I. E. S. JÚLIA MINGUELL 2n Batxillerat	dj, 3 de març 2016	Nota (*sobre 10*)
Matemàtiques Model d'examen 3: «Integrals»	Alumne: nº MÀXIM DE PUNTS: vuit (8)	

1. INTEGRALS INDEFINIDES

Recordatori important: aquesta pregunta (1) val tres punts, valent-n'hi mig cadascun dels seus apartats (a), (b), (c), (d), (e) i (f).

Anomenant *N1* a la nota total (sobre tres punts) obtinguda en aquesta pregunta (1), i *NC* a la nota total (sobre dos punts) obtinguda en l'avaluació continuada del tema 3, la seva suma *S* = *N1* + *NC* té un valor màxim de cinc punts.

Tal i com es va avisar durant les classes, per a aprovar el tema 3 serà condició necessària que aquesta suma *S* de la nota en la pregunta 1 d'examen i la nota en la continuada del tema sigui superior o igual a 2,5 punts (és a dir: al 50% del màxim possible).

1.a) $\int A\sin(Mt+N)\,dt$

1.b) $\int \frac{x^5-6+\sqrt[4]{x^7}}{3x}\,dx$

1.c) $\int \frac{14x^2}{\sqrt{2+2x^3}}\,dx$

1.d) $\int \arcsin x\,dx$

1.e) $\int \sin^2 x\,dx$

1.f) $\int \frac{\ln(3-x)}{6-2x}\,dx$

[*3 punts: 0,5 per cada integral*]

2. Siguin la funció $f(x)=\ln x$ i la recta $r\colon\ x=k$, amb $k>1$.

2.a) Fes un esbós del recinte tancat entre la gràfica d' f, la recta r i l'eix d'abscisses.

.

2.b) Calcula el valor del paràmetre k que fa que l'àrea d'aquest recinte sigui igual a 1.

[*2 punts: 1 per cada apartat*]

(continua en pàgina següent)

3. Sigui la funció $f(x) = \cos x$. Volem estudiar les regions compreses entre la gràfica d' f i l'eix d'abscisses en l'interval $x \epsilon [0, 7]$.

3.a) Fes-ne un esbós.

3.b) Calcula el valor de l'àrea total d'aquestes regions.

NOTA: recorda que si interpretem l' x de les funcions circulars com un angle, aquest angle hauria d'estar expressat en radiants.

[*2 punts: 1 per cada apartat*]

4. Un objecte fa un desplaçament de 6 m al llarg de l'eix X. Durant aquest desplaçament hi actua la força $\vec{\mathrm{F}}$, paral·lela a l'eix. L'única component no nul·la d' $\vec{\mathrm{F}}$ té el següent valor, expressat en N, en funció de la posició:

$$F(x) = \begin{cases} 4x^3 & x \in [0, 2) \text{ m} \\ 32 & x \in [2, 4) \text{ m} \\ -16x + 96 & x \in [4, 6] \text{ m} \end{cases}$$

Calcula el treball que fa aquesta força al llarg de tot el trajecte.

NOTA: recorda que

$$W_F^{A \to B} = \int_{x_A}^{x_B} F(x)dx$$

.

[*1 punt*]

(resolució)

1 INTEGRALS INDEFINIDES

1.a/ $\int A\sin(Mt+N)\,dt = -\frac{A}{M}\int\left(-M\sin(Mt+N)\right)dt =$

$$= \boxed{-\frac{A}{M}\cos(Mt+N)+k}$$

1.b/ $\int \frac{x^5-6+\sqrt[4]{x^7}}{3x}dx = \int\left(\frac{x^5}{3x}-\frac{6}{3}\frac{1}{x}+\frac{x^{7/4}}{3x}\right)dx =$

$$= \int\left(\frac{1}{3}x^4-\frac{6}{3}\frac{1}{x}+\frac{1}{3}x^{\frac{7}{4}-1}\right)dx = \frac{1}{3}\frac{1}{5}x^5-\frac{6}{3}\ln|x| +$$

$$+\frac{1}{3}\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}+1-1}+k = \boxed{\frac{1}{3}\left(\frac{x^5}{5}-6\ln|x|+\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7}\right)+k}$$

1.c/ $\int\frac{14x^2}{\sqrt{2+2x^3}}dx = \frac{14}{6}\int \underbrace{6x^2}_{u'}\cdot(\underbrace{2+2x^3}_{u})^{-1/2}dx =$

$$= \frac{14}{6}\cdot 2\cdot(2+2x^3)^{\underbrace{-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}_{=1/2}}+k = \boxed{\frac{14}{3}\sqrt{2+2x^3}+k}$$

1.d/ $\int \arcsin x\,dx = \left\| \begin{array}{l} u=\arcsin x \to u'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v'=1 \longrightarrow v=x \end{array}\right\| =$

$$= x\arcsin x - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x+\frac{1}{2}\int(-2x)\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= x\arcsin x+\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\cdot(1-x^2)^{\underbrace{-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}_{=1/2}}+k = \boxed{x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+k}$$

