T.4 «MATRIUS i SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS»

(RESUM de TEORIA)

⊛ MATRIU $\boxed{A_{m\times n}}$

amb m files i n columnes (en direm «matriu d'ordre $m\times n$»):

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}$$

- a_{ij} ← un element de la matriu en la fila i-èsima i la columna j-èsima. També s'indica: $a_{ij} = (A)_{ij}$.
- diagonal principal: el conjunt d'elements $a_{11}, a_{22}, a_{33} \dots$ (a_{ij} : $i=j$).

• TIPUS de MATRIUS: quadrada d'ordre n: $A_{n\times n}$;

diagonal: quadrada que fora de diagonal ppal només té zeros;

unitat d'ordre n (o identitat d'ordre n): $\mathbb{1}_n = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$,

és a dir: diagonal ordre n que només té uns en la diagonal ppal;

fila: matriu d'ordre $1\times n$ (també es diuen "vectors fila");

columna: matriu d'ordre $n\times 1$ (també es diu "vector columna");

matriu nul·la d'ordre $m\times n$: $A_{m\times n}$ tal que $a_{ij} = 0 \ \forall i,j$.

⊛ PRODUCTE de MATRIUS:

$A_{m\times n}$ i $B_{p\times q}$ es poden multiplicar sii $n=p$, i el resultat és una matriu $M_{m\times q}$ que té per elements:

$$\boxed{m_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\, b_{sj}}$$

(MNEMOTECNIA: "embollem" files d'A en columnes de B)

⊛ PRODUCTE número·MATRIU:

$\lambda \in \mathbb{R}$ (λ és un número, o "escalar"):

$(\lambda A)_{ij} = \lambda\, a_{ij} \iff \lambda$ multiplica cada element d'A. (NOTA: $\lambda A = A\lambda$)

p. exemple: $6\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cdot 2 & 6\cdot 3 \\ 6\cdot 0 & 6\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ ∎

⊛ **SUMA de MATRIUS:** A i B es poden sumar sii són del mateix ordre, i $M = A+B$ té per elements: $\boxed{m_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$

(és a dir, se sumen els elements corresponents, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$ ■).

⊛ **MATRIU OPOSADA:** $\boxed{-A = -1 \cdot A}$. ("$-A$" és l'oposada d'A).

→ PROPIETAT: $A + (-A) =$ matriu nul·la ■

⊛ **MATRIU TRANSPOSADA:** Per a qualsevol matriu A d'ordre $(m \times n)$, la seva matriu transposada A^t és d'ordre $(n \times m)$ i té per elements: $\boxed{(A^t)_{ij} = a_{ji}}$.

(MNEMOTECNIA: tauleta de xocolata: $\begin{matrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} 6 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{matrix}$)

A "simètrica": $A = A^t$

A "antisimètrica": $A = -A^t$

⊛ **MATRIU INVERSA:** Sigui una matriu quadrada A d'ordre n. Si existeix una altra matriu A^{-1} tal que $\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}}$, direm que A^{-1} és la matriu inversa d'A.

▷ PROPIETATS de les MATRIUS i les OPERACIONS amb MATRIUS.

- Propietats del **PRODUCTE $A \cdot B$**:
  - *i)* associativa: $\boxed{(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)}$
  - *ii)* no és commutatiu: $A \cdot B$ i $B \cdot A$ no sempre coincideixen!
  - *iii)* distributiva respecte de la suma de matrius:
    - a esquerra: $\boxed{A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C}$
    - a dreta: $\boxed{(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A}$

- Propietats del **producte $\lambda \cdot A$**:
  - *i)* distributiva respecte de la suma de matrius: $\boxed{\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B}$
  - *ii)* distributiva respecte de la suma d'escalars: $\boxed{(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A}$
  - *iii)* associativa: $\boxed{\lambda (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B}$

- Propietats de la **SUMA $A+B$**:
  - *i)* commutativa: $\boxed{A+B = B+A}$
  - *ii)* associativa: $\boxed{A + (B+C) = (A+B) + C}$

- Propietats de la transposada A^t:
  - *i)* $(A+B)^t = A^t + B^t$
  - *ii)* $(A^t)^t = A$
  - *iii)* $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

- Propietats de la inversa A^{-1}:
  - *i)* $(A^{-1})^{-1} = A$
  - *ii)* $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

  (si existeixen tals inverses).

