ESCOLA PIA SABADELL

[29 - març - 14]

M2 - soci

PROBLEMES T5 & T6
{"Stmes inegs. lin"
{"Progr. lin"

WSWRt'14

i / vi

PROBLEMES inclosos:

- Exemple 5 pàg. 123 ("problema de la dieta").
- Activitats pàg. 113 (de la SELE).

▷ Exemple 5 p. 123 "PROBLEMA de la DIETA":

Hem de donar a les vaques un mínim de 30 unitats de "pinso A" i 20 units. "pinso B".

Existeix el producte P_1, que inclou 4 units de pinso A i 2 de B, i val 2,50 € cada bossa.

També el producte P_2: 5 units A, 5 del B, 3,25 € cada bossa.

Quina quantitat de P_1 i P_2 hem de comprar perquè el cost de la dieta sigui mínim? } (*)

RESOLUCIÓ:

1/ Com sempre, identifiquem què és la f. objectiu, i de quines dues coses depèn, mirant la pregunta amb què acaba l'enunciat:

[*] ⟹ cost: c, depèn de P_1 i P_2, volem
$P_1 \to x$, $P_2 \to y$

que sigui mínim → funció objectiu: $c = \boxed{f(x,y) = 2{,}5x + 3{,}25y}$ (1)

2/ Ara ordenem tota la resta de info. en forma de taula i trobarem les restriccions (stma. inegs.) ↘

	bosses "P_1" x	bosses "P_2" y	mínim en la dieta:	restriccions
Pinso A	4	5	30	$4x+5y\geq 30$ (1)
Pinso B	2	5	20	$2x+5y\geq 20$ (2)
preu:	2,5	3,25	f. objectiu: $\boxed{f(x,y) = 2{,}5x + 3{,}25y}$ ("minimitzar")	

ADDICIONALS:

$x \geq 0$ (3)

$y \geq 0$ (4)

3/ Recordem que poden haver-n'hi restriccions addicionals:

- no té sentit comprar nombre negatiu de paquets P_1 $\rightarrow x\geq 0$
- el mateix per a P_2 $\rightarrow y \geq 0$

les incloem!

4/ Busquem regió factible:

(i) Ineqs → (ii) Eqs. (rectes) → (iii) Representem les rectes

(1) → $4x+5y=30$ → $\begin{cases} x=0 \rightarrow y=\frac{30}{5}=6 \rightarrow (0,6) \\ y=0 \rightarrow x = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} = 7{,}5 \rightarrow (7'5, 0)\end{cases}$

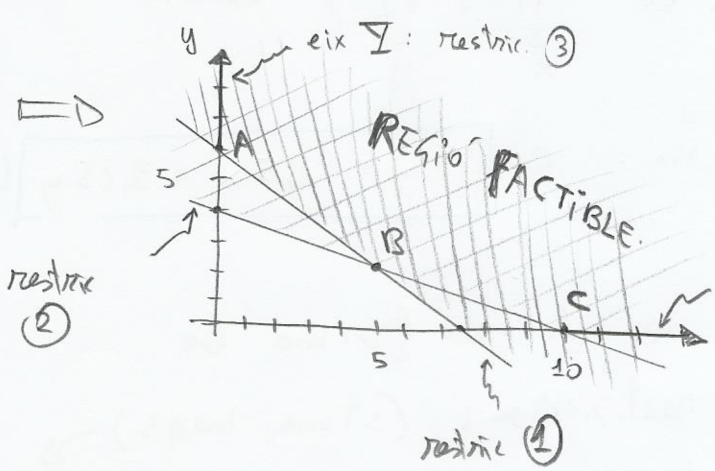
(2) → $2x+5y=20$ → $\begin{cases} x=0 \rightarrow y=\frac{20}{5}=4 \rightarrow (0,4) \\ y=0 \rightarrow x = \frac{20}{2} = 10 \rightarrow (10, 0)\end{cases}$

(3) → $x=0$

(4) → $y=0$

són els eixos! → ratllarem el 1r quadrant

(iv) provant amb el (0,0) trobem el "costat bo" de cada recta



(1): (0,0) està "per sota":

$\underbrace{4\cdot 0 + 5\cdot 0}_{0} \geq 30$ FALS!

ratllem per sobre.

