I. E. S. JÚLIA MINGUELL 2n Batxillerat	dj, 11 de febrer 2016	Nota (*sobre 10*)
Matemàtiques — Model d'examen 2.2: «Funcions: Continuïtat i representació»	Alumne: nº MÀXIM DE PUNTS: vuit (8)	

1. REPRESENTACIÓ de FUNCIONS

Recordatori important: aquesta pregunta (1) val tres punts, valent-n'hi un cadascun dels seus apartats (1.a), (1.b) i (1.c).

Anomenant *N1* a la nota total (sobre tres punts) obtinguda en aquesta pregunta (1), i *NC* a la nota total (sobre dos punts) obtinguda en l'avaluació continuada del tema 2.2, la seva suma *S* = *N1* + *NC* té un valor màxim de cinc punts.

Tal i com es va avisar durant les classes, per a aprovar el tema 2.2 serà condició necessària que aquesta suma *S* de la nota en la pregunta 1 d'examen i la nota en la continuada del tema sigui superior o igual a 2,5 punts (és a dir: al 50% del màxim possible).

1.a) Fes la taula de curvatura i troba tots els punts d'inflexió de la funció:

$$f(x) = \frac{x^5}{x^2 - 4}$$

1.b) Troba totes les asímptotes de les dues funcions següents:

$$f(x) = 2x - 3 + \frac{5}{x} \qquad\qquad g(x) = 6\frac{e^x + xe^{2x}}{e^{2x}} - 2x$$

1.c) Representa gràficament una certa funció $f(x)$ de la que sabem:

- Domini: $D[f] = (-\infty,\ -2) \cup (-2,\ 2) \cup (2,\ \infty)$
- La funció és contínua en tots els punts del seu domini.
- La funció és no periòdica i té simetria parella.
- Punts importants: $A(-3,\ 2)$ mínim;
  $B(-1,\ 0)$ tall X;
  $C(0,\ 1)$ màxim, tall Y;
  $D(1,\ 0)$ tall X;
  $E(3,\ 2)$ mínim.
- Regió on f és creixent: $(-3,\ -2) \cup (-2,\ 0) \cup (3,\ \infty)$
  és decreixent: $(-\infty,\ -3) \cup (0,\ 2) \cup (2,\ 3)$
  és còncava: $(-\infty,\ -2) \cup (2,\ \infty)$
  és convexa: $(-2,\ 2)$
- Asímptotes: r: $x = -2$ és AV (límits: ∞ a esquerra, $-\infty$ a dreta);
  s: $x = 2$ és AV (límits: $-\infty$ a esquerra, ∞ a dreta);
  t: $y = x - 3$ és AO a la dreta;
  u: $y = -x - 3$ és AO a l'esquerra.

[*3 punts: 1 per cada apartat*]

(continua en pàgina següent)

2. Sigui la funció $f(x) = x^2$. Calcula $f'(2)$ utilitzant la definició de derivada.

[*1 punt*]

3. Sigui la funció $f(x) = ax^2 - 4x + b$.

3.a) Calcula el valor del paràmetre a per a que la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = 2$ sigui paral·lela a r: $y = 4x + 11$.

3.b) Calcula els valors dels paràmetres a i b que fan que la recta tangent a la gràfica d' f en el punt d'abscissa $x = 2$ sigui la recta t: $y = 4x + 1$.

[*2 punts: 1 per cada apartat*]

4. Sigui la funció $y = x^{\sin x}$. Troba $f'(x)$. (Pots usar la "derivació logarítmica").

[*1 punt*]

5. Calcula la derivada de les següents funcions. Simplifica el resultat quan es pugui.

5.a) $f(x) = x \cdot \sqrt{1 - 6x}$ **5.b)** $f(x) = \text{arc tg}\,(5x - 1)$

[*1 punt: 0,5 per cada derivada*]

1

1.a

$$f(x) = \frac{x^5}{x^2-4} \Longrightarrow f'(x) = \frac{5x^4(x^2-4) - x^5 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{5x^6 - 20x^4 - 2x^6}{(x^2-4)^2} = \frac{3x^6 - 20x^4}{(x^2-4)^2}$$

aquí podríem factoritzar x^4 del numerador, però no és convenient de cara a calcular la 2a derivada.

$$\boxed{f''(x)} = \frac{(18x^5 - 80x^3)(x^2-4)^{\cancel{2}\,1} - (3x^6 - 20x^4) 2 \cancel{(x^2-4)} 2x}{(x^2-4)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{\cancel{18x^7} - 72x^5 - \cancel{80x^5} + 320x^3 \cancel{- 12x^7} + \cancel{80x^5}}{(x^2-4)^3} =$$

$$= \frac{6x^7 - 72x^5 + 320x^3}{(x^2-4)^3} = \boxed{\frac{(6x^4 - 72x^2 + 320) \cdot x^3}{(x^2-4)^3}}$$

$\Longrightarrow$ denom $= 0 \rightarrow (x^2-4)^3 = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{4} = \pm 2}$: dues discontinuïtats.