▷ MÈTODE de GAUSS per a TRIANGULAR (o escalonar) MATRIUS:

- A partir d'una matriu qualsevol A, n'obtenim una altra que només té zeros per sota de la diagonal principal:
- Fem els zeros de dalt a baix en la 1a columna, després de dalt a baix en la 2a, després en la 3a, etc.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 1r & \boxtimes & \boxtimes \\ 2n & 3r & \boxtimes \end{pmatrix}$$

- Tenim dret a triar lliurement entre les següents quatre primeres operacions per a anar fent els zeros, i l'obligació d'aplicar la 5a cada vegada que "matem" una fila (la reduïm a zeros sencera):

⚠ vegeu-ne una NOTA PRELIMINAR (*)

> (1) intercanviar dues files: $f_1 \leftrightarrow f_2$
>
> (2) multiplicar una fila per un número $\lambda \neq 0$: $f_3 \to 6f_3$
>
> (3) sumar-li o restar-li a una fila qualsevol de les altres: $f_2 \to f_2 + f_3$
>
> (4) combinació de (2) i (3): $f_2 \to 2f_2 - 3f_1$
>
> (5) quan una fila se'ns fa tota de zeros, passa a baix de tot.

▷ RANG d'una MATRIU:

$rg\,A$ serà el nombre de files "vives" (que tinguin algun element no nul) després d'haver fet Gauss.

Teorema: $\boxed{rg\,A = rg(A^t)}$

Corol·laris: i/ si estem aplicant Gauss per a trobar $rg\,A$, les mateixes operacions que fem amb files les podem fer amb columnes. [(5) amb columnes és: "... passa a la dreta".]

ii/ si A és d'ordre $m \times n$, $\boxed{rg\,A \leq \min\{m, n\}}$.

---

[*] NOTA PRELIMINAR per a fer Gauss: abans de començar a fer els zeros, cal passar a baix del tot totes les files que només tinguin zeros i a la dreta del tot totes les columnes que només tinguin zeros. //

SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS: amb m equacions i n incògnites

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\iff \boxed{A\bar{X} = B}$$

A: matriu de coeficients

$\bar{X}$: matriu columna d'incògnites

B: matriu columna dels termes independents

$$\bar{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$\bar{A}$: matriu ampliada del sistema

Teorema de Rouché - Frobenius: $(r = rg\,A \ ; \ \bar{r} = rg\,\bar{A})$

- $\boxed{r \neq \bar{r}} \Longrightarrow$ SI (sistema incompatible: $\nexists$ sols.)
- $\boxed{r = \bar{r}} \Longrightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE
  - $\boxed{r = n} \Longrightarrow$ SCD (determinat: $\exists!\,1$ sol.)
  - $\boxed{r < n} \Longrightarrow$ SCI (indeterminat: $\exists\,\infty$ sols.)

$$\boxed{g = n - r}$$

"graus de llibertat de la solució": nombre de paràmetres que necessitem per a expressar totes les solucions.

⊛ MÈTODE GENERAL de RESOLUCIÓ de SISTEMES (per GAUSS):

1r: triangulem $\bar{A}$ amb Gauss per files.

[NOTA: podem intercanviar columnes a dins de l'A, però cal recordar que s'intercanvien també les incògnites que representen]

2n: si és COMPATIBLE, reconstruïm el sistema a partir de la matriu triangulada, i resolem per substitució de baix a dalt.