(2) (0,0) "per sota" → $\underbrace{2\cdot 0 + 5 \cdot 0}_{0} \geq 20$ FALS!!

ratllem per sobre.

ESCOLA PIA SABADELL [29-març-14]

M2-soci

PROBLEMES T.5 & T.6

ii / ue

5/ Trobem els vèrtexs de la Reg. Fact.: a la figura els hem anomenat A (0,6), B i C (10,0).

No coneixem les coordenades de **B**: les trobem com a solució del sistema d'equacions

$$\begin{cases} ① \; 4x + 5y = 30 \\ ② \; 2x + 5y = 20 \end{cases}$$

(doncs són les corresponents a les rectes dels costats que es junten en B):

⇒ Restem a ① l'eq. ② multiplicada per 2:

$$[4x + 5y = 30] - 2 \cdot [2x + 5y = 20] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 - 5y = 30 - 40 = -10 \Rightarrow$$

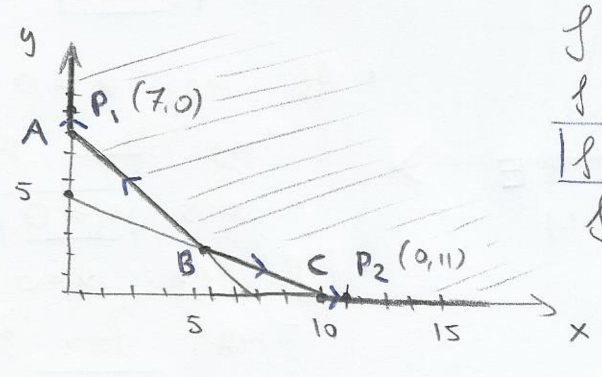
$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{-10}{-5} = 2} \xrightarrow{①} 4x + \underbrace{5 \cdot 2}_{10} = 30$$

$$\rightarrow \boxed{x = \frac{30 - 10}{4} = \frac{20}{4} = 5}$$

$$\Rightarrow \boxed{B(5,2)}$$

6/ Com que és una regió factible infinita, orientarem les arestes per a esbrinar la solució.

Per a orientar les dues arestes que van a infinit per un costat, farem servir dos punts auxiliars:



$f(P_1) = 3{,}25 \cdot 7 = 22{,}75$ €

$f(A) = 3{,}25 \cdot 6 = 19{,}5$ €

$f(B) = 2{,}5 \cdot 5 + 3{,}25 \cdot 2 = \underline{19}$ € / mínim!!

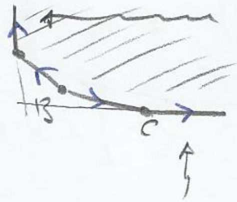
$f(C) = 2{,}5 \cdot 10 = 25$ €

$f(P_2) = 2{,}5 \cdot 11 = 27{,}5$ €

7/ Veiem, doncs, que les arestes "pugen" des de $B(5,2)$, que serà el mínim desitjat: $\boxed{\text{5 bosses de producte } P_1 \text{ i 2 de producte } P_2\text{, amb un cost (mínim) de } 19\ €}$.

SOLUCIÓ

Comentari: si ens preguntessin màxim, la resposta és que no existeix, com veiem de l'orientació de les dues arestes que no toquen B:



avançant cap allà ↑, el cost creix sense límit

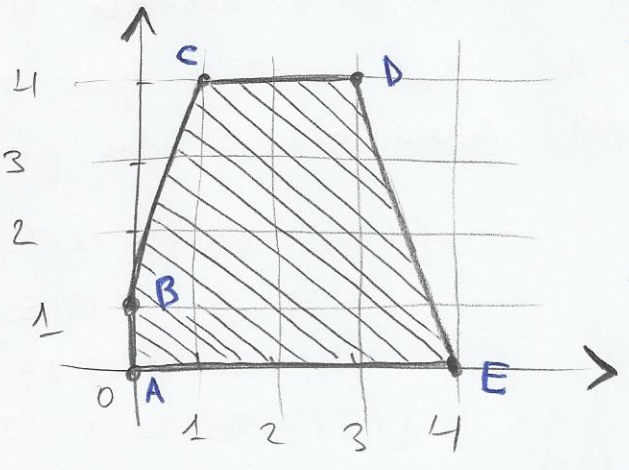
avançant cap allà →, el cost creix sense límit

$\Rightarrow$ no hi ha màxim.

p.113

① Escriu sistema de ~~quatre~~ cinc ineqüacions (amb dues variables x i y) que determini la següent regió ratllada.

⚠ cinc ⚠ ← és una errada: 5 costats $\Rightarrow$ 5 ineqs. !!



- $\underline{CD}$: eq: $y = 4$

  Ineq: "per sota"

  $\Rightarrow \boxed{y \leq 4}$

- $\underline{AE}$: eq: $y = 0$

  Ineq: "per sobre"

  $\Rightarrow \boxed{y \geq 0}$

- $\underline{AB}$: eq: $x = 0$

  Ineq: "dreta"

  $\Rightarrow \boxed{x \geq 0}$

ESCOLA PIA SABADELL [29-març-14]

M2 - soci

PROBLEMES T.5 & T.6

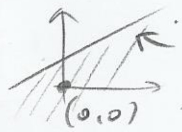
WSWR414

iii / vi

• **BC**: $\boxed{m = \frac{3}{1}}$; $\boxed{\underbrace{1 = \frac{3}{1}\cdot 0}_{(B)} + n = n}$ ⇒ $\boxed{y = 3x + 1}$

$\left.\begin{array}{l} B(0,1) \\ C(1,4) \end{array}\right\} \to m = \frac{4-1}{1-0}$

ja ho podíem veure a la figura

Ineq: 

"per sota": (0,0) hi és:

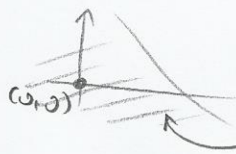
$y \;\square\; 3x+1$

$0 \;\boxed{\leq}\; 3\cdot 0 + 1 = 1$

⇒ Ineq.: $\boxed{y \leq 3x+1}$

• **DE**: $m = -4$; $\underbrace{0 = -4\cdot 4}_{(E)} + n \Rightarrow n = 16 \Rightarrow \boxed{y = -4x+16}$

$\left.\begin{array}{l} D(3,4) \\ E(4,0) \end{array}\right\} \to m = \frac{4-0}{3-4} = -4.$

Ineq: 

"per sota": (0,0) hi és.

$y \;\square\; -4x+16$

$0 \;\boxed{\leq}\; -4\cdot 0 + 16 = 16$

⇒ Ineq.: $\boxed{y \leq -4x+16}$

Per tant, la resposta és:

$$\boxed{\begin{cases} y \leq 4 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \leq 3x+1 \\ y \leq -4x+16 \end{cases}}$$

▷ 2 p.113

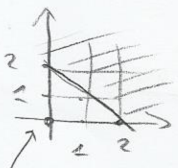
a) Representa gràficament la regió de solucions del sistema:

$$\begin{cases} x \leq 4 & (1) \\ x+y \geq 2 & (2) \\ x-2y+4 \geq 0 & (3) \end{cases}$$

(1) $\rightarrow$ a esquerra de $x=4$

(2) $\rightarrow$ $y = -x + 2$ ← punt de tall Y

$m=-1$: n'avanço 1, en baixo 1:



(0,0) "per sota":

$\underbrace{0+0}_{0} \geq 2 \Rightarrow$ FALS!!

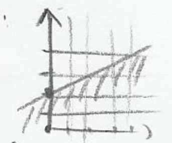
↓

ratllem per sobre.