CANDIDATS A P-INF:

$f''(x) = 0 \Longrightarrow (6x^4 - 72x^2 + 320) \cdot x^3 = 0$

(si $x \neq \pm 2$)

$\Longrightarrow$ $x^3 = 0 \rightarrow \boxed{x = 0}$ candidat

$6x^4 - 72x^2 + 320 = 0 \overset{(:)2}{\Longleftrightarrow} 3x^4 - 36x^2 + 160 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{36 \pm \sqrt{-624}}{6}$: $\nexists$ solució.

"biquadrada"

FEM TAULA CURVATURA:

	$x<$	-2	$<x<$	0	$<x<$	2	$<x$
f'':	$\ominus$	$\nexists$	$\oplus$	0	$\ominus$	$\nexists$	$\oplus$
f:	$\cap$ CV	$\nexists$	$\cup$ CC	INF.	$\cap$ CV	$\nexists$	$\cup$ CC

$$\lim f''(100) \cong \frac{6 \cdot 100^7}{10000^3} = \oplus$$

$$f''(1) = \frac{6-72+320}{(1-4)^3} = \frac{\oplus}{(-3)^3} = \frac{\oplus}{\ominus} = \ominus$$

nota: la part $x<0$ de la taula la omplint tenint en compte

que $f(-x) = \dfrac{(-x)^5}{(-x)^2-4} = \dfrac{-x^5}{x^2-4} = -f(x) \Rightarrow \boxed{f \text{ senar}}$

$\Rightarrow$ P. INF en $x=0 \Rightarrow y = f(0) = \dfrac{0^5}{0^2-4} = 0 \Rightarrow \boxed{(0,0) \text{ és punt d'inflexió}}$.

1.b/ $f(x)$: denom $=0 \to \boxed{x=0}$ candidat A.V.:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \left(2x-3+\frac{5}{x}\right) = 0-3+\frac{5}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \left(2x-3+\frac{5}{x}\right) = 0-3+\frac{5}{0^+} = +\infty \end{cases}\right\} \Rightarrow \boxed{x=0 \text{ és A.V.}}$$

AH: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(2x-3+\frac{5}{x}\right) = \pm\infty - 3 + \frac{5}{\pm\infty} = \pm\infty - 3 + 0 = \pm\infty$

$\Rightarrow \boxed{\nexists \text{ AH}}$

AO: $\boxed{m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right) = 2}$

$\hookrightarrow \boxed{n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\cancel{2x} - 3 + \frac{5}{x} \cancel{-2x}\right) = -3}$

$\Rightarrow \boxed{r: \boxed{y = 2x-3} \text{ és AO a esquerra i a dreta}}$

PEPE RÓDENAS BORJA
[dj ; 11 - II - 16]
INS JÚLIA MINGUELL

MATES (2n BAT.)

MODEL d'examen

(resolució) T. [2.2] «Continuïtat i representació de funcions»

$g(x)$: AV: denom $= 0 \rightarrow e^{2x} = 0$ no té solució $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\nexists \text{ AV}}$

AH: $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty}\left(6\,\dfrac{e^x + xe^{2x}}{e^{2x}} - 2x\right)} = \left(\underbrace{\dfrac{\infty}{\infty}} - \infty \quad \text{INDET.}\right) = (*)$

indet. de tipus L'H, però podem veure que derivant no guanyaríem res. Podem multiplicar numerador i den. per e^{-2x}, o equivalentment "trencar la fracció" $\dfrac{e^x + xe^{2x}}{e^{2x}} = \dfrac{e^x}{e^{2x}} + \dfrac{xe^{2x}}{e^{2x}} = \dfrac{1}{e^x} + x$ i treballar amb $\boxed{g(x) = \dfrac{6}{e^x} + 4x}$, simplificada:

$[*] = \lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{6}{e^x} + 4x\right) = \dfrac{6}{e^{\infty}} + 4\cdot\infty = \dfrac{6}{\infty} + \infty = 0 + \infty = \boxed{\infty} \Rightarrow \nexists$ AHd;

a l'esquerra: $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\dfrac{6}{e^x} + 4x\right)} = \left(\dfrac{6}{e^{-\infty}} - 4\infty = 6e^{\infty} - \infty = \infty - \infty \text{ IND}\right)$

"sumem fraccions"

$= \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\dfrac{6}{e^x} + 4x\,\dfrac{e^x}{e^x}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\dfrac{6 + 4xe^x}{e^x}\right)^{(*,*)} = \dfrac{6 - 4\infty e^{-\infty}}{e^{-\infty}} =$

$= \dfrac{6 - \infty \cdot \frac{1}{e^{\infty}}}{1/e^{\infty}} = \dfrac{6 - \infty\cdot 0}{0}$ ← tenim aquí una IND., que cal tractar per separat:

$\lim\limits_{x \to -\infty}(xe^x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\dfrac{x}{e^{-x}} = \left(\dfrac{-\infty}{e^{+\infty}} = -\dfrac{\infty}{\infty} \text{ L'HÔP:}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}} = -\dfrac{1}{e^{\infty}} = -\dfrac{1}{\infty} = 0$ → amb això, hi tornem:

$[*,*] = \dfrac{6 + 4\cdot 0}{e^{-\infty}} = \dfrac{6}{e^{-\infty}} = 6\cdot e^{\infty} = 6\cdot\infty = \boxed{\infty}$

$\Rightarrow \boxed{\nexists \text{ AH}}$, i en busquem d'obliqües.

AO: utilitzarem la versió simplificada $g(x) = \frac{6}{e^x} + 4x$ que hem trobat abans quan feiem $x \to \pm\infty$.

$$\boxed{m = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{xe^x} + 4\right) = \frac{6}{\infty \cdot e^{\infty}} + 4 = \frac{6}{\infty\cdot\infty} + 4 = 4}$$

$$\hookrightarrow \boxed{n = \lim_{x\to\infty}(g(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{e^x} + \cancel{4x} - \cancel{4x}\right) = \frac{6}{e^{\infty}} = \frac{6}{\infty} = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{r: \boxed{y = 4x} \text{ és AOd}}$$

A l'esquerra:

$$M = \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{6}{xe^x} + 4\right) \overset{(*)}{=} \frac{6}{-\infty e^{-\infty}} + 4 =$$

$$= \frac{6}{-\infty \frac{1}{e^{\infty}}} + 4 = \frac{6}{-\infty\cdot 0} + 4 \quad \text{INDET.}$$

calculem aquest límit per separat:

$$\lim_{x\to-\infty}(xe^x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^{-x}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{-e^{-x}}\right) =$$

$$\infty\cdot 0 = \frac{\infty}{1/0} = \frac{\infty}{\infty} \text{ i podem aplicar L'HÔPITAL}$$

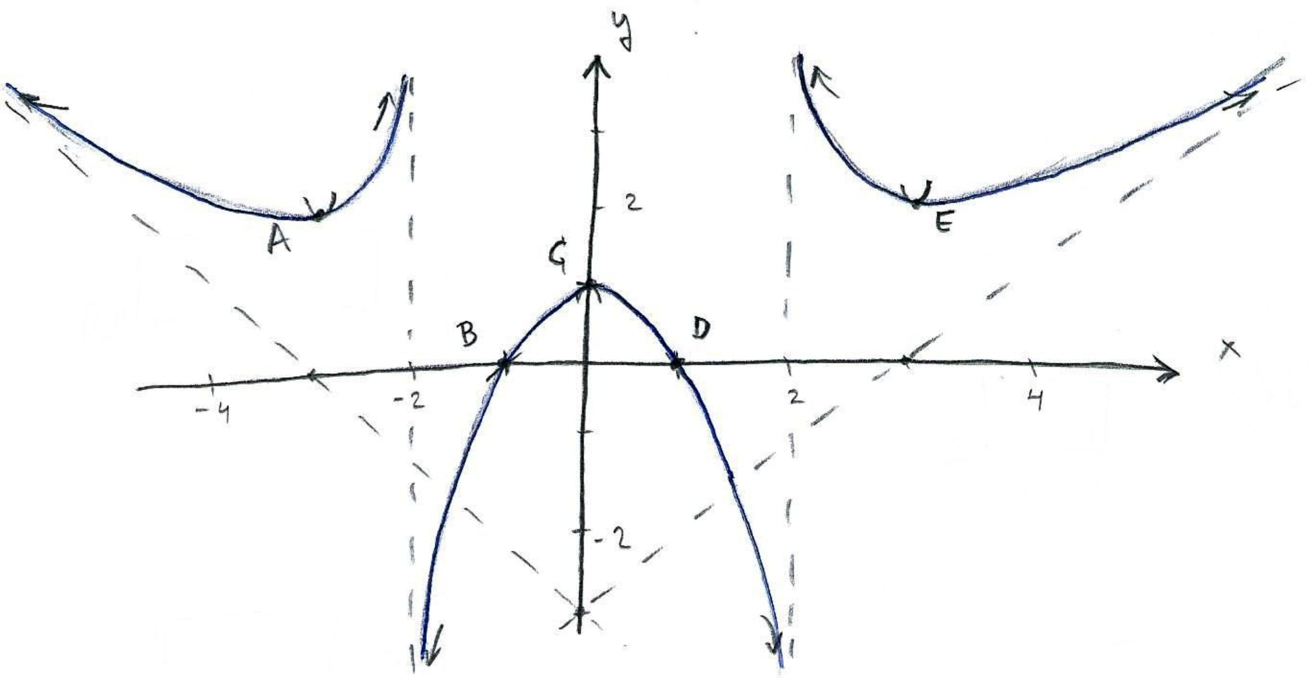
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{e^{+\infty}}\right) = 0$$, per tant, tornant