3r: ¿com es fa si SCI? en l'equació de més a baix que no sigui trivial $(0=0)$ triarem una de les incògnites, que aïllarem en termes de les $g = n - r$ restants. Aquestes altres les arrossegarem en les substitucions de baix a dalt. →

→ Al final, tindrem r incògnites expressades en termes de les g que hem amagat. Igualarem cadascuna d'aquestes a un paràmetre diferent: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_g \in \mathbb{R}$, de manera que donant valors a aquests paràmetres construïm totes les solucions del sistema. <u>Exemple:</u>

$$\bar{A} \xRightarrow{\text{triangulació}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \begin{array}{l} \to 2x+y-6z=-2 \to 2x+4+2z-6z=-2 \ (*) \\ \to y-2z=4 \to \boxed{y=4+2z} \end{array}$$

$r=\bar{r}=2<3=n$: $\boxed{SCI}$, $g=3-2=1$: <u>un grau de llibertat</u> → ens farà falta un paràmetre λ per a expressar totes les solucions.

($\exists\ \infty$ sols)

$(*) \to \boxed{x=\frac{1}{2}(-2-4+4z)=-3+2z} \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{cases} x=-3+2\lambda \\ y=4+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}}$$

... donant valors al paràmetre $\lambda \in \mathbb{R}$, construïm solucions concretes del sistema.

VECTORS en l'ESPAI $\mathbb{R}^n$:

- El conjunt de totes les matrius fila d'ordre $(1\times n)$ rep el nom d'<u>espai vectorial $\mathbb{R}^n$</u>. Els seus elements es diuen vectors, i s'indiquen amb una fletxeta per sobre: $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n$.

  <u>p.ex.</u>, $\vec{v}=(2,3,-1) \in \mathbb{R}^3$
  $\vec{u}=(5,2) \in \mathbb{R}^2$.

- <u>rang d'un sistema</u> de vectors en $\mathbb{R}^n$: si tenim un conjunt S (o "sistema S") d'm vectors d'$\mathbb{R}^n$, podem construir una matriu $A_{m\times n}$ que té per files aquests vectors:

$S=\{(2,3,5),(1,0,-3)\} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. LLAVORS, $r=\boxed{rg\,S = rg\,A}$

- sistemes lliures / lligats: un sistema S d'm vectors d'$\mathbb{R}^n$ es diu
  - lliure: si $r = m$ (o "linealment independent" ← l.i.
  - lligat: si $r < m$ (o "linealment dependent").

- COROL·LARI: (gràcies a que $rg A = rg A^t$) el nº màxim de vectors d'$\mathbb{R}^n$ que poden formar un sistema lliure és $m = n$. Aquest nombre es diu dimensió de l'espai $\mathbb{R}^n$, i qualsevol sistema lliure d'n vectors d'$\mathbb{R}^n$ es diu que forma una base d'$\mathbb{R}^n$.

- COMBINACIÓ LINEAL: sigui un sistema S d'm vectors d'$\mathbb{R}^n$, $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \dots, \vec{w}\} \subset \mathbb{R}^n$.

  Direm que un vector $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ és combinació lineal del conjunt S (o "depèn linealment" d'aquests vectors) quan existeixin uns nombres reals $\alpha, \beta, \dots, \gamma \in \mathbb{R}$ tals que: $\boxed{\vec{a} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \dots + \gamma\vec{w}}$.

  Als nombres $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ els direm "coeficients" de la combinació lineal.

  p.ex.: $(1,6)$ és c.l. del sistema $\{(1,2), (2,0)\}$ amb els coeficients $\alpha = 3$ i $\beta = -1$:

  $(1,6) = 3\cdot(1,2) - (2,0)$ ■

- Teoremes:
  - (I) en un sistema lligat, $\exists$ al menys un vector que és c.l. dels altres.
  - (II) en un sistema lliure, cap vector és c.l. dels altres.
  - (III) el rang d'un sistema és el major nº de vectors l.i. que podem trobar-hi
  - (IV) si S és base d'$\mathbb{R}^n$, qualsevol $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ és c.l. d'S, i els coeficients de la c.l. — anomenats "components" — són únics.

(V) $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ és lliure si, i només si, els únics nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}^n$ que verifiquen l'equació $\boxed{\vec{0} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_m \vec{v}_m}$ són $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$. (Sent-hi $\vec{0}$ el vector d'$\mathbb{R}^n$ que té totes les seves components iguals a zero).

NOTA: la darrera eq. també s'escriu així: $\vec{0} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \vec{v}_j$.

