàter, un pentàgon ...).



La manera de trobar l'equació d'una recta que passa per dos punts no és única; com que volem l'explícita, podem per **exemple** fer-ho així:



$\boxed{\vec{v} = B - A} = (5-1, 3-2) = (4,1)$

$\boxed{m = \frac{v_2}{v_1}} = \frac{1}{4}$

$\boxed{y = mx + n} = \frac{1}{4}x + n \Rightarrow n$

trobem n substituint les coordenades d'A (o B) a l'equació explícita i aïllant.

$\Rightarrow \quad 2 = \frac{1}{4}\cdot 1 + n \Rightarrow \boxed{n = 2 - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}}$

coordenada x del punt A

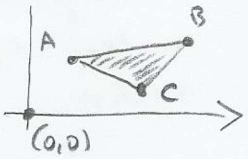
coordenada y del punt A

$\Rightarrow r: \boxed{y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}}$ (8)

2n A partir d'un punt que sapiguem si està o no en "el costat bo" de cada recta, escrivim cada inequació.

- **TÈCNICA**:

i) agafem el punt, de coordenades (x_0, y_0) – serà molt habitual agafar l'origen, $(0,0)$ –, i veiem si està en el costat bo de la recta que volem estudiar:



← si estudiem recta AB, el $(0,0)$ està en el costat "bo", doncs la regió ratllada està per sota d'AB (com $(0,0)$).

↖ si estudiem AC, el $(0,0)$ no està en el costat "bo", doncs la regió ratllada està per sobre d'AC – i $(0,0)$ està per sota –.

ii) agafem la eq. de la recta a estudiar, canviem l'igual per una caixeta buida, $\square$, i substituïm les coordenades (x_0, y_0):

eq. recta: $y = mx + n$ →

→ $y \ \square \ mx + n$ →

→ $y_0 \ \square \ mx_0 + n$. (9)

iii) comparant els números a dreta i esquerra de la caixeta, fiquem el que calgui: $\boxed{\leq}$ ó $\boxed{\geq}$.

$\underbrace{y_0}\ \square\ \underbrace{mx_0 + n} \Longrightarrow y_0 \ \boxed{\leq}\ mx_0 + n$ (10)

comparem → decidim ↑

iv) si en el pas (i) havíem vist que (x_0, y_0) estava en el costat bo, ho deixem com en [10]✓. Si estava en el "dolent", li "fem la contra":

$y_0 \ \boxed{\leq}\ mx_0 + n$

↓ ✓

$y_0 \ \boxed{\geq}\ mx_0 + n$ (11)

v) agafem el signe que hem trobat finalment en l'apartat (iv), i el fiquem en l'equació original: així hem trobat la corresponent inequació:

resultat del pas (iv):

$\boxed{\leq}$ ✓

(per exemple)

eq. original: $y = mx + n$

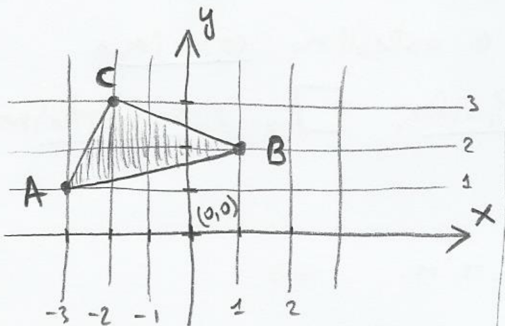
canviem $\boxed{=} \to \boxed{\leq}$

$$\boxed{y \leq mx + n} \quad (12)$$

↑ aquesta és una de les inequacions que volem trobar.

EXEMPLE de "PROBLEMA INVERS":

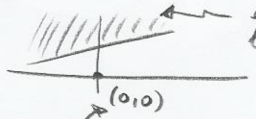
« Sigui el triangle de vèrtexs $A(-3,1)$, $B(1,2)$ i $C(-2,3)$. Troba el sistema d'inequacions lineals que el tenen com a solució »



AB: $m = \frac{1}{4}$; $2 = \frac{1}{4} \cdot 1 + n \Rightarrow \frac{8}{4} - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = n$

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}}$ (13) eq. de la recta que conté el costat AB.

