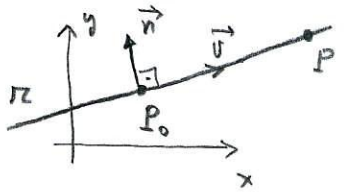
MATES (2n BAT.) T.5: "GEOMETRIA" – RESUM de TEORIA

REPÀS de GEOMETRIA en 2D:



vector director

$$r: \boxed{\vec{p} = \vec{p_0} + \lambda \vec{v}}$$ Equació vectorial

$$\Leftrightarrow (x,y) = (x_0, y_0) + \lambda (v_1, v_2)$$

punt genèric — punt conegut ("dada") — paràmetre

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \end{cases}} \Longrightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}} \Longrightarrow \boxed{Ax + By + C = 0}$$

Equacions paramètriques — Eq. contínua — Eq. general.

$\vec{n} = (A,B)$ vector normal.

(aïllant λ i igualant)

(eliminant els denominadors, aplicant la distributiva, passant-ho tot a un costat i agrupant:
$A = v_2$ $B = -v_1$ $C = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix}$)

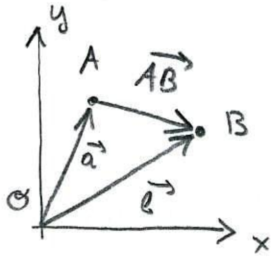
(*) POSICIONS RELATIVES:

Esquema	posició	punts en comú	CARACTERITZACIÓ
r, r'	SECANTS	1 només (SCD)	$\boxed{\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}} \Leftrightarrow \vec{n} \nparallel \vec{n}' \Leftrightarrow \vec{v} \nparallel \vec{v}'$
r, r'	PARAL·LELES	zero (SI)	$\boxed{\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}} \Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{n}'$ i un punt no comú $\Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{v}'$ i un punt no comú
r, r'	COINCIDENTS	∞ [tots] (SCI)	$\boxed{\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}} \Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{n}'$ i un punt comú $\Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{v}'$ i un punt comú

Els punts en comú són les solucions del sistema $\begin{cases} Ax + By = -C \\ A'x + B'y = -C' \end{cases}$, format per les dues equacions generals de les rectes r i r'.

OPERACIONS BÀSIQUES AMB VECTORS:

ho enunciem en $\mathbb{R}^2$, però la generalització a $\mathbb{R}^3$ és directa.



$A: (a_1, a_2)$ ← punt del pla amb coordenades $x = a_1$, $y = a_2$

$B: (b_1, b_2)$ ← punt del pla de coordenades $x = b_1$, $y = b_2$

$\vec{a} = \vec{OA}$ ← vector de posició del punt A, que surt de l'origen i té l'extrem en A.

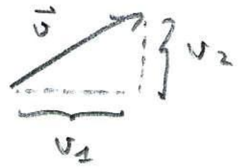
Les seves components són iguals a les coordenades del punt A.

$\vec{b} = \vec{OB}$ ← vector de posició del punt B.

$\boxed{\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}}$ ← vector que surt del punt A i té l'extrem sobre B

"FINAL − INICI"

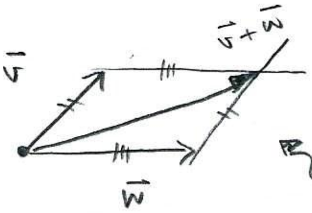
⊛ MÒDUL:



$\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$ ← és la longitud de la fletxa amb què representem el vector

(teorema de Pitàgores)

⊛ SUMA de DOS VECTORS:

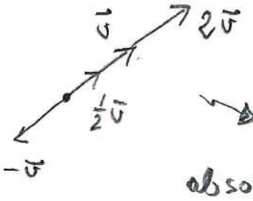


$\boxed{(v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)}$

sumem component a component

"REGLA del PARAL·LELOGRAM": interpretació gràfica de la suma de dos vectors: el vector suma es correspon amb la diagonal del paral·lelogram definit per $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

⊛ PRODUCTE per un nombre real (o "per un escalar"):



$\boxed{\lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)}$

l'escalar multiplica totes les components del vector.

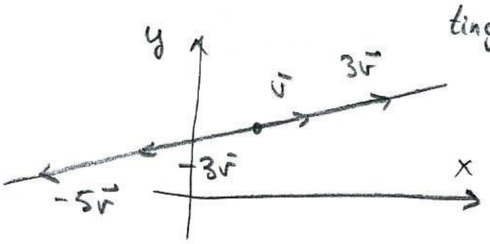
INTERPRETACIÓ: el mòdul de $\vec{v}$ es multiplica pel valor absolut de λ — el vector es "reescala" —; la direcció es manté i, si $\lambda < 0$, el sentit canvia.

INTERPRETACIÓ GEOMÈTRICA de la COMBINACIÓ LINEAL : cas $\boxed{1 \text{ vector en } \mathbb{R}^2}$. Sigui $\vec{a} \neq \vec{0} = (0,0)$.

Si $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\boxed{\vec{v} = \alpha \vec{a}}$, direm que $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ és c.l. (combinació lineal) del sistema format per un únic vector $\{\vec{a}\}$. $\Rightarrow$ si $\alpha \neq 0$, això significa que

$\boxed{\vec{v} \parallel \vec{a}}$ (són paral·lels) $\Leftrightarrow$ $\boxed{\frac{v_1}{a_1} = \frac{v_2}{a_2}}$ $\Leftrightarrow$ si fiquem l'origen dels vectors $\vec{v}$ i $\vec{a}$ al mateix punt, ambdós jauen a la mateixa recta.

(sempre que aquestes operacions tinguin sentit)

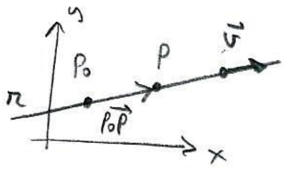


(no podem sortir de la recta on jau $\vec{v}$ només fent-ne combinacions lineals)

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\{\vec{v}, \vec{a}\} \text{ és lligat}}$ (o "linealment dependent") $\Leftrightarrow$ la matriu $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$ no té rang màxim

$\Rightarrow$ "$\vec{a}$ pot 'matar' a $\vec{v}$" $\Leftrightarrow$ $\boxed{\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = 0}$

CONNEXIÓ amb l'equació vectorial d'una recta:



$\boxed{\bar{P} = \bar{P}_0 + \lambda \vec{v}}$ $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\bar{P} - \bar{P}_0}_{\overrightarrow{P_0P}} = \lambda \vec{v}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{P_0P} = \lambda \vec{v}}$, és a dir: el vector que duu d'un punt P_0 de la recta a un altre punt qualsevol $P \in r$ ha de ser c.l. del vector director $\vec{v}$.

NOTA: la generalització a $\mathbb{R}^3$ de tot el que s'ha dit és directa, excepte pel que fa a $\det M = 0$ (doncs en aquest cas seria una matriu 2×3). Una condició equivalent que substituiria aquesta seria: $\vec{a} \times \vec{v} = \vec{0}$.

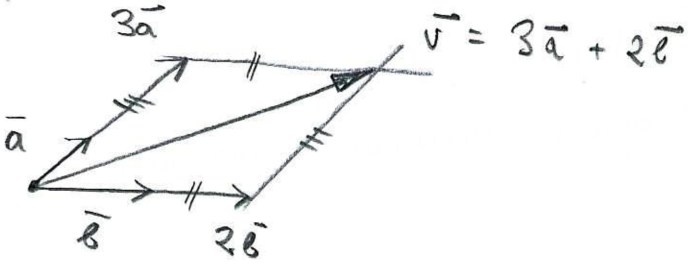
▶ <u>INTERPRETACIÓ GEOMÈTRICA de la COMBINACIÓ LINEAL</u>: cas $\boxed{2 \text{ vectors en } \mathbb{R}^2}$.

Sigui $\{\vec{a}, \vec{b}\} \subset \mathbb{R}^2$ un <u>sistema lliure</u> (per tant,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \iff rg\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = 2 \text{ (màxim)} \iff$$

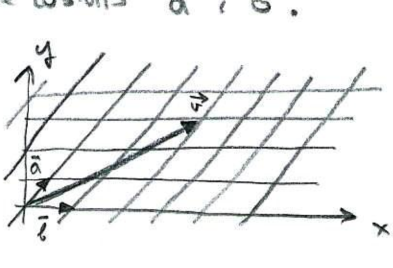
$$\iff \nexists k \in \mathbb{R},\ k \neq 0 \text{ tal que } \vec{b} = k\vec{a} \iff \underbrace{\vec{a} \not\parallel \vec{b}}_{\text{no són paral·lels}}).$$

$\boxed{\text{Si } \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tals que } \vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \text{ diraccess que } \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ és c.l. de } \{\vec{a}, \vec{b}\}.}$ ⟹ Això significa, per interpretació geomètrica dels productes per un escalar $\alpha\vec{a}$ i $\beta\vec{b}$, i de la suma de dos vectors $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ amb la regla del paral·lelogram, que si fixem tots tres vectors $\vec{v}$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ amb l'origen al mateix punt, podem trobar dos números α i β tals que el paral·lelogram construït amb $\alpha\vec{a}$ i $\beta\vec{b}$ com a costats té a $\vec{v}$ com a diagonal:



⟹ Per això, diem que <u>qualsevol sistema lliure de dos vectors $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ forma una "base" d'$\mathbb{R}^2$</u>: si fixem els orígens dels vectors en el punt $O(0,0)$, amb combinacions lineals podem construir qualsevol vector $\vec{v}$ del pla. Els significats dels coeficients α i β de la combinació lineal els entenem imaginant que "enrajolem" tot el pla $\mathbb{R}^2$ amb paral·lelograms de costats $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

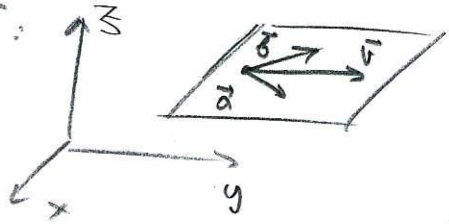
Això defineix dos conjunts de rectes paral·leles que ens permeten assignar coordenades al punt on el vector $\vec{v}$ té l'extrem. Així les coordenades α i β d'aquest extrem satisfan que $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$



▷ INTERPRETACIÓ GEOMÈTRICA de la COMBINACIÓ LINEAL: cas $\boxed{2 \text{ vectors en } \mathbb{R}^3}$.