DETERMINANTS i SUBMATRIUS:

- Si en la matriu A suprimim algunes files i/o columnes, n'obtenim una altra matriu, que en direm "submatriu" d'A.

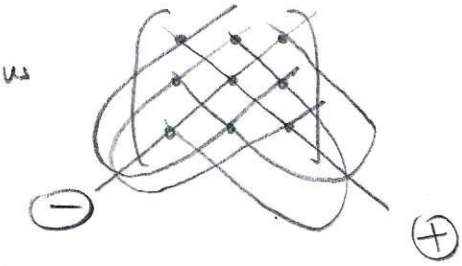
  Per exemple:
  - $A(1,3;2,3)$ ⇝ eliminem files 1a i 3a i columnes 2a i 3a
  - $A(;4)$ ⇝ només eliminem columna 4a.
  - $A(;)$ ⇝ A mateixa també és submatriu d'A.

- Teorema: si M és submatriu d'A, $\boxed{\operatorname{rg} M \leq \operatorname{rg} A}$

- "Menors" d'una matriu A: denominem així als determinants de les submatrius quadrades d'A.

- "Determinant" d'una matriu quadrada A: a cada matriu $n \times n$ li associem un nombre real, el seu determinant, escrit $\det A$ ó també $|A|$, que es calcula així:
  - ordre 1×1: $\boxed{\det A = a_{11}}$
  - ordre 2×2: $\boxed{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\cdot d - b\cdot c}$ "diagonal − antidiagonal"

- ordre 3x3 : regla de Sarrus



- ordre $n \times n$ qualsevol, excepte 1×1:

Fem el que es coneix amb "desenvolupament per una fila" (o columna) qualsevol. Definim l'element adjunt A_{ij} de l'element a_{ij} de la matriu de la manera següent:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \, |A(i;j)|}$$

signe associat a l'element a_{ij}, que es pot recordar amb la següent taula alternada tipus "tauler d'escacs":

"menor complementari": determinant de la submatriu fruit d'eliminar la fila i^a i la columna j^a en A.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}.$$

Alesthores, «el determinant de la matriu A es pot calcular sumant els productes de tots els elements d'una fila fixa (o columna) pel seus respectius elements adjunts»:

$$\boxed{|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} A_{1i}}$$, per exemple (desenvolupament per fila 1a)

també: $$\boxed{|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i3} A_{i3}}$$ (desenvolupament per columna 3a).

p. exemple: desenvolupament per 2a fila

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}}_{|A(2;2)|} - 6 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}}_{|A(2;3)|}$$

$+1 = (-1)^{2+2}$

$(-1)^{2+3} = -1$

CÀLCUL de RANGS per DETERMINANTS:

- Teorema: si M és una matriu quadrada d'ordre m,

$$\boxed{|M| \neq 0 \iff rg\,M = m}$$ ("rang màxim").

- El darrer teorema, combinat amb un teorema vist més amunt sobre que $rg\,A = rg(A^t)$, permet el següent mètode de càlcul de rangs mitjançant l'avaluació de menors:

¿$\exists$ algun $a_{ij} \neq 0$?
- NO $\Rightarrow r = 0$
- SÍ $\Rightarrow$ ¿$\exists$ algun menor $2\times 2 \neq 0$?
  - NO $\Rightarrow r = 1$
  - SÍ $\Rightarrow$ ¿$\exists$ algun menor $3\times 3 \neq 0$?
    - NO $\Rightarrow r = 2$
    - SÍ $\Rightarrow$ ¿$\exists$ algun menor $4\times 4 \neq 0$? (...)

(on: $r = rg\,A$)

- En la pràctica, una vegada hem trobat, per exemple, una submatriu M 2×2 amb $|M| \neq 0$, no cal examinar tots els menors d'ordre 3: basta anar a tots aquells que tinguin a M com a submatriu (aquest procediment es coneix com "orlar" la matriu M).