Busquem ineq.:



el costat ho és "per sobre"

(0,0) està "per sota": li farem la contra:

$y \ \square \ \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$

$0 \ \boxed{\leq} \ \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{7}{4} = \frac{7}{4}$

$\boxed{\geq}$ ✓ $\Rightarrow$ Ineq. AB:

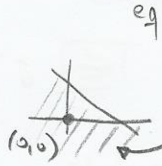
$$\boxed{y \geq \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}} \quad (14)$$

BC: $m = -\frac{1}{3}$; $3 = \underbrace{-\frac{1}{3} \cdot (-2)}_{9/3} + n =$

$= \frac{2}{3} + n \to \frac{7}{3} = n \to$ (15) $\boxed{y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}}$

eq. recta BC.

Ineq.?



per sota ✓ ; (0,0) hi és:

$y \ \square \ -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

$0 \ \boxed{\leq}$ ✓ $-\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{7}{3} = \frac{7}{3}$

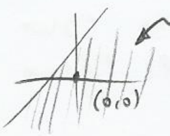
$\Rightarrow$ Ineq. BC:

$$\boxed{y \leq -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}} \quad (16)$$

CA: $m = 2$; $1 = 2 \cdot (-3) + n \Rightarrow n = 7$

$\Rightarrow \boxed{y = 2x + 7}$ (17)

Ineq.?



per sota ✓; (0,0) hi és:

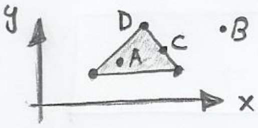
$y \ \square \ 2x + 7$

$0 \ \boxed{\leq}$ ✓ $2 \cdot 0 + 7 = 7 \Rightarrow$ Ineq. CA:

$$(18) \quad \boxed{y \leq 2x + 7}$$

3.- TIPUS de PUNTS: exteriors, interiors, de vora i vèrtexs.

(→ o "de costat")



(19)

▶ Sigui una regió del pla definida com la solució (o "regió factible") d'un sistema d'inequacions. Un punt del pla $P(x_0, y_0)$ es classifica respecte d'aquesta regió segons verifiqui o no les inequacions, i si les verifica amb $\boxed{\geq}$ / $\boxed{\leq}$ o amb $\boxed{=}$.

Heus aquí les quatre possibilitats: (exemples a la figura [19])

(20)

- $P(x_0, y_0)$ no verifica alguna/nes ineq.: punt exterior (B)
- $P(x_0, y_0)$ les verifica totes, però cap amb $\boxed{=}$: punt interior (A)
- $P(x_0, y_0)$ " " ", i només una amb $\boxed{=}$: punt de vora (C)
- $P(x_0, y_0)$ " " ", i dues amb $\boxed{=}$: vèrtex (D)

Exemple: en la pàg. anterior hem trobat que les següents inequacions tenien com a solució el triangle que donava l'enunciat:

$$\begin{cases} y \geq \frac{1}{4}x + \frac{7}{4} & ① \\ y \leq -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} & ② \\ y \leq 2x + 7 & ③ \end{cases}$$

(nota: els vèrtexs ja els coneixem; per exemple, evidentment (1,2) verifica ①, ② i ③, i amb $\boxed{=}$ les ① i ②)

- El punt (0,2) és interior: les verifica totes sense $\boxed{=}$: $\begin{cases} ①: & 2 \geq \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{7}{4} = \frac{7}{4} \checkmark \\ ②: & 2 \leq 0 + 7/3 = 7/3 \checkmark \\ ③: & 2 \leq 0 + 7 = 7 \checkmark \end{cases}$
- El punt (2,2) és exterior: no verifica la ②: $\hookrightarrow 2 \not\leq -\frac{2}{3} + \frac{7}{3} = 5/3$
- El punt (-2'5, 2) és de la vora AC: verifica sense $\boxed{=}$ les $\begin{cases} ①: & 2 \geq \frac{1}{4}\cdot(-2'5) + 7/4 = 1'125 \checkmark \\ ②: & 2 \leq -\frac{1}{3}(-2'5) + 7/3 = 3'16 \checkmark \end{cases}$ i amb $\boxed{=}$ la ③: $2 \leq 2\cdot(-2'5)+7 = 2$.

4.- FUNCIONS OBJECTIU : màxims i mínims.

Sigui una funció lineal de dues variables, és a dir, una funció amb la forma:

(21) $$\boxed{b = f(x,y) = ax + by},$$ (sent-hi $a, b \in \mathbb{R}$)

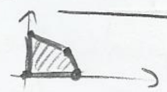
que rebrà el nom de "funció objectiu".