(3) ↙

$y = \frac{1}{2}x + 2$ ← punt tall Y

$m=1$: n'avanço 1, en pujo 1/2:



(0,0) "per sota":

$\underbrace{0-2\cdot 0+4}_{4} \geq 0 \Rightarrow$ CERT!!

↓

ratllem per sota.

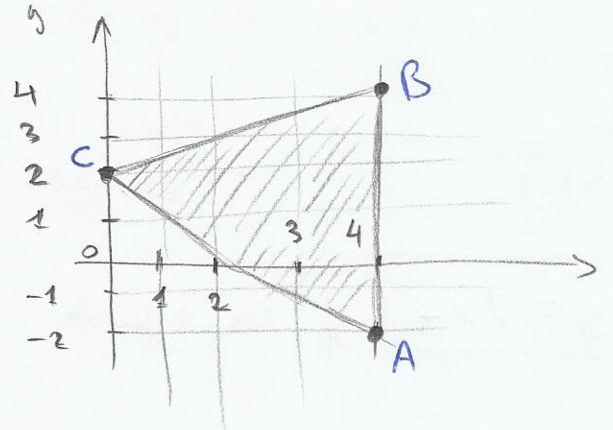
- Tot plegat: trobem els vèrtexs analíticament abans de fer el dibuix per dues raons: perquè els necessitarem en l'apartat (b), i perquè així serà més fàcil fer el dibuix:

(1) $x=4$
(2) $x+y=2$ $\rightarrow 4+y=2 \rightarrow y=-2 \Rightarrow$ $\boxed{A(4,-2)}$

(1) $x=4$
(3) $x-2y+4=0$ $\rightarrow 4-2y+4=0 \rightarrow 8=2y \rightarrow y=4$
$\Rightarrow$ $\boxed{B(4,4)}$

(2) $x+y=2 \rightarrow x=2-y$
(3) $x-2y+4=0$ $\rightarrow 2-y-2y+4=0 \rightarrow$

$\rightarrow 6-3y=0 \rightarrow y=\frac{6}{3}=2 \rightarrow$
$\rightarrow x=2-y=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{C(0,2)}$



b) Mínim de $F(x,y) = x - 2y$ en la regió que has trobat?

↓

fem taula amb els valors de F en els vèrtexs:

vèrtex	$F(x,y) = x-2y$
A (4,-2)	$4 - 2\cdot(-2) = 8$
B (4,4)	$4 - 2\cdot 4 = -4$
C (0,2)	$0 - 2\cdot 2 = -4$

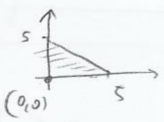
→ Apliquem el f^mn^ de "Pepson & his Crew":

en regions acotades  com la nostra (no infinites), si dos vèrtexs comparteixen valor i és el mínim, vol dir que tota l'aresta entre ells és la solució.

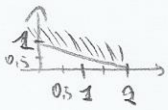
FD ⇱ El mínim de la funció donada s'assoleix, en aquesta regió, en tots els punts del segment que té els punts B(4,4) i C(0,2) per extrems i el valor d'aquest mínim és $F = -4$ »

3 p. 113 Dibuixa la regió determinada per:

$$\left.\begin{array}{ll} ① & x+y\le 5 \\ ② & -x+y\le 1 \\ ③ & x+2y\ge 2 \\ ④ & y\ge 0 \end{array}\right\}$$

$\rightarrow y=-x+5$  $0+0\le 5$ ✓ ⟹ per sota.

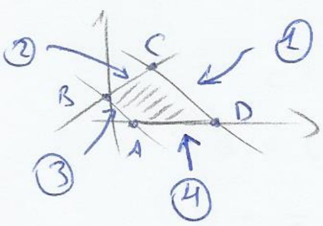
$\rightarrow y=x+1$  $0+0\le 1$ ✓ ⟹ per sota.

$\rightarrow y=-\frac{1}{2}x+1$  $0+0\ge 2$ FALS! ⟹ per sobre.