1.e/ $\boxed{\underbrace{\int \sin^2 x \, dx}_{=J}} = \left\| \begin{matrix} u = \sin x \rightarrow u' = \cos x \\ v' = \sin x \rightarrow v = -\cos x \end{matrix} \right\| =$

$= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx = (*)$

(... si tornem a integrar per parts, ens surt $+\int \sin^2 x \, dx$ i no podem aplicar recursivitat (només si el prefactor és diferent d'u). Aleshores, transformem l'integrand fent ús de $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$)

$(*) = -\sin x \cos x + \int dx - \underbrace{\int \sin^2 x \, dx}_{=J} \Rightarrow \underbrace{J + J}_{2J} = -\sin x \cos x + \int dx$

passem J sumant al primer membre

$\Rightarrow J = \frac{1}{2}\left(-\sin x \cos x + \int dx\right) \Rightarrow \boxed{\int \sin^2 x \, dx = -\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{x}{2} + k}$ //

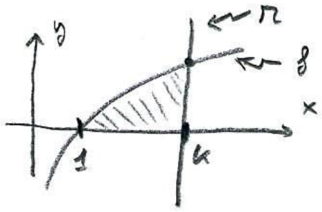
1.f/ $\int \frac{\ln(3-x)}{6-2x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-1}{3-x} \ln(3-x) \, dx =$

$= -\frac{1}{2} \int [\ln(3-x)]' \ln(3-x) \, dx = \boxed{-\frac{1}{4} \ln^2(3-x) + k}$ //

$\left(\int u' \cdot u \, dx = \int u' \cdot u^1 dx = \frac{u^{1+1}}{1+1} + k \right)$

$\boxed{2}$ $f(x) = \ln x \qquad r: x = k, \qquad k > 1$

2.a/



$x \ln x - \underbrace{\int \frac{1}{x} x \, dx}_{= x + k}$

2.b/ $\boxed{1} = \int_1^k \ln x \, dx = \left\| \begin{matrix} u = \ln x \rightarrow u' = 1/x \\ v' = 1 \rightarrow v = x \end{matrix} \right\| = \left[x \ln x - x \right]_1^k =$

$= \boxed{\underbrace{(k \ln k - k)}_{k(\ln k - 1)} - (1 \underbrace{\ln 1}_{0} - 1)} \Rightarrow k(\ln k - 1) = 0 \Rightarrow \boxed{k = e}$ //

$\begin{cases} k = 0 \text{ no és } > 1 \\ \ln k - 1 = 0 \rightarrow \ln k = 1 \rightarrow k = e^1 = e \end{cases}$

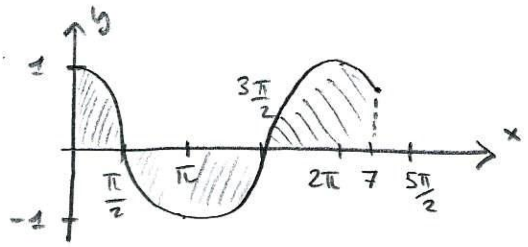
(resolució)

3

$f(x) = \cos x \qquad I = (0, 7)$

3.a/ Els primers extrems i talls del cosinus tenen lloc en $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = \frac{3\pi}{2}$,

$x = 2\pi \simeq 6{,}28 \qquad x = \frac{5\pi}{2} \simeq 7{,}85$ ← aquest ja no cal considerar-lo



3.b/

$$\boxed{A} = \left|\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx\right| + \left|\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x \, dx\right| + \left|\int_{3\pi/2}^{7} \cos x \, dx\right| =$$

$$= \left|\big[\sin x\big]_0^{\pi/2}\right| + \left|\big[\sin x\big]_{\pi/2}^{3\pi/2}\right| + \left|\big[\sin x\big]_{3\pi/2}^{7}\right| =$$

$$= \left|\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} - 0\right| + \left|\underbrace{\sin\frac{3\pi}{2}}_{-1} - \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}\right| + \left|\sin 7 - \underbrace{\sin\frac{3\pi}{2}}_{-1}\right| =$$

$$= 1 + |-2| + |0{,}6570 + 1| = \boxed{4{,}66}$$

4

$$\boxed{W_{TOT}} = W^{0\to 2} + W^{2\to 4} + W^{4\to 6} = \int_0^2 4x^3 \, dx + \int_2^4 32 \, dx +$$

$$+ \int_4^6 (-16x + 96) \, dx = x^4\Big|_0^2 + 32x\Big|_2^4 + \big[-8x^2 + 96x\big]_4^6 =$$

$$= 2^4 - 0 + 32(4-2) + (-8\cdot 6^2 + 96\cdot 6) - (-8\cdot 4^2 + 96\cdot 4) = \boxed{112 \text{ J}}$$