Sovint es plantegen problemes on una funció objectiu donada està sotmesa a unes restriccions, definides per un sistema d'inequacions lineals:

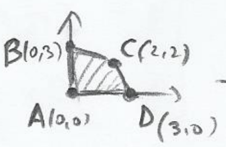
(22) $$\left\{\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y \le c_1 \\ \quad \dots \\ a_n x + b_n y \le c_2 \end{array}\right\},$$ i l'enunciat demana trobar quin punt compatible amb aquestes inequacions fa màxim (o mínim) el valor de $f(x,y)$.

Això és un problema d'optimització del valor de la $f(x,y)$, i es resol així:

1r trobem la regió factible definida pel sistema d'ineqs. (o restrics.) [21].



2n trobem les coordenades de tots els seus vèrtexs.



← això comportarà resoldre sistemes d'equacions formats per les rectes associades als costats que es toquen en cada vèrtex:

3r fem una taula amb els valors de f(x,y) per a cada vèrtex

vèrtex	$b = f(x,y)$
A (0,0)	0 €
B (0, 3)	1040 €
C (2,2)	1400 €
D (3,0)	1040 €

(23)

máxim: C ✓
mínim: A

4t apliquem el "teorema de localització" (a.k.a. de l' «UNCLE PEPSON & his CREW»)

Aquest teorema ens diu que:

a) si la regió solució (o "factible") ès acotada -ès a dir: no infinita, triem d'entre tots els vèrtexs quin tè el valor més gran de f(x,y) ⟹ aquest vèrtex és la solució del problema, ès a dir: es correspon amb el màxim de f(x,y) en tota la regió factible.

(Si buscàvem el mínim, es fa buscant el vèrtex amb el valor f(x,y) més petit).

b) excepció 1a: si hi ha dos vèrtex amb igual valor i aquest ès el màxim, llavors la solució són tots els punts del costat que els uneix, ells dos inclosos.

(Anàlogament si busquem mínim).

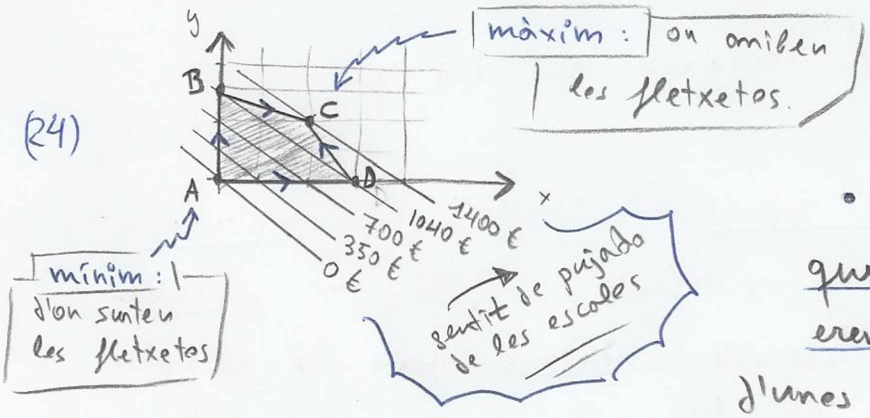
c) excepció 2a: si la regió solució (o "factible") ès no acotada, pot no existir la solució → (o sigui, infinita:)

↳ de màxim i/o de mínim.

5. TÈCNICA per a REGIONS FACTIBLES NO ACOTADES: «orientació de les arestes»

• Recordem que, per a entendre millor els problemes amb regions factibles acotades, com ara el de POLP : TALP, representàvem unes paral·leles que unien punts amb el mateix valor de la $f(x,y)$:

(24)

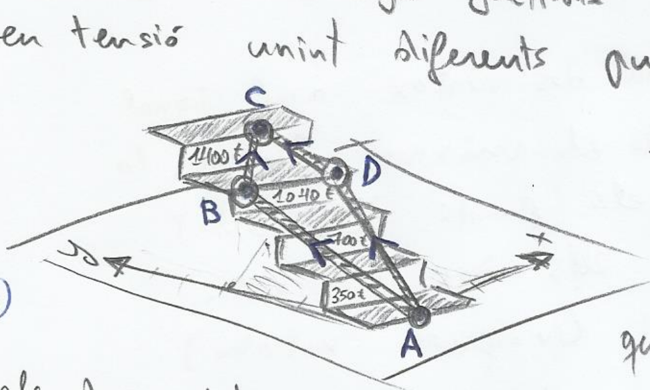


• Després imaginàvem que aquestes paral·leles eren els esglaons d'unes escales imaginàries, que pujàvem segons augmenta el valor d'$f(x,y)$ —o baixàvem segons disminueix—.