$\rightarrow$ 

i calcula el màxim de $\boxed{f(x,y)=2x+2y}$ en aquesta regió.

De l'anàlisi fet, veiem que la regió serà de tipus:



(aproximadament).

⟹ d'aquí deduïm la parella d'eqs. que hem de resoldre per a trobar cada vèrtex:

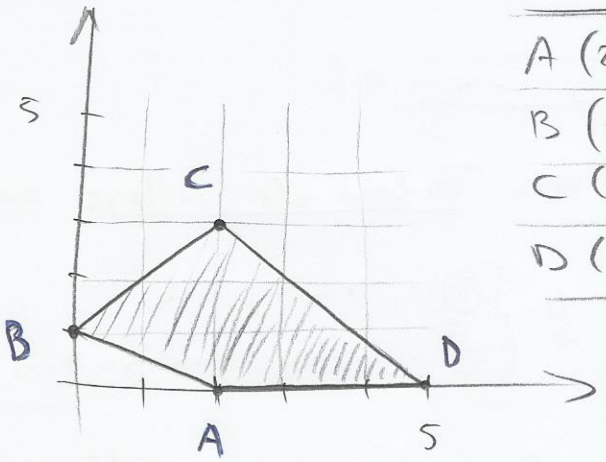
A: $\begin{cases} ③: & x+2y=2 \\ ④: & y=0 \end{cases} \rightarrow x+2\cdot 0=2 \rightarrow x=2 \Rightarrow \boxed{A(2,0)}$

B: $\begin{cases} ③: & x+2y=2 \\ ②: & -x+y=1 \rightarrow x=y-1 \end{cases}$ $\rightarrow y-1+2y=2 \rightarrow 3y=3 \rightarrow \boxed{y=1}$ $\rightarrow x=1-1=0 \Rightarrow \boxed{B(0,1)}$

C: $\begin{cases} ②: & -x+y=1 \rightarrow x=y-1 \\ ①: & x+y=5 \end{cases}$ $\rightarrow \boxed{x=3-1=2}$ $\rightarrow y-1+y=5 \rightarrow 2y=6 \rightarrow \boxed{y=3}$ $\Rightarrow \boxed{C(2,3)}$

D: $\begin{cases} ①: & x+y=5 \rightarrow \boxed{x=5} \\ ④: & \boxed{y=0} \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(5,0)}$

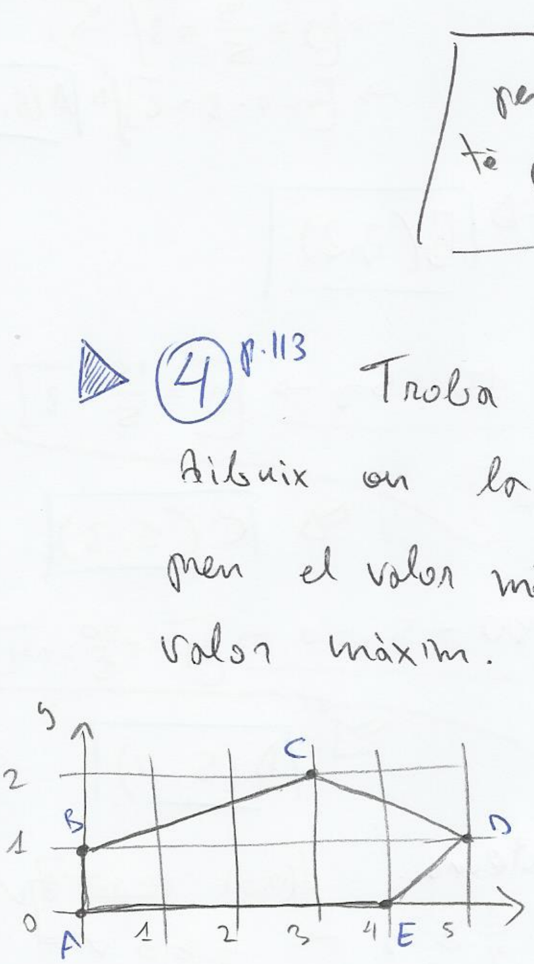
Representem i calculem $f(x,y)$ per a cada vèrtex:



vèrtex	$f(x,y) = 2x + 2y$
A (2,0)	$2\cdot 2 + 2\cdot 0 = 4$
B (0,1)	$2\cdot 0 + 2\cdot 1 = 2$
C (2,3)	$2\cdot 2 + 2\cdot 3 = 10$
D (5,0)	$2\cdot 5 + 2\cdot 0 = 10$