Si $\{\vec{a}, \vec{b}\} \subset \mathbb{R}^3$ és lliure i $\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tals que $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, direm que $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ és c.l. de $\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

$\Rightarrow$ Interpretem això geomètricament ficant tots tres $\vec{v}, \vec{a}, \vec{b}$ amb l'origen al mateix punt de l'espai: $\vec{v}$ jaurà al pla definit per $\vec{a}$ i $\vec{b}$:



$\Updownarrow$

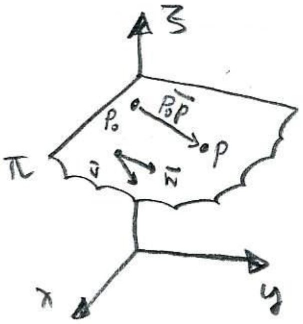
$\boxed{\vec{a}, \vec{b}, \vec{v} \text{ són coplanaris}}$ $\Leftarrow\!\Rightarrow$ $\boxed{M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}}$ no té rang màxim $\Leftarrow\!\Rightarrow$ ($\vec{a}$ i $\vec{b}$ poden "matar" $\vec{v}$)

$\Leftarrow\!\Rightarrow$ $\boxed{\det M = 0}$

$\Updownarrow$

$\boxed{\{\vec{v}, \vec{a}, \vec{b}\} \text{ és lligat}}$

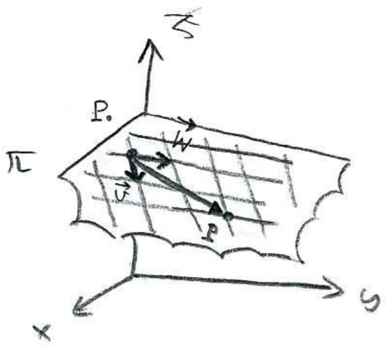
CONNEXIÓ amb l'equació vectorial del pla:



$\boxed{\vec{p} = \vec{p_0} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}} \Leftarrow\!\Rightarrow \underbrace{\vec{p} - \vec{p_0}}_{\overrightarrow{P_0P}} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \Leftarrow\!\Rightarrow$

$\Leftarrow\!\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{P_0P} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}}$, és a dir: el vector que duu d'un punt P_0 del pla a un altre punt qualsevol $P \in \pi$ ha de ser c.l. dels vectors directors $\{\vec{v}, \vec{w}\}$.

▷ podem imaginar que $\vec{v}$ i $\vec{w}$ defineixen un "enrajolat" del pla π, i que els coeficients λ i μ que ens permeten anar des de P_0 a P són com les coordenades de l'extrem de $\overrightarrow{P_0P}$ seguint aquest enrajolat



▶ INTERPRETACIÓ GEOMÈTRICA de la COMBINACIÓ LINEAL: cas $\boxed{3 \text{ vectors en } \mathbb{R}^3}$.

Signi $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} \subset \mathbb{R}^3$ un <u>sistema lliure</u>. (Per tant,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \iff rg\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = 3 \ (\text{màxim}) \iff$$

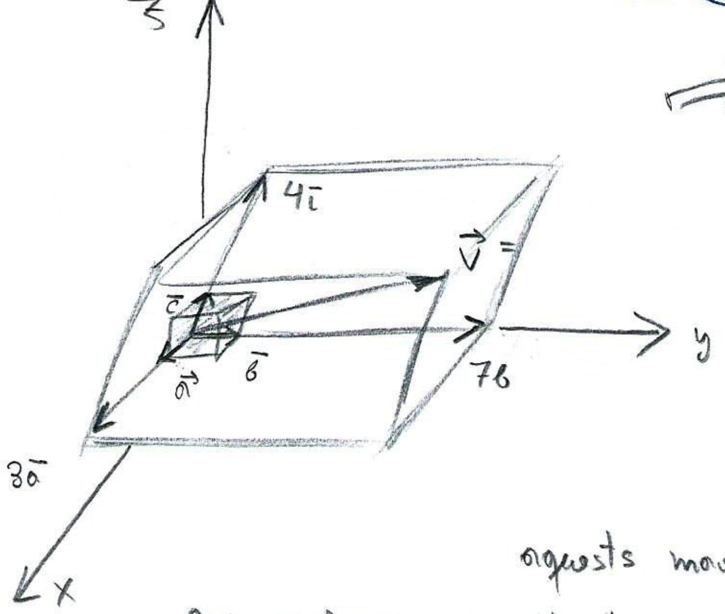
$\iff$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ <u>no són coplanaris</u> $\iff$ $\boxed{\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} \text{ són base d'}\mathbb{R}^3}$.

↳ així doncs, defineixen les arestes d'un paral·lelepípede

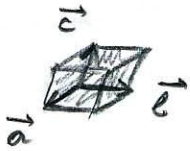
Conseqüentment, $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \ \exists \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tals que

$\vec{v} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\vec{c}$ (és a dir: $\vec{v}$ podrà ser expressat com a c.l. de $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$, o dependrà linealment d'ells).

geomètricament, això s'interpreta com que construïm tres vectors no coplanaris $\alpha\bar{a}$, $\beta\bar{b}$ i $\gamma\bar{c}$, paral·lels a $\bar{a}, \bar{b}$ i $\bar{c}$, respectivament, i que defineixen un paral·lelepípede del qual el vector $\vec{v}$ és una de les diagonals interiors:



⇒ podem imaginar que omplim tot l'espai amb els maons de forma paral·lelepipèdica que tenen els vectors $\bar{a}, \bar{b}$ i $\bar{c}$ com a arestes:



, i amb aquests maons definim les coordenades (α, β, γ) que assignem a l'extrem del vector $\vec{v}$.

PRODUCTE ESCALAR de DOS VECTORS:

$$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\alpha}$$

punt (!)

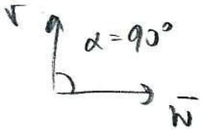
- Teorema: $\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}$ es pot demostrar usant 2 vegades teorema de Pitàgores.

(Nota: en $\mathbb{R}^3$, el mòdul: $\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$, i també s'interpreta com la longitud de la fletxa amb la que representem el vector).

- Algunes propietats del producte escalar:
  1) commutativa: $\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}}$
  2) $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \geq 0}$ (només és zero si $\vec{u} = \vec{0} = (0,0,0)$).
  3) el resultat del producte escalar de dos vectors és un escalar. (un nombre real)
  4) homogènia: $\boxed{\lambda(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (\lambda\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (\lambda\vec{w})}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
  5) distributiva: $\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}}$

- Teorema: siguin $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$. Llavors, $\boxed{\vec{v} \perp \vec{w} \iff \vec{v} \cdot \vec{w} = 0}$

vectors "ortogonals" o "perpendiculars":



(donat $\cos 90° = 0$)

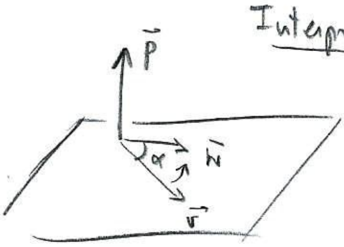
PRODUCTE VECTORIAL de DOS VECTORS:

$$\boxed{\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (v_2 w_3 - v_3 w_2,\ v_3 w_1 - v_1 w_3,\ v_1 w_2 - v_2 w_1)}$$

creu (!)

→ EL RESULTAT és UN ALTRE VECTOR.

Interpretació geomètrica: si $\vec{p} = \vec{v} \times \vec{w}$, llavors:



- $|\vec{p}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin\alpha =$ àrea del paral·lelogram definit per $\vec{v}$ i $\vec{w}$.
- $\vec{p} \perp$ pla definit per $\vec{v}$ i $\vec{w}$.
- sentit: $\vec{v} \to \vec{w}$ regla mà dreta.