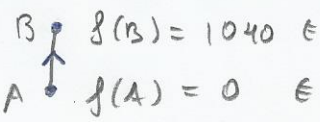
• Així, pujant les escales arribàvem al vèrtex solució si busquem "màxim", i baixant-les arribàvem al mínim.

• També ens imaginàvem les arestes (o "vores" o "costats") de la regió factible com unes cordes en tensió unint diferents punts de l'escala:

(25)



→ i amb aquesta imatge orientàvem aquestes arestes amb una fletxeta que indicava, considerant els dos vèrtexs als extrems de cada vora, cap a l'extrem on major era la $f(x,y)$:

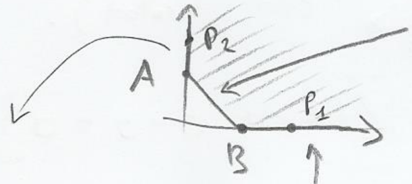


▶ TÈCNICA d'orientació d'arestes amb REG. FACT. no acotades:

Quant tenim un problema d'optimització d'una funció objectiu $f(x,y)$ — trobar el màxim/mínim de $f(x,y)$ sotmesa a unes restriccions o inequacions — i la regió factible és "no acotada" (o sigui infinita:), orientem les arestes per a saber si hi ha solució de mínim i/o màxim:

1r trobem els vèrtexs i calculem $f(x,y)$ en ells

2n en les arestes de la regió factible que només toquin un vèrtex, perquè per un dels costats siguin infinites, triem un altre punt auxiliar en l'aresta que ens ajudarà a orientar-la, i calculem el valor de $f(x,y)$ en aquests punts auxiliars.



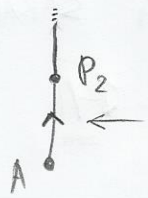
aresta "finita": té dos extrems: calculem $f(A)$ i $f(B)$

aresta "infinita" → P_2 serà el punt aux. → calculem $f(P_2)$.

aresta "infinita": per la dreta no s'acaba mai. → triem un punt auxiliar arbitrari, P_1 → calculem $f(P_1)$.

3r Orientem les arestes amb fletxetes que indiquen del vèrtex amb menor valor de $f(x,y)$ al vèrtex amb valor de $f(x,y)$ més gran. Amb les arestes infinites, →

↳ usem els punts auxiliars per a orientar.



si $f(P_2) > f(A)$

4t Apliquem el teorema usant la orientació de les arestes:

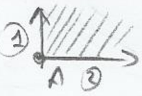
- <u>mínim</u>: un vèrtex d'on surten les fletxetes de les arestes.
- <u>màxim</u>: un vèrtex on arriben les fletxetes de les arestes.
- si una aresta infinita té la fletxeta indicant cap a l'infinit, <u>no hi ha màxim</u>.
- si una aresta infinita té la fletxeta venint de l'infinit, <u>no hi ha mínim</u>.

<u>NOTA</u>: les dues últimes poden donar-se alhora.

<u>**Exemple**</u>: « $f(x,y) = x + y$ sotmesa a $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

¿ punt on f és màxim? ¿ i mínim? »

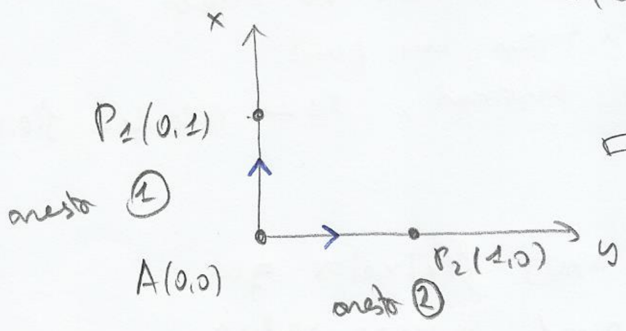
<u>Regió factible</u>: el 1r quadrant



(no acotat).

L'únic vèrtex és l'$A(0,0)$, i $\boxed{f(A) = 0+0 = 0}$.