« El màxim de $f(x,y)$ en la regió proposada és $f = 10$, i s'assoleix per a tots els punts del segment que té per extrems els punts C (2,3) i D (5,0) »

▶ (4) p.113 Troba tots els punts de la regió del dibuix on la funció $\boxed{F(x,y) = 2x + 4y + 5}$ pren el valor màxim i digues quin és aquest valor màxim.



vèrtex	$F(x,y)$
A (0,0)	5
B (0,1)	$4 + 5 = 9$
C (3,2)	$6 + 8 + 5 = 19$
D (5,1)	$10 + 4 + 5 = 19$
E (4,0)	$8 + 5 = 13$

NOTA: la $F(x,y)$ que tenim no és, estrictament, de la forma $ax + by$, però $2x + 4y$ sí que ho és, i si $2x + 4y$ és màxima en un conjunt de punts, $2x + 4y + 5$ també ho serà, i per tant sí s'aplica el teorema.

$\Rightarrow$ $F_{màx} = 19$, i s'assoleix en tots els punts del segment que té per extrems C (3,2) i D (5,1)

▷ 5 p.113 Consitera

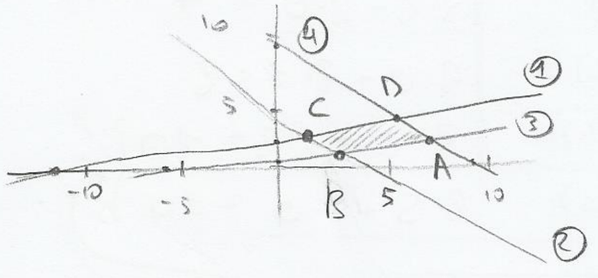
① $x-4y \geq -11$ → $\begin{cases} x=0 \to y=\frac{11}{4}=2'75 \\ y=0 \to x=-11 \end{cases}$ $\boxed{\begin{matrix}(0,\ 2'75)\\(-11,0)\end{matrix}}$

② $x+y \geq 4$ → $\boxed{y=-x+4}$

③ $x-4y \leq -6$ → $\begin{cases} x=0 \to y=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1'5 \\ y=0 \to x=-6 \end{cases}$ $\boxed{\begin{matrix}(0,\ 1'5)\\(-6,0)\end{matrix}}$

④ $x+y \leq 9$ → $\boxed{y=-x+9}$

... dibuixem aprox.:



⇒ Trobem els vèrtexs analíticament:

A: $\begin{cases} ③: & x-4y=-6 \\ ④: & x+y=9 \to x=9-y \end{cases}$ →

$\to 9-y-4y=-6 \to 15=5y \to$

$\to \boxed{y=\frac{15}{5}=3} \to$

$\to \boxed{x=9-3=6} \Rightarrow \boxed{A(6,3)}$

B: $\begin{cases} ② & x+y=4 \to x=4-y \\ ③ & x-4y=-6 \to 4-y-4y=-6 \to \end{cases}$ $\to \boxed{x=4-2=2}$