  ↳ p.exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad a_{11} \neq 0 \Rightarrow rg\,A \geq 1$,

  busquem menors 2×2 "orlant" la submatriu $A(2;2,3) = (1)$: primer afegim fila 2a i columna 2a, $|A(;3)| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$, i després afegim fila 2a i columna 3a, $|A(;2)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 = 1 \neq 0$

  $\Rightarrow \boxed{rg\,A = 2}$ ■

▷ CÀLCUL de la MATRIU INVERSA:

- **Teorema**: si A és quadrada $n \times n$, llavors:

$$\boxed{\exists A^{-1} \Leftrightarrow A \text{ és "invertible"} \Leftrightarrow A \text{ és "regular"} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow \text{les files (o columnes) d'}A \text{ són linealment independents} \Leftrightarrow rg A = n \text{ (màxim)}.}$$

- **Inversió de matrius 2×2**: $\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$

(on $\Delta = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$).

- **Inversió de matrius $n \times n$ $\forall n \geq 2$**:

  - Definim la matriu adjunta de la matriu A, $Adj A$, com aquella construïda a partir de substituir en A cada element a_{ij} pel seu element adjunt A_{ij}:

$$Adj\, A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

  - Llavors, si A és regular tindrem que:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(Adj\, A\right)^t}$$

per exemple:

a/ $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \blacksquare$$

$$\left(\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot1 + 1\cdot1 = 2 \Rightarrow \exists \text{ inversa}\right)$$

$\times\ c_2$

b/ $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \blacksquare$$

Sistemes de Cramer:

direm que un sistema d'equacions lineals $AX = B$ és "de Cramer" si A és quadrada i regular ($|A| \neq 0$).

- Teorema: $\boxed{\text{Tots els sistemes de Cramer són SCD}}$

- Regla de Cramer: és una regla que permet calcular per determinants de forma sistemàtica la solució d'un sistema de Cramer. Per al cas $n=3$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- Definim:

$$\Delta = |A|$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinant de la matriu fruit de substituir en A la columna de les x per la columna B de termes independents

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

substituïm en A la col. de les y per B

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

substituïm en A la col. de les z per B.

- Solució del sistema:

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \; ; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \; ; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}}$$

Sistemes homogenis:

direm que un sistema d'equacions lineals $AX = B$ és "homogeni" quan B tingui tots els seus elements iguals a zero.

- **Teoremes:** (I) Tot sistema homogeni accepta la solució anomenada "trivial", que consisteix en què totes les incògnites són iguals a zero.

  COROL·LARI: Tot sistema homogeni és compatible.

  (II) Si A és quadrada, la condició necessària i suficient per a que un sistema homogeni tingui més (infinites) solucions a banda de la trivial és que $\boxed{|A| = 0}$

PROPIETATS dels DETERMINANTS: (suposem M quadrada ordre n)

i) $\boxed{\det(\lambda M) = \lambda^n \det M}$ ii) $\boxed{\det M = \det(M^t)}$

iii) El valor del determinant no canvia si a una fila (o columna) li'n sumem o restem una altra.

iv) El valor del determinant no canvia si a una fila (o columna) li sumem una combinació lineal de la resta de les files (o cols.)

v) Si multipliquem una fila (o col.) per λ, el determinant queda multiplicat per λ.

vi) Si intercanviem dues files (o columnes), el determinant canvia de signe

vii) Si dues files (o columnes) són iguals,

viii) Si hi ha una fila (o columna) que només té zeros,

ix) Si una fila (o columna) és c.l. de les altres,

$\Rightarrow \boxed{\det M = 0}$

x) Si M només té zeros per sota de la seva diagonal principal (o per sobre), el determinant és el producte de tots els elements de la diagonal principal.

xi) Si A i B quadrades de mateix ordre n, $\boxed{|A \cdot B| = |A| \cdot |B|}$

xii) $\boxed{|\mathbb{I}| = 1}$ xiii) $\boxed{|A^{-1}| = 1/|A|}$ (si A és regular)

xiv) Si M té $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ com a files, $M = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{pmatrix}$, i $\bar{v} = \bar{a} + \bar{b}$, aleshores

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{a}+\bar{b} \\ \bar{w} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{a} \\ \bar{w} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{b} \\ \bar{w} \end{pmatrix}}$$

NOTA: vàlid també per a qualsevol ordre d'M, qualsevol fila, i també per a columnes.