Per a orientar les arestes elegim (arbitràriament) els punts auxiliars $P_1(0,1)$ i $P_2(1,0)$:



$$\Rightarrow \begin{cases} f(P_1) = 0 + 1 = 1 > 0 = f(A) \\ f(P_2) = 1 + 0 = 1 > 0 = f(A) \end{cases}$$

orientem:

orientem:

ESCOLA PIA SABADELL

29 - març - 14

M2 - Soci

RESUM:

T.5 "Stmes. d'inegs. lin"

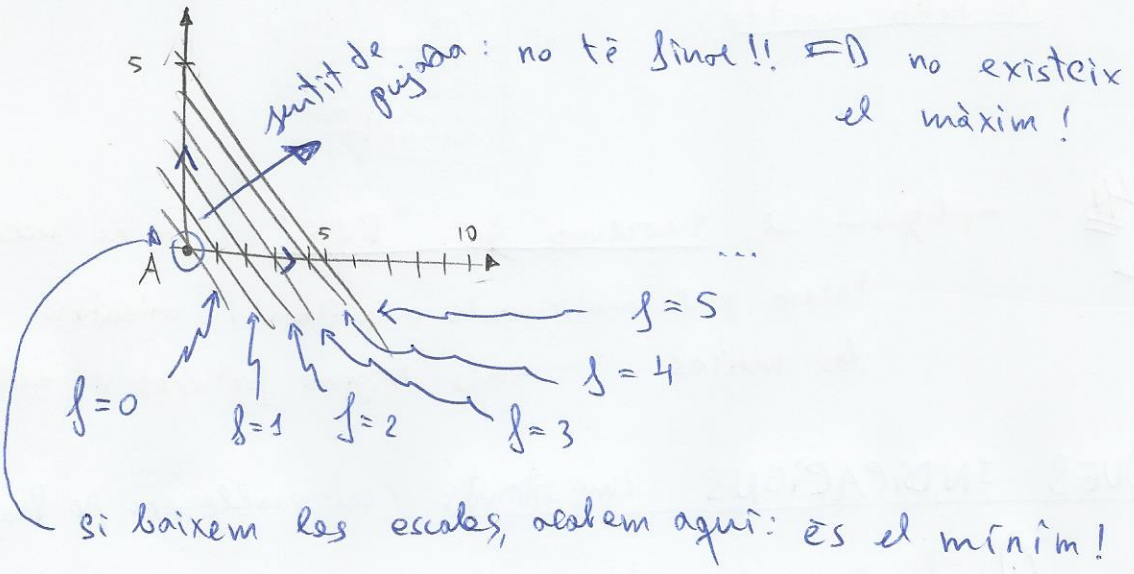
T.6 "Programació lineal"

WSWXT'14

viii / viii

▷ Per tant, el vèrtex A és la solució de "mínim" (les fletxetes de les arestes surten d'ell), i en aquest problema no existeix solució de "màxim": les dues arestes tenen fletxetes que "se'n van a l'infinit".

Podem entendre-ho millor si representem les paral·leles per als valors 0, 1, 2, 3, 4, 5 ... de $f(x,y)$:



6.- PROBLEMES de "PROGRAMACIÓ LINEAL".

Son problemes on l'enunciat planteja una funció a optimitzar (trobar les condicions on té el seu valor màxim o mínim, depenent del cas) sota unes condicions o restriccions, de manera que la funció a optimitzar te la forma

(26) $\boxed{f(x,y) = ax + by}$ (funció lineal de dues variables),

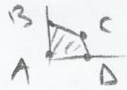
«funció objectiu»

i les restriccions tenen la forma: $\left.\begin{cases} a_1 x + b_1 y \leq c_1 \\ \dots \\ a_N x + b_N y \leq c_N \end{cases}\right\}$ (27)

(sistema d'N inequacions lineals amb dues incògnites).

Es resolen aplicant les tècniques anteriors:

1r: trobem la regió factible, o regió solució del sistema [27]. 

2n: trobem els seus vèrtexs. 

3r: trobem el valor de la funció objectiu [26] en cada vèrtex.

vèrtex	$f(x,y)$
A(–,–)	—
B(–,–)	—
C(–,–)	—
D(–,–)	—

4t: apliquem el teorema de "P&C" [si és necessari, triem punts addicionals auxiliars i orientem les arestes – amb regions factibles no acotades –].

▶ DUES INDICACIONS importants en problemes de Progr. lin.:

i) Els enunciats solen explicar les restriccions primer, i ens diuen (implícitament) quina és la funció objectiu i de quines dues quantitats depèn al final, amb una pregunta de l'estil:

> « ¿quantes unitats de "x" i quina quantitat de "y" ens permetrà assolir un valor màxim [o mínim] de "b"? »

⇒ ràpidament, identifiquem $b = f(x,y)$ com la nostra funció objectiu.
Després, tornem a llegir l'enunciat i prenem nota de les restriccions. (Podem fer una taula).

ii) Sovint, hem d'incloure les restriccions: $\boxed{\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}}$, encara que l'enunciat no les digui ("no podem anar un nombre negatiu de vegades a un poble", etc).