a $[*]$ podrem concloure que: $M = \frac{6}{0'} + 4 = \infty \Rightarrow \boxed{\nexists \text{ AOe}}$

1. c/ per a representar les AO's, busquem els seus punts de tall:

AOd: $x=0 \to y=-3$; $y=0 \to 0=x-3 \to x=3$ $\Big\} \to (0,-3)$ i $(3,0)$

AOe: $x=0 \to y=-3$; $y=0 \to 0=-x-3 \to x=-3$ $\Big\} \to (0,-3)$ i $(-3,0)$



NOTA: a banda de respectar la curvatura de cada tram, en el traçat hem tingut present la simetria (la funció és parella $\Rightarrow$ simètrica respecte Y).

$\boxed{2}$

$$\boxed{f'(2)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{(2+h)^2-2^2}{h} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{4} + h^2 + 4h \cancel{-4}}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{4h}{h} = \boxed{4}$$

quocient de polinomis quan la variable $h \to 0$: ens quedem amb els monomis de grau menor amunt i avall (recordem que quan estem aplicant la definició de derivada està prohibit usar L'HÔPITAL).

$\boxed{3}$

$$f(x) = ax^2 - 4x + b \rightarrow f'(x) = 2ax - 4$$

3a/ la tangent a f en $x=2$ ha de tenir el mateix pendent que r, d'on: $f'(2) = 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2a\cdot 2 - 4 = 4 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow \boxed{a = \frac{8}{4} = 2}$$

3b/ si $\boxed{a=4}$ ja tenim la condició del pendent.
La condició de tangència en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{f(2)} = 4\cdot 2 + 1 = 9 \\ 2\cdot 2^2 - 4\cdot 2 + b = 8 - 8 + b = b \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b = 9}$$

PEPE RÓDENAS BORJA

[dj ; 11-II-16]

INS JÚLIA MINGUELL

MATES (2n BAT.)

MODEL d'examen

(resolució)

T. 2.2 «Continuïtat i representació de funcions»

4

$$\boxed{y = x^{\sin x}} \ (*) \overset{\ln(\dots)}{\Longrightarrow} \ln y = \ln x^{\sin x} = \sin x \cdot \ln x$$

$$\overset{\frac{d}{dx}(\dots)}{\Longrightarrow} \frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \Longrightarrow$$

substituïm amb [*]

$$\Longrightarrow \boxed{y'} = \cos x \ln x \, y + \sin x \cdot \frac{y}{x} =$$

$$= \cos x \cdot \ln x \cdot x^{\sin x} + \sin x \cdot \frac{x^{\sin x}}{x} =$$

$$\boxed{= \cos x \cdot \ln x \cdot x^{\sin x} + \sin x \cdot x^{\sin x - 1}}$$

5

5.a

si restem les fraccions

$$\left(x\sqrt{1-6x}\right)' = \boxed{\sqrt{1-6x} + x\,\frac{-6}{2\sqrt{1-6x}}} = \frac{1-9x}{\sqrt{1-6x}}$$

5.b

si desenvolupem el quadrat

$$\left[\operatorname{arctg}(5x-1)\right]' = \boxed{\frac{5}{1+(5x-1)^2}} = \frac{5}{25x^2-10+2}$$