PROPIETATS del PRODUCTE VECTORIAL:

1) Anticommutativa: $\boxed{\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}}$

2) Homogènia: $\boxed{(\lambda \vec{v}) \times \vec{w} = \lambda(\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \times (\lambda \vec{w})}$

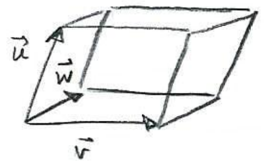
3) si $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$, llavors $\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \parallel \vec{v}}$

▷ PRODUCTE MIXT de TRES VECTORS:

- Definició: $\boxed{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})}$

- Teorema: $$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}}$$ (regla mnemotècnica)

- Interpretació geomètrica: $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ és el volum del paral·lelepípede que té per arestes els vectors $\vec{u}, \vec{v}$ i $\vec{w}$:



$\Longrightarrow$ COROL·LARIS: si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$, llavors:

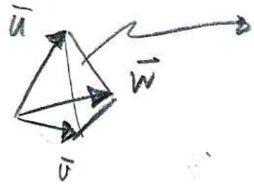
1) $\boxed{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \iff \vec{u}, \vec{v} \text{ i } \vec{w} \text{ són coplanaris}}$

2) $\boxed{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0 \iff \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \text{ són base d'} \mathbb{R}^3}$

- PROPIETATS del PRODUCTE MIXT:

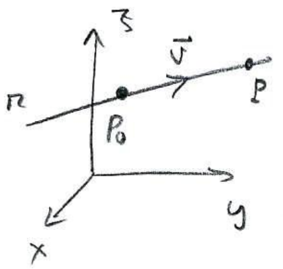
1) si intercanviem dos vectors, el producte mixt canvia de signe.
És a dir: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) =$
$= -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$

2) Volum del tetraedre definit per $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:



$$V = \left| \frac{1}{6} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \right|$$

EQUACIONS de la RECTA en l'ESPAI TRIDIMENSIONAL (3D).



$P(x, y, z) \rightsquigarrow$ punt genèric d'r

$P_0(x_0, y_0, z_0) \rightsquigarrow$ punt conegut ("dado") d'r

$\vec{v} \rightsquigarrow$ vector "director" d'r: qualsevol vector $\neq \vec{0}$ paral·lel a r.

λ és el "paràmetre"

$$\boxed{\vec{p} = \vec{p}_0 + \lambda \vec{v}}$$

$\Longleftrightarrow$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3)$$

Equació vectorial de la recta

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \\ z = z_0 + \lambda v_3 \end{cases}$$

Equacions paramètriques de la recta.

aïllant λ en les paramètriques i fent igualacis

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Equacions contínues de la recta.

eliminant denominadors, trencant els parèntesis, passant-ho tot a un costat i agrupant en 2 qualssevol de les contínues, per exemple en $\boxed{1_r = 2_n}$ i $\boxed{2_n = 3_r}$ tindríem:

$A = v_2$, $B = -v_1$, $C = 0$, $D = (v_1 y_0 - v_2 x_0)$

$A' = 0$, $B' = v_3$, $C' = -v_2$, $D' = (v_2 z_0 - v_3 y_0)$

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

Equacions generals de la recta.

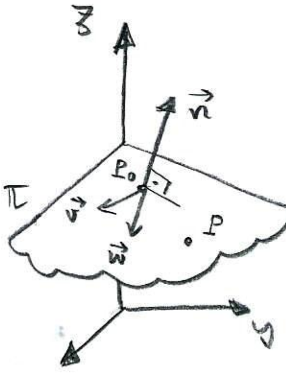
(resolem per Gauss el sistema, que és SCI amb $\boxed{g = 1}$)

si només necessitem $\vec{v}$, fem $\boxed{\vec{v} = \vec{n} \times \vec{n}'}$ (on: $\vec{n} = (A, B, C)$, $\vec{n}' = (A', B', C')$)

(*) CASOS especials (en que no podem descriure r mitjançant les contínues).

- una de les components de $\vec{v}$ s'anul·la, per exemple $v_3 = 0$.
  $\Rightarrow$ només existeix una eq. contínua, $\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$, que duu a una de les generals, $Ax + By + Cz + D = 0$. L'altra general ve directament de la paramètrica on no hi ha λ, $\boxed{z = z_0 \to z - z_0 = 0}$.
- Aquesta recta és paral·lela a un pla coordenat.
- dues de les components de $\vec{v}$ s'anul·len $\Rightarrow$ no existeix cap de les contínues; tenim generals: amb les dues paramètriques on falta el paràmetre.

EQUACIONS del PLA en l'ESPAI TRIDIMENSIONAL



$\{\vec{v},\vec{w}\}$ sistema LLIURE (vectors directors: no nuls i paral·lels al pla ⟺ connecten dos punts diferents del pla).

P_0 : punt "dada".

P : punt genèric.

$\boxed{\vec{n} = \vec{v}\times\vec{w} = (A, B, C)}$ vector "normal" al pla: perpendicular a qualsevol vector que jau al pla (que connecti dos punts del pla).

fixar $\vec{n}$ ens fixa l'orientació de π completament.

Eq. VECTORIAL

π: $\boxed{\vec{p} = \vec{p}_0 + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}}$ ⟺ $\pi: \boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z = z_0 + \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases}}$

Eqs. paramètriques.

(trobem D substituint $\vec{p} = \vec{p}_0$ en $\vec{n}\cdot\vec{p} + D = 0$)

π: $\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$

Eq. GENERAL

més compactament: $\vec{n}\cdot\vec{p} + D = 0$

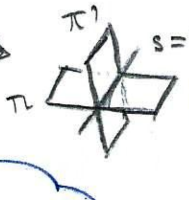
(Resolem el sistema format per una única equació (l'eq. general), que és SCI g=2, amb dos paràmetres, per exemple:
$$\begin{cases} x = -D/A - B/A \cdot \lambda - C/A \cdot \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$)

POSICIONS RELATIVES de 2 PLANS: té certa semblança amb 2 rectes en 2D.

• sistema: $\begin{cases} \pi: Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi': A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$ → solucions: intersecció dels plans, $\pi \cap \pi'$; → matrius sistema: $\bar{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{array}\right)$

• posibilitats:

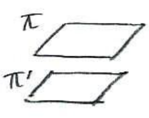
$\boxed{\vec{n} \not\parallel \vec{n}'}$ ⟺ $\{\vec{n}, \vec{n}'\}$ lliure ⟺ $\nexists k: \vec{n} = k\vec{n}'$ ⟺ rg M = 2 ⟺ $\boxed{\text{no } \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}}$ ⟺ SCI: $r = \bar{r} = 2$, $g = 1$ ⟺



PLANS SECANTS: la seva intersecció és la recta s (el sistema són les eqs. grals d's).

$\boxed{\vec{n} \parallel \vec{n}'}$ ⟺ $\{\vec{n}, \vec{n}'\}$ lligat ⟺ $\exists k: \vec{n} = k\vec{n}'$ ⟺ rg M = 1 ⟺ $\boxed{\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}}$

→ PLANS PARAL·LELS



$\boxed{\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}}$

SI: $r = 1$, $\bar{r} = 2$

→ PLANS COINCIDENTS

$\boxed{\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}}$

SCI: $r = \bar{r} = 1$, $g = 2$

▷ POSICIONS RELATIVES de 3 PLANS:

⊛ Sistema de les eqs. generals:

$$\begin{cases} \pi: Ax+By+Cz=-D \\ \pi': A'x+B'y+C'z=-D' \\ \pi'': A''+B''y+C''z=-D'' \end{cases}$$

⟹ vectors normals: $\begin{cases} \vec{n}=(A,B,C) \\ \vec{n}'=(A',B',C') \\ \vec{n}''=(A'',B'',C'') \end{cases}$

⟹ matriu del sistema: $\bar{M}=\left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{array}\right)$

⊛ Serà útil el t^mn de Rouche-F., recordant que en el cas de SCI
- $g=1$: la solució és una recta.
- $g=2$: la solució és un pla.

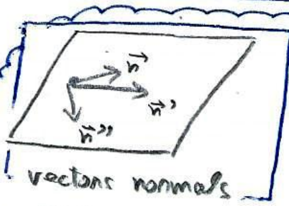
⊛ Considerarem el següent ⇝ **teorema:** $r \neq \bar{r}$ (S.I.) $\Rightarrow \bar{r}=r+1$ ⟵ demo: per a qualsevol matriu A, $rg\,A = rg(A^t)$, i $\bar{M}^t$ només té una fila més, eventualment "no nul·la", que M^t. ☒

⊛ Ens ajudarà, també, la següent interpretació dels $rg\,M$ en termes de la posició relativa dels tres vectors normals:

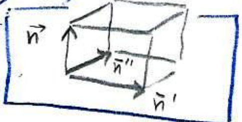
⟺ $rg\,M=1$ ⟺ Tots tres plans tenen la mateixa orientació ("inclinació").

$rg\,M=1$ ⟺ $\vec{n},\vec{n}',\vec{n}''$ proporcionals ⟺ $\vec{n} \parallel \vec{n}' \parallel \vec{n}''$

vectors normals PARAL·LELS



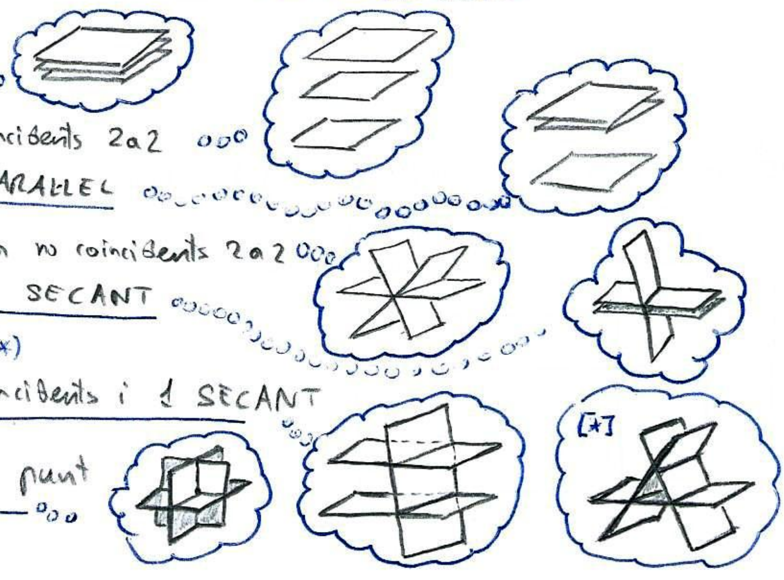
vectors normals COPLANARIS ⟺ $rg\,M=2$ ⟸ Podem situar-nos en una perspectiva des de la qual els plans es veuen com rectes que s'intersequen en punts.



vectors normals defineixen un VOLUM (paral·lelepipèdic) ⟺ $rg\,M=3$ ⟺ $\{\vec{n},\vec{n}',\vec{n}''\}$ és base d'$\mathbb{R}^3$ ⟺ $\det M \neq 0$

ELS 5 CASOS POSSIBLES:

r	$\bar{r}$	posicions relatives:
1	1	COINCIDENTS
1	2	PARAL·LELS no coincidents 2 a 2; 2 COINCIDENTS i 1 PARAL·LEL
2	2	SECANTS en una recta no coincidents 2 a 2; 2 COINCIDENTS i 1 SECANT
2	3	SECANTS 2 a 2 (*); 2 PARAL·LELS no coincidents i 1 SECANT
3	3	SECANTS en 1 punt



▷ POSICIONS RELATIVES de 2 RECTES:

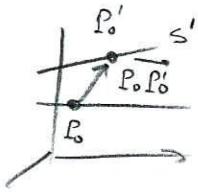
$$\begin{cases} s: \quad \vec{p} = \vec{p}_0 + \lambda \vec{v} \iff \begin{cases} \pi_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z = -D_1 \\ \pi_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z = -D_2 \end{cases} \\ s': \quad \vec{p} = \vec{p}_0' + \lambda \vec{v}' \iff \begin{cases} \pi_1': A_1' x + B_1' y + C_1' z = -D_1' \\ \pi_2': A_2' x + B_2' y + C_2' z = -D_2' \end{cases} \end{cases}$$

sistema de 4 eqs. amb 3 incògnites.

$$\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_1' & B_1' & C_1' & -D_1' \\ A_2' & B_2' & C_2' & -D_2' \end{array} \right)$$

$\Downarrow$

a partir de les equacions vectorials construïm el vector $\boxed{\overrightarrow{P_0P_0'} = \vec{p}_0' - \vec{p}_0}$, que duu d'una recta a l'altra:



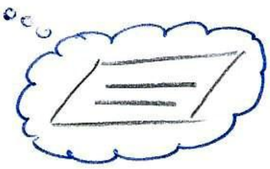
⊛ ESTUDI fent ús dels vectors $\{\vec{v}, \vec{v}', \overrightarrow{P_0P_0'}\}$:

recordant el significat de les posicions relatives de 2 vectors en $\mathbb{R}^3$ en termes del rang del sistema que formen (veure p. v), així com el mateix per a 3 vectors en $\mathbb{R}^3$ (veure p. xi, l'estudi fet per als v. normals):

$\boxed{rg\{\vec{v}, \vec{v}'\} = 1} \iff \boxed{\vec{v} \parallel \vec{v}'} \iff \boxed{\exists k: \vec{v} = k\vec{v}'}$

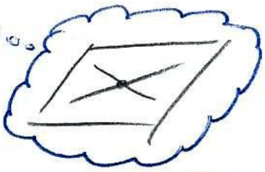
- $\to \boxed{rg\{\vec{v}, \vec{v}', \overrightarrow{P_0P_0'}\} = 1}$: COINCIDENTS ($\exists m: \overrightarrow{P_0P_0'} = m\vec{v}$)

- $\to \boxed{rg\{\vec{v}, \vec{v}', \overrightarrow{P_0P_0'}\} = 2}$: PARAL·LELES ($\nexists m: \overrightarrow{P_0P_0'} = m\vec{v}$)



$\boxed{rg\{\vec{v}, \vec{v}'\} = 2} \iff \boxed{\vec{v} \not\parallel \vec{v}'} \iff \boxed{\nexists k: \vec{v} = k\vec{v}'}$

- $\to \boxed{rg\{\vec{v}, \vec{v}', \overrightarrow{P_0P_0'}\} = 2}$: SECANTS — $\det(\vec{v}, \vec{v}', \overrightarrow{P_0P_0'}) = 0$



- $\to \boxed{rg\{\vec{v}, \vec{v}', \overrightarrow{P_0P_0'}\} = 3}$: ES CREUEN — $\det(\vec{v}, \vec{v}', \overrightarrow{P_0P_0'}) \neq 0$

NOTACIÓ: hem denominat $\det(\vec{v}, \vec{v}', \overrightarrow{P_0P_0'})$ al determinant de la matriu que té per files a les components dels vectors $\vec{v}, \vec{v}', \overrightarrow{P_0P_0'}$.

⊛ ESTUDI en TERMES dels rangs d'M i $\overline{M}$:

com que eqs 1a i 2a defineixen recta s, els valors mínims dels rangs seran $r = 2$, $\bar{r} = 2$.

r	$\bar{r}$	posició
2	2	COINCIDENTS
2	3	PARAL·LELES
3	3	SECANTS
3	4	ES CREUEN

- COINCIDENTS $\to$ $r = \bar{r} = 2$, doncs només dues eqs. són l.i.
- PARAL·LELES $\to$ $r = 2$, doncs els 4 normals als $\pi_1, \pi_2, \pi_1', \pi_2'$ són copl.; $\bar{r} = 3$ per ser SI.
- SECANTS $\to$ SCD.
- ES CREUEN $\to$ $r = 3$, doncs els 4 normals no poden ser copl. (les rectes serien paral. o coincidents); $\bar{r} = 4$ per ser SI.

NOTA: per a posicions relatives de recta i pla, veure p. xxiv.

PROCEDIMENTS per a fer alguns CÀLCULS freqüentment necessaris en PROBLEMES de GEOMETRIA de rectes i plans en 3D:

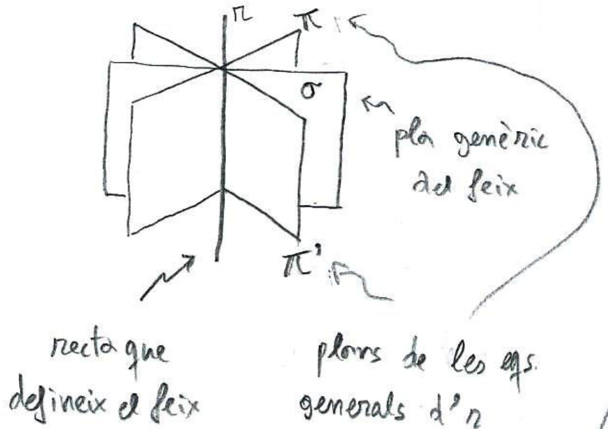
1.- FEIX de PLANS

FEIX de PLANS: donada una recta r, el conjunt de plans σ que la contenen, $F = \{\sigma \mid r \subset \sigma\}$, s'anomena "feix de plans associat a la recta r".

$$r: \begin{cases} \pi: Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi': A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

Eq. del feix

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda(Ax+By+Cz+D) + \mu(A'x+B'y+C'z+D') = 0 \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{no nuls alhora} \end{array}} \quad (1)$$



NOTA: fixant dos valors λ, μ no nuls alhora determinem un pla del feix, $\sigma \in F$, però aquests λ, μ no són únics per al mateix pla. Si multipliquem ambdós per 2, per ex., l'eq. resultant descriu el mateix pla. Això vol dir que si utilitzem l'eq. del feix per a resoldre un problema, trobarem infinites solucions per als paràmetres λ, μ.

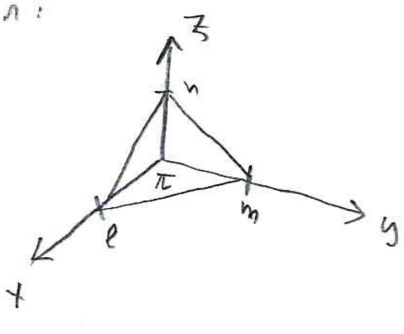
Demo. si considerem el sistema de les tres eqs. dels plans π, π' i σ,
$\bar{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{array}\right)$, com que la solució ha de ser la mateixa recta r que quan f_3 no hi era, és que f_3 és prescindible, és a dir: és c.l. de f_1 i f_2 $\Longrightarrow$ això dona a l'eq. del feix ∎

2.- PUNTS de TALL d'un PLA. EQUACIÓ CANÒNICA (o "segmentària"):

Sigui $\pi: Ax + By + Cz = -D$. Si cap dels A, B, C i D és nul, trobem l'eq. canònica del pla dividint la general entre $-D$ i passant els coeficients de les tres coordenades al denominador:

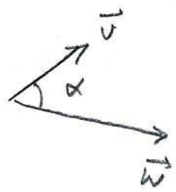
$$(2) \quad \boxed{\pi: \quad \frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1} \quad \text{Eq. canònica del pla}$$

$$(3) \quad \boxed{l = {}^{-D}/_{A} \quad m = {}^{-D}/_{B} \quad n = {}^{-D}/_{C}} \leftarrow \text{punts de tall amb els eixos}$$



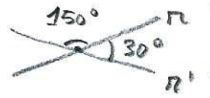
3.- CÀLCUL D'ANGLES:

▷ **ANGLE entre DOS VECTORS no nuls:**



$$\boxed{\alpha = \arccos \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}} \quad (4)$$

(Nota: sempre agafarem $\alpha \in [0, \pi]$)

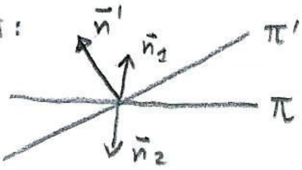
▷ **ANGLE entre DUES RECTES:** el definim a partir de l'angle que formen els seus vectors directors. Com que existeix més d'una possibilitat (), cal donar un criteri addicional per a poder triar-ne: n'agafem el més petit.

Tot això queda reflectit en la següent fórmula, on $\vec{v}$ i $\vec{v}'$ són dos vectors directors qualssevol de les rectes:

$$\boxed{\alpha(r, r') = \arccos \frac{|\vec{v}\cdot\vec{v}'|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{v}'|}} \quad (5)$$

(El valor absolut en el producte escalar ens garanteix que l'angle és el més petit possible).

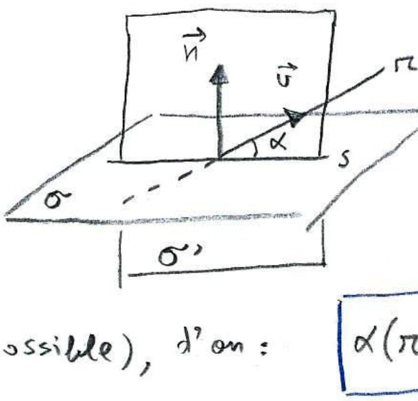
▷ **ANGLE entre DOS PLANS:** el definim a partir de l'angle que formen els seus vectors normals. Com que existeix més d'una possibilitat:



, en triem aquells que donin un valor més petit a l'angle. Això queda reflectit amb el valor absolut del producte escalar en la següent fórmula:

$$\boxed{\alpha(\pi, \pi') = \arccos \frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}'|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}'|}} \quad (6)$$

▷ **ANGLE entre UNA RECTA i UN PLA:** l'angle entre la recta $r: \vec{p} = \vec{p}_0 + \lambda\vec{v}$ i el pla $\sigma: Ax + By + Cz + D = 0 \iff \vec{n}\cdot\vec{p} + D = 0$ es defineix com l'angle que formen r i la recta s, intersecció de σ amb un pla σ' que conté a r i és paral·lel a $\vec{n}$:



$\Longrightarrow$ com a conseqüència d'aquesta definició, $\alpha(r, \sigma)$ és l'angle complementari del que formen $\vec{n}$ i $\vec{v}$ (triant-ne els sentits per a que sigui el més petit possible), d'on:

$$\boxed{\alpha(r, \sigma) = \pi - \arccos \frac{|\vec{n}\cdot\vec{v}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}|} = \arcsin \frac{|\vec{n}\cdot\vec{v}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}|}} \quad (7)$$

4.- PERPENDICULARITAT i PROJECCIONS ORTOGONALS:

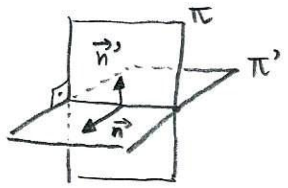
▶ **VECTORS PERPENDICULARS**: direm que dos vectors no nuls, $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$ $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, són perpendiculars quan formin un angle recte ($\alpha = \pi$, ó $90°$):

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{v} \perp \vec{w} \\ \Leftrightarrow \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \end{array}} \quad (8)$$

Caracterització de perpendicularitat entre vtors

(Nota: també en direm que són vectors "ortogonals", escrit $\vec{v} \perp \vec{w}$).

▶ **PLANS PERPENDICULARS**: direm que dos plans π i π' són perpendiculars quan els seus vectors normals ho siguin:



$$\boxed{\pi \perp \pi' \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0} \quad (9)$$

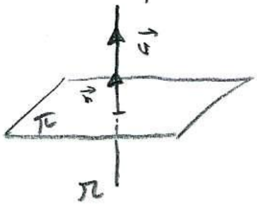
Caracterització de perpendicularitat entre plans.

▶ **MÈTODE de CONSTRUCCIÓ de VECTORS ORTOGONALS**:

Sigui el vector $\vec{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. Fixant-nos en una de les seves components no nul·les (diguem-ne, per exemple, $v_1 = a \neq 0$), en construïm un altre ortogonal a $\vec{v}$ així: $\boxed{\vec{v}_\perp = (b, -a, 0)}$. (10)

▶ **PLA i RECTA PERPENDICULARS**: $r: \vec{p} = \vec{p}_0 + \lambda \vec{v}$ i

$\pi: \vec{n} \cdot \vec{p} + D = 0$ són perpendiculars, $r \perp \pi$, si $\vec{v} \parallel \vec{n}$:



$$\boxed{r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{n}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \exists k \in \mathbb{R}, k \neq 0 \\ \text{tal que } \vec{v} = k\vec{n} \end{array}} \quad (11)$$

Definició — Caracterització

▶ **MÈTODE de CONSTRUCCIÓ de PLA PERPENDICULAR a RECTA**:

Volem eq. general de pla $\pi \perp r$ i que passi per $Q(q_1, q_2, q_3)$:

(12) $\boxed{\vec{n} = \vec{v}}$, i busquem D substituint $\vec{p} = \vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ en

$\vec{n} \cdot \vec{p} + D = 0 \Longrightarrow$ (13) $\boxed{D = -(v_1 q_1 + v_2 q_2 + v_3 q_3)}$ ▨

▷ **RECTES PERPENDICULARS:** $\boxed{r \perp r' \iff \vec{v} \perp \vec{v}'}$ (14)

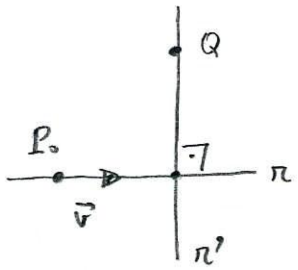
$(r: \ \vec{p} = \vec{p}_0 + \lambda \vec{v}, \quad r': \ \vec{p} = \vec{p}_0{}' + \lambda \vec{v}')$ ← Definició

(15) $\boxed{r \perp r' \iff \vec{v} \cdot \vec{v}' = 0}$

Mètode de caracterització.

▷ **MÈTODE per a TROBAR una recta PERPENDICULAR a una altra:**

Volem r', perpendicular a $r: \ \vec{p} = \vec{p_0} + \lambda \vec{v}$, sent r i r' secants, i passant r' per un $Q(q_1, q_2, q_3)$ extern a r, $Q \notin r$:



⇒ trobem r' com la intersecció del pla π_1 perpendicular a r i que passa per Q i el pla π_2 que conté a r i passa per Q: (16)

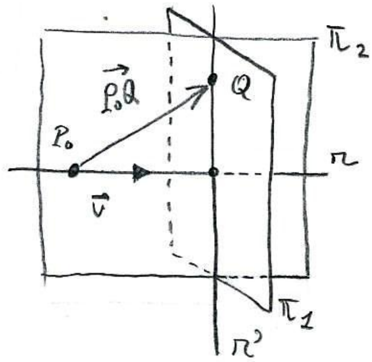
Com fer-ho:

π_1: $\boxed{\vec{n}_1 \cdot \vec{p} + D_1 = 0}$ (17)

$\vec{n_1} = \vec{v}$

substituïm Q en l'eq.:

$D_1 = -(v_1 q_1 + v_2 q_2 + v_3 q_3)$



π_2: $\boxed{\vec{n}_2 \cdot \vec{p} + D_2 = 0}$ (18)

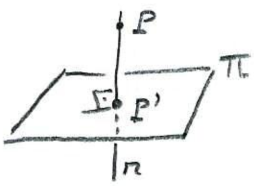
substituïm Q en l'eq:

$\vec{n_2} = \vec{v} \times \overrightarrow{P_0Q}$

$$D_2 = -(q_1, q_2, q_3) \cdot \vec{v} \times \overrightarrow{P_0Q} = \begin{vmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 - x_0 & q_2 - y_0 & q_3 - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

⇒ El sistema format per les darreres equacions generals dels plans π_1 i π_2, [17] i [18], té com a solució la recta r', i conseqüentment és les seves equacions generals. ■

▷ **PROJECCIÓ ORTOGONAL d'un punt sobre un pla:** P' és la projecció ortogonal de P sobre π si és el peu de la perpendicular a π, r, que passa per P: $P' = \pi \cap r$

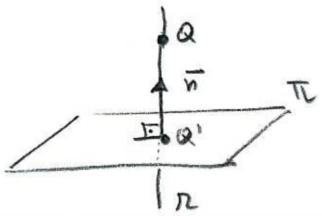


▷ MÈTODE de CONSTRUCCIÓ de RECTA PERPENDICULAR a un PLA (& MÈTODE de TROBAR la PROJECCIÓ ORTOGONAL d'un PUNT sobre un PLA):

Volem recta $r: \vec{p} = \vec{p_0} + \lambda \vec{v}$, perpendicular al pla $\pi: \vec{n}\cdot\vec{p} + D = 0$ i que passa pel punt $Q(q_1, q_2, q_3)$, extern al pla $Q \notin \pi$.

$\Longrightarrow$ Fem en l'eq. d'r: $\left\{\begin{matrix} \vec{p_0} = \vec{q} = (q_1, q_2, q_3) \\ \vec{v} = \vec{n} = (A, B, C) \end{matrix}\right\}$, és a

dir: $\boxed{r: \vec{p} = \vec{q} + \lambda \vec{n}}$ (19)



COROL·LARI: si trobem la intersecció de r amb π, serà la projecció ortogonal de Q sobre π. (20)

▷ COM FER-HO? $\rightsquigarrow$ habitualment, si tenim l'eq. general d'un pla $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, i les dues gens. d'una recta secant a ell, $r: \left\{\begin{matrix} A_1x + B_1y + C_1y + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2y + D_2 = 0 \end{matrix}\right\}$, el sistema sabem que és SCD i resolent-lo coneixerem les coordenades (x, y, z) de la intersecció $\pi \cap r$.

En el nostre cas, però, tenim la recta expressada en forma vectorial, [19]. Per això és més pràctic substituir amb [19] en l'eq. general del pla: $\vec{n}\cdot\vec{p} + D = 0 \Longrightarrow \vec{n}\cdot(\vec{q} + \lambda\vec{n}) + D = 0$

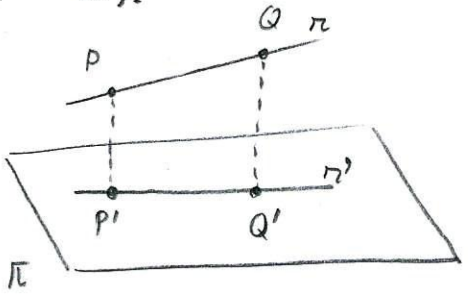
$\Longrightarrow \vec{n}\cdot\vec{q} + \lambda \underbrace{\vec{n}\cdot\vec{n}}_{|\vec{n}|^2} + D = 0 \Longrightarrow_{(*)}$ $(\vec{p} = \vec{q} + \lambda\vec{n})$ $[*] \Longrightarrow \boxed{\lambda = -\dfrac{D + \vec{n}\cdot\vec{q}}{|\vec{n}|^2}}$ (21)

... amb aquest valor del paràmetre de la recta, calculem les coordenades de Q' usant l'equació vectorial [19]:

$$\boxed{\vec{q}\,' = \vec{q} - \frac{D + \vec{n}\cdot\vec{q}}{|\vec{n}|^2}\cdot\vec{n}} \quad (21.\text{bis})$$

PROJECCIÓ ORTOGONAL d'una RECTA SOBRE un PLA:

Si $r \not\subset \pi$ (recta r no continguda al pla π), definim la projecció ortogonal d'r sobre π com el conjunt r' de totes les projeccions ortogonals dels punts d'r sobre π (si $r \not\perp \pi$, clarament r' és una altra recta, aquesta sí continguda en π, $r' \subset \pi$, que podem visualitzar com "l'ombra" que projecta r sobre π):

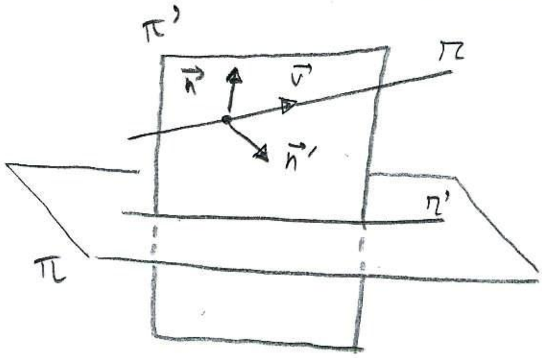


(NOTA: si $r \perp \pi$, la projecció és un punt: la intersecció $r \cap \pi$)

Teorema: si $r: \vec{p} = \vec{p_0} + \lambda \vec{v}$ (22)

i $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

no són perpendiculars, $r \not\perp \pi$, la projecció ortogonal d'r sobre π, r', és la intersecció de π amb el pla π', que conté r i és perpendicular a π:



$\Rightarrow$ això ens proporciona un mètode per a trobar les eqs. grals. d'r':

(23) $\boxed{\vec{n}' = \vec{n} \times \vec{v}}$ (vector normal a π')

eq. gral del pla: $\boxed{\pi' : \vec{n}' \cdot \vec{p} + D = 0}$ (24)

calculem substituint $\vec{p} = \vec{p_0}$ en eq.:

(25) $\boxed{D = -\vec{n}' \cdot \vec{p_0}} =$

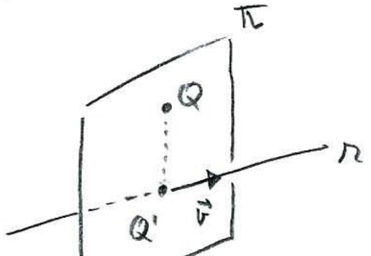
$$= \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ A & B & C \end{vmatrix}$$

Les eqs. generals de π' — que acabem de trobar — i π — dada — conformen les eqs. generals d'r' ∎

↳ Si necessitéssim l'eq. vectorial d'r', podríem ara trobar-la resolent en funció d'un paràmetre λ el sistema SCI ($g=1$) format per les seves eqs. generals; una altra manera hauria sigut trobar inicialment les eqs. generals d'r i resoldre el SCI ($g=1$) que formen amb $\pi: Ax+By+Cz+D=0$. ∎

PROJECCIÓ ORTOGONAL d'un PUNT sobre una RECTA:

La projecció ortogonal d'un punt $Q(q_1, q_2, q_3)$ sobre una recta $r: \vec{p} = \vec{p_0} + \lambda \vec{v}$ es defineix com el punt Q' d'intersecció del pla π, perpendicular a r i que passa per Q, amb la recta r [NOTA: si $Q \notin r$, també es pot dir que Q' és el peu de la perpendicular traçada des de Q fins a r]:



MÈTODE: $\boxed{\pi: \ \vec{n} \cdot \vec{p} + D = 0}$ (26)

(27) $\boxed{\vec{n} = \vec{v}}$

el calculem substituint $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ en l'eq.:

$\boxed{D = -(v_1 q_1 + v_2 q_2 + v_3 q_3)}$ (28)

Després, resolem la intersecció

$Q' = \pi \cap r$; com que tenim r expressada amb l'eq. vectorial, senzillament haurem de substituir $\vec{p} = \vec{p_0} + \lambda \vec{v}$ en [26], trobar λ, i trobar $\vec{q}'$ substituint amb aquest λ en l'eq vectorial d'r:

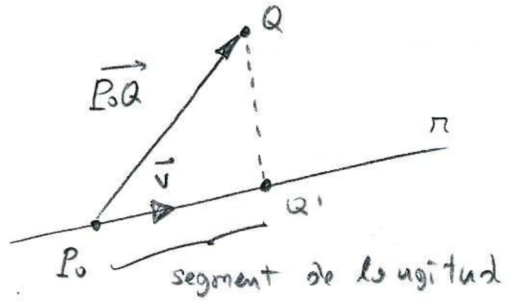
$$\underbrace{\vec{n}}_{\vec{v}} \cdot \underbrace{\vec{p}}_{\vec{p_0} + \lambda \vec{v}} + \underbrace{D}_{-\vec{v} \cdot \vec{q}} = 0 \implies \vec{v} \cdot \vec{p_0} + \lambda \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{v}}_{|\vec{v}|^2} - \vec{v} \cdot \vec{q} = 0$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\vec{v} \cdot (\vec{q} - \vec{p_0})}{|\vec{v}|^2}} \quad (29)$$

$$\boxed{\vec{q}' = \vec{p_0} + \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_0Q}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}} \quad (30)$$

$\vec{q}' = \vec{p_0} + \lambda \vec{v}$; $\overrightarrow{P_0Q} = \vec{q} - \vec{p_0}$

Una altra manera de justificar aquest resultat és construint el següent triangle rectangle $\widehat{P_0Q'Q}$:



$\dfrac{\overrightarrow{P_0Q} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$

per a arribar a Q' des de P_0, hem d'avançar aquesta longitud seguint el vector unitari $\hat{v} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \implies$

$$\vec{q}' = \vec{p_0} + \frac{\overrightarrow{P_0Q} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

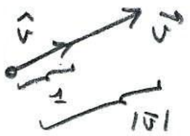
5.- DESPLAÇAMENTS des d'UN PUNT a UN ALTRE:

▶ Vector unitari: $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ és "unitari" quan $|\vec{u}| = 1$

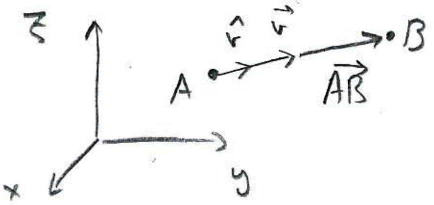
▶ Vector $\hat{v}$, unitari associat a un altre vector $\vec{v} \neq \vec{0}$:

$\hat{v}$ és unitari i té la mateixa direcció i sentit que $\vec{v}$.

El seu càlcul: $\boxed{\hat{v} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}$ (31) $\Rightarrow$ COROL·LARI: Podem escriure qualsevol $\vec{v} \neq \vec{0}$ així: $\boxed{\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \hat{v}}$ (32)

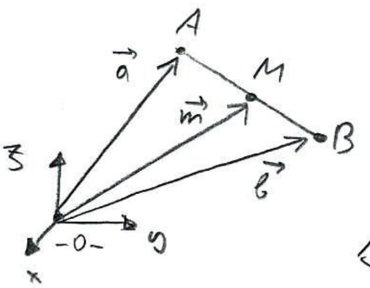


▶ Desplaçament segons l'orientació d'un $\vec{v} \neq \vec{0}$: si volem conèixer quin vector $\overrightarrow{AB}$ ens duu d'un punt A "inicial" al llarg d'un segment de longitud l donada i seguint la direcció i sentit d'un altre vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ donat, tenim que $\boxed{\overrightarrow{AB} = l\,\hat{v}}$ (33) $\Leftrightarrow$ $\boxed{\vec{b} = \vec{a} + l\,\hat{v}}$ (34).



6.- PUNTS MITJANS i SIMÈTRICS:

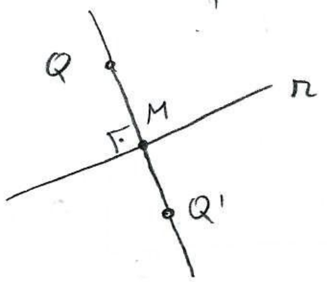
▶ Punt mitjà $M(m_1, m_2, m_3)$ del segment $\overline{AB}$, d'extrems $A(a_1, a_2, a_3)$ i $B(b_1, b_2, b_3)$:



$$\boxed{\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}} \ (35) \Leftrightarrow \boxed{(m_1, m_2, m_3) = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right)} \ (36)$$

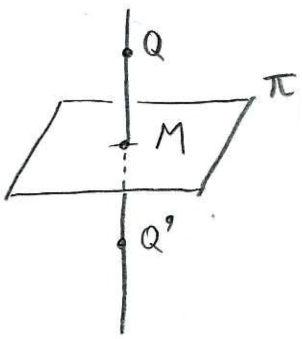
$\Leftrightarrow$ «Les coordenades del punt mitjà són les mitjanes aritmètiques de les corresponents coordenades dels extrems» (37)

▶ Punt Q', simètric de Q respecte de la recta r (suposant que $Q \notin r$): si M és el peu de la perpendicular que va de Q a r, definirem Q' com l'altre extrem del segment $\overline{QQ'}$ que té a Q per extrem i M per punt mitjà.



PROCEDIMENT: Trivialment, $\boxed{\vec{q}\,' = \vec{q} + 2\,\overrightarrow{QM}}$ (38).
Per tant, només hem de trobar les coordenades del punt M, que és la projecció ortogonal de Q sobre r. Podem fer això amb el procediment que duu a [30], que en aquest cas podríem escriure així: (39) $\boxed{\vec{m} = \vec{p_0} + \dfrac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_0Q}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}}$, i d'aquí obtenim
$\overrightarrow{QM} = \vec{m} - \vec{q} \xRightarrow{[38]} \boxed{\vec{q}\,' = \vec{q} + 2\vec{m} - 2\vec{q} = 2\vec{m} - \vec{q}}$ ■

▶ Punt Q', simètric de Q respecte del pla π (suposant $Q \notin \pi$): si M és el peu de la perpendicular que va de Q a π, definirem Q' com l'altre extrem del segment $\overline{QQ'}$ que té a Q per extrem i M per punt mitjà.



PROCEDIMENT: Trivialment, $\boxed{\vec{q}\,' = \vec{q} + 2\overrightarrow{QM}}$ $\Leftrightarrow$ [38].
Per tant, només cal trobar les coordenades del punt M, que és la projecció ortogonal de Q sobre π. Podem fer això amb el procediment que duu a [21.bis], que en aquest cas podríem escriure així: $\boxed{\vec{m} = \vec{q} - \dfrac{D + \vec{n} \cdot \vec{q}}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}}$ (40), i d'aquí obtenim:
$\overrightarrow{QM} = \vec{m} - \vec{q} \xRightarrow{[38]} \boxed{\vec{q}\,' = 2\vec{m} - \vec{q}}$, anàlogament al fet en simètric de Q respecte de recta r. ■

6.- DISTÀNCIA entre DOS PUNTS:

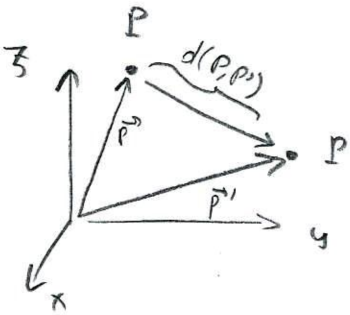
Recordem que el mòdul, $|\vec{v}|$, d'un vector qualsevol $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, és la llargada de la fletxa amb la qual el representem, i es pot calcular amb una doble aplicació del t^{ma} de Pitàgores: $\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$ (41)

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2}$ (42) ← (que ja vam veure en pàg. vii).

Com que la distància $d(P, P')$ entre dos punts $P(x,y,z)$ i $P'(x',y',z')$ qualsevol serà la llargada del vector que els uneix, $|\overrightarrow{PP'}|$, automàticament podem escriure que:

$$\boxed{d(P,P') = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}} \quad (43)$$

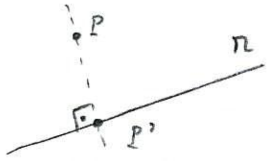
Càlcul de la distància entre DOS PUNTS.



7.- DISTÀNCIA d'un PUNT a UNA RECTA:

Definim la distància d'un punt P a una recta r com la distància entre P i la seva projecció ortogonal sobre r, P':

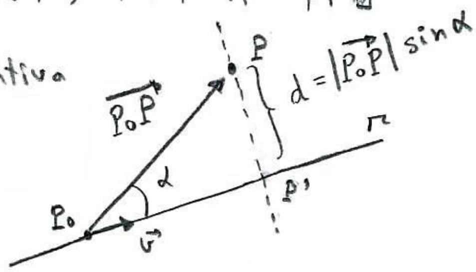
$$(44) \quad \boxed{d(P,r) = d(P,P')} = |\overrightarrow{PP'}|$$



MÈTODES de CÀLCUL:

A.- Trobem P' amb el mètode del pla $\pi \perp r$ que passa per P $\Rightarrow$ $P' = \pi \cap r$, com en [3º], i $d(P,r) = |\overrightarrow{PP'}| = |\vec{p}' - \vec{p}|$ ∎

B.- Si $r: \vec{p} = \vec{p}_0 + \lambda \vec{v}$, una forma alternativa és amb un triangle rectangle:



$$|\vec{v} \times \overrightarrow{P_0P}| = |\vec{v}| \cdot \underbrace{|\overrightarrow{P_0P}| \sin\alpha}_{d(P,r)} \Rightarrow \boxed{d(P,r) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{P_0P}|}{|\vec{v}|}} \quad (45)$$

C.- Una manera alternativa de raonar, que condueix a la mateixa fórmula que en [30], però no involucra el pla $\pi \perp r$, és usar que $\vec{p}\,' = \vec{p}_0 + \lambda \vec{v}$ (*) per a un cert valor d'λ, doncs $P' \in r$, i $\overrightarrow{PP'} = (\vec{p}\,' - \vec{p}) \perp \vec{v} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = (\vec{p}\,' - \vec{p}) \cdot \vec{v} \overset{(*)}{=} (\vec{p}_0 + \lambda \vec{v} - \vec{p}) \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{p_0} + \lambda \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{v}}_{|\vec{v}|^2} - \vec{v}\,\vec{p} \Rightarrow$$

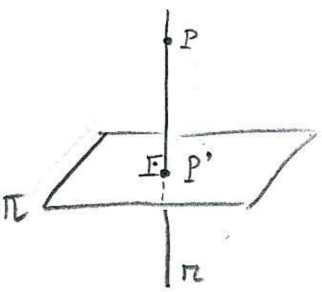
$$\Rightarrow \lambda = \frac{\vec{v} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_0)}{|\vec{v}|^2} \underset{\overrightarrow{P_0P} = \vec{p} - \vec{p}_0}{\overset{[*]}{\Longrightarrow}} \boxed{\vec{p}\,' = \vec{p}_0 + \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_0 P}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}} \quad (46)$$

, fórmula anàloga a la que es trobaria a partir de [30].

8.- DISTÀNCIA d'un PUNT a un PLA:

Definim la distància d'un punt P a un pla π com la distància entre P i la seva projecció ortogonal sobre π, P':

$$(47) \quad \boxed{d(P, \pi) = d(P, P')} = |\overrightarrow{PP'}|$$



(*) MÈTODES de CÀLCUL: (on: $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$)

A.- Trobem P' amb el mètode de la recta $r \perp \pi$ que passa per $P \Rightarrow P' = r \cap \pi$, com s'ha raonat per a deduir [21.bis], que en aquest cas duria a:

$$\boxed{\vec{p}\,' = \vec{p} - \frac{D + \vec{n} \cdot \vec{p}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n}} \quad (48) \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \vec{p}\,' - \vec{p} = -\frac{D + \vec{n} \cdot \vec{p}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n} \overset{[47]}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \boxed{d(P, \pi) = \left| \frac{D + \vec{n} \cdot \vec{p}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n} \right|} \quad (49)$$

B.- A partir de les coordenades $P(x, y, z)$ i el vector $\vec{n} = (A, B, C)$, podem aplicar directament una fórmula fàcil de recordar,

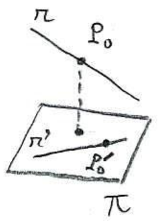
$$\boxed{d(P, \pi) = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}} \quad (50)$$

(es dedueix de [49] aplicant $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ en $|(D + \vec{n} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{n}| = |D + \vec{n} \cdot \vec{p}| \cdot |\vec{n}|$)

9.- DISTÀNCIA entre DUES RECTES:

- Si són <u>coincidents</u> o <u>secants</u> $\Longrightarrow$ $\boxed{d(r, r') = 0}$ (51)
- Si $r \parallel r' \Longrightarrow \boxed{d(r, r') = d(P, r')}$, $\forall P \in r$ (52)

  fem el càlcul amb els mètodes [44], [45] i [46].
- Si r i r' es creuen, la distància és igual a la que hi ha entre qualsevol punt d'r i un pla π que conté a r' i és paral·lel a r, que tindrà per equacions: $\pi: \vec{p} = \vec{p_0}' + \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}' \Longleftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0$



* MÈTODES de CÀLCUL:

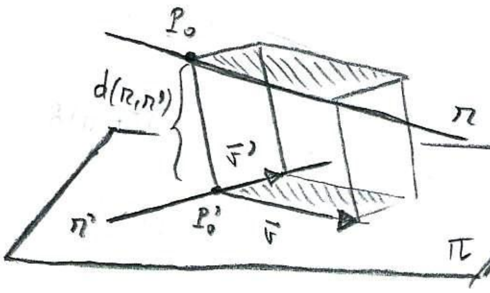
A.- Trobem eq. de π amb $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{v}'$ i $D = -\vec{n} \cdot \vec{p_0}'$, i apliquem la fórmula [50] per a calcular $d(P_0, \pi)$:

$$\boxed{d(r, r') = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}} \quad (53)$$

B.- Apliquem directament la fórmula: $\boxed{d(r, r') = \dfrac{|(\overrightarrow{P_0P_0'}, \vec{v}, \vec{v}')|}{|\vec{v} \times \vec{v}'|}}$ (54),

que pot justificar-se a partir de la [53] fent $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = \vec{n} \cdot \vec{p_0} - \vec{n} \cdot \vec{p_0}' = \overrightarrow{P_0'P_0} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{P_0'P_0} \cdot \vec{v} \times \vec{v}' =$
$= (\overrightarrow{P_0'P_0}, \vec{v}, \vec{v}')$ ("producte mixt"), o veient senzillament que $d(r, r')$ és l'altura del paral·lelepípede que té per arestes els vectors $\overrightarrow{P_0'P_0}$, $\vec{v}$ i $\vec{v}'$ sortint de P_0', paral·lelepípede que té per àrea de la base $A = |\vec{v} \times \vec{v}'|$ i volum
$V = |(\overrightarrow{P_0'P_0}), \vec{v}, \vec{v}')| = |(\overrightarrow{P_0P_0'}, \vec{v}, \vec{v}')| = A \cdot \text{altura} = |\vec{v} \times \vec{v}'| \cdot d(r, r')$ ∎

pel valor absolut, donat $-\overrightarrow{P_0'P_0} = \overrightarrow{P_0P_0'}$.



10.- DISTÀNCIA entre recta i PLA:

- Cal saber fer l'estudi, prèviament, de les <u>posicions relatives de recta i pla</u>:

$$r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \quad \pi: A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \Longrightarrow \bar{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{array}\right) \Longrightarrow$$

r	$\bar{r}$	POSICIÓ:
2	2	contingudа ($r \subset \pi$)
2	3	paral·lela ($r \parallel \pi$)
3	3	secants (SCD)

(55)

- Aquest estudi també es pot fer a partir de l'equació vectorial de la recta, $r: \vec{p} = \vec{p_0} + \lambda\vec{v}$, i resulta força més senzill. Considerant que l'eq. general del pla s'escriu $\pi: Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{p} + D = 0$, $\boxed{\pi \text{ i } r \text{ seran secants} \Leftrightarrow \vec{n} \not\perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{v} \neq 0}$ (56)

i si $\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$ i no són secants, mirarem si P_0 verifica l'eq. de π:

(57) $$\boxed{\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{v} = 0 \text{ i } \vec{n}\cdot\vec{p_0} = -D \Rightarrow r \subset \pi \quad \text{(CONTINGUDA)} \\ \vec{n}\cdot\vec{v} = 0 \text{ i } \vec{n}\cdot\vec{p_0} \neq -D \Rightarrow r \parallel \pi \quad \text{(PARAL·LELS)} \end{cases}}$$

- Distàncies: si $r \subset \pi$ ó r i π secants, $\boxed{d(r,\pi) = 0}$ (58).

Si $r \parallel \pi$, la distància serà $\boxed{d(r,\pi) = d(P,\pi)\ ,\ \forall P \in r}$ (59); per exemple, $P = P_0$ i calculem la distància amb [50]:

$$\boxed{d(r,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}} \quad (60)$$

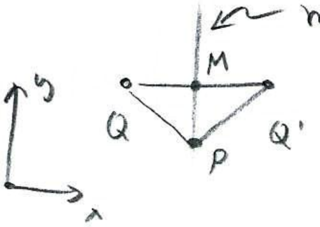
11.- DISTÀNCIA entre DOS PLANS:

- Si són coincidents o secants $\Rightarrow$ $\boxed{d(\pi,\pi') = 0}$ (61)
- Si són paral·lels, $\boxed{d(\pi,\pi') = d(P,\pi')\ ,\ \forall P \in \pi}$ (62)

Per a conèixer les coordenades d'un punt $P(x,y,z) \in \pi$ i poder aplicar l'eq. [50] per a fer el càlcul, si tenim π definit amb l'eq. general, $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, primer resolem el sistema format per aquesta única equació en termes de dos paràmetres λ μ per a trobar les equacions paramètriques de π, i després produïm el punt més senzill possible $P \in \pi$, habitualment triant $\lambda = \mu = 0$.

12.- GENERALITZACIÓ del CONCEPTE de MEDIATRIU a 3D:

En el pla, el conjunt de punts que equidisten de dos punts donats Q i Q' és la mediatriu del segment $\overline{QQ'}$:



mediatriu: $d(P,Q) = d(P,Q')$ $\forall P \in$ mediatriu.

Aquesta condició, en 3D, duu a un pla perpendicular al segment $\overline{QQ'}$ i que passa pel seu punt mitjà M, on $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{q} + \vec{q}\,')$, i té per vector normal $\vec{n} = \overrightarrow{QQ'} = \vec{q}\,' - \vec{q}$ $\Rightarrow$

$$D = -\vec{n}\cdot\vec{m} = \underbrace{-(\vec{q}\,' - \vec{q})}_{(\vec{q} - \vec{q}\,')} \cdot \frac{1}{2}(\vec{q} + \vec{q}\,') \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\left(|\vec{q}|^2 - |\vec{q}\,'|^2\right)$$

suma x dif = dif de $(\ldots)^2$

$$\Rightarrow \boxed{\pi : (\vec{q}\,' - \vec{q})\cdot\vec{p} + \frac{1}{2}\left(|\vec{q}|^2 - |\vec{q}\,'|^2\right) = 0} \quad (63)$$

Una altra forma de veure-ho: desenvolupem la condició $d(P,Q) = d(P,Q')$

$(\ldots)^2 = (\ldots)^2$

$\Rightarrow (x - q_1)^2 + (y - q_2)^2 + (z - q_3)^2 = (x - q_1')^2 + (y - q_2')^2 + (z - q_3')^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{x^2} + q_1^2 - 2q_1 x + \cancel{y^2} + q_2^2 - 2q_2 y + \cancel{z^2} + q_3^2 - 2q_3 z =$

$= \cancel{x^2} + q_1'^2 - 2q_1' x + \cancel{y^2} + q_2'^2 - 2q_2' y + \cancel{z^2} + q_3'^2 - 2q_3' z \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(\vec{q}\,' - \vec{q})\vec{p} + |\vec{q}|^2 - |\vec{q}\,'|^2 = 0 \xRightarrow{\%\,2} [63]$ ▨

13.- CÀLCUL d'intersecció entre 2 RECTES SECANTS: $Q = r \cap r'$:

A.- Resolem el sistema SCD de 4 eqs. i 3 incògnites format per les generals.

B.- $r: \vec{p} = \vec{p}_0 + \lambda\vec{v}$, $r': \vec{p} = \vec{p}_0\,' + \mu\vec{v}\,'$ $\Rightarrow$ igualem $\vec{p}_0 + \lambda\vec{v} = \vec{p}_0\,' + \mu\vec{v}\,'$

$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{P_0P_0'} = \lambda\vec{v} - \mu\vec{v}\,'}$ (64) $\rightarrow$ resolem aquest SCD per a λ (ó μ)

$\Rightarrow \boxed{\vec