$\to 10=5y \to \boxed{y=\frac{10}{5}=2}$ $\Rightarrow \boxed{B(2,2)}$

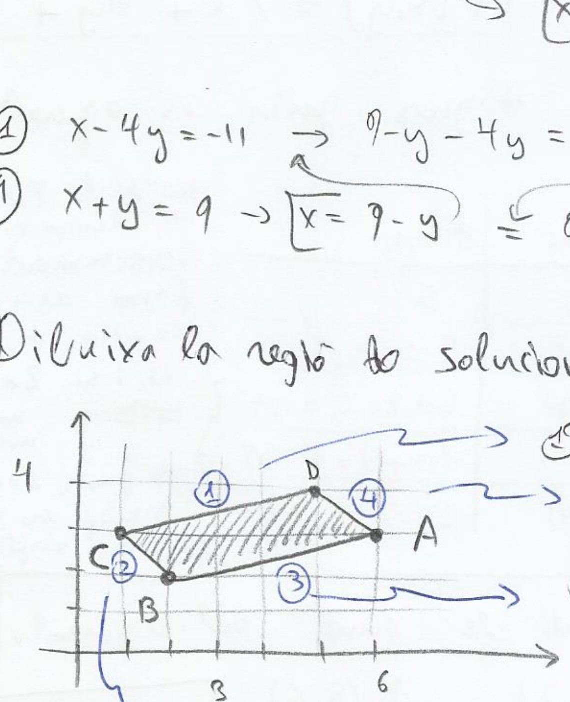
C: ① $x-4y=-11 \to 4-y-4y=-11 \to 15=5y \to \boxed{y=\frac{15}{5}=3}$

② $x+y=4 \to x=4-y \to \boxed{x=4-3=1}$ $\Rightarrow \boxed{C(1,3)}$

D: ① $x-4y=-11 \to 9-y-4y=-11 \to 20-5y=0 \to \boxed{y=+\frac{20}{5}=+4}$

④ $x+y=9 \to \boxed{x=9-y} = 9-4=5$ $\Rightarrow \boxed{D(5,4)}$

a) Dibuixa la regió de solucions del sistema.



①: $(x+11)\frac{1}{4} \geq y \to \frac{11}{4} \geq 0$ ✓ [(0,0) "per sota"]

④: $y \leq -x+9 \to 0 \leq 0+9$ ✓ "per sota"

③: $\frac{(x+6)}{4} \leq y \to \frac{6}{4} \leq 0$ FALS!

(0,0) "per sota" ⇒ "per sobre"

②: $0+0 \geq 4$ FALS!! → "per sobre".

E. Pià S.

[29-març-14]

M2 - soci

PROBLEMES T.5 & T.6

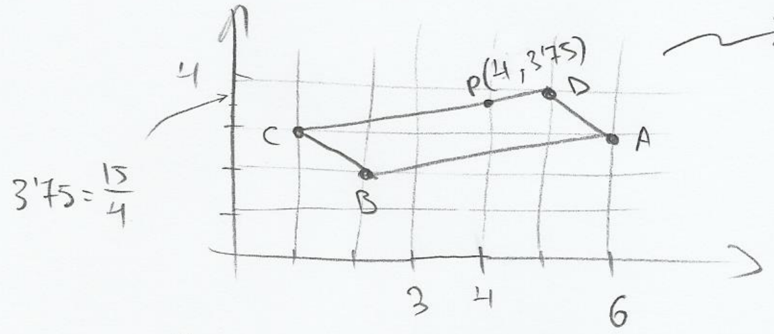
WSH8t'14

Vi/vi

---

e) Una funció objectiu $f(x,y) = ax + by + c$ pren el valor mínim en aquesta regió en el punt $\left(4, \frac{15}{4}\right)$. Digues si també pren el valor mínim en altres punts de la regió i, si és així, determina'ls.

Representem el punt que ens donen en la gràfica amb la regió factible:



Veiem que $P(4, 3'75)$, el punt que ens donen, pertany a l'aresta que té per extrems C i D.

Segons el teorema de "P & C", quan el valor mínim (o màxim) d'un problema amb regió factible acotada (no infinita) no es troba en un vèrtex, és que es troba en tots els punts d'una aresta. Per tant, concloem que aquest és el nostre cas, i conseqüentment podem afirmar que

$\boxed{\text{el valor mínim de } f(x,y) \text{ en la nostra regió es troba en tots els punts del segment que té per extrems als punts } C(1,3) \text{ i } D(5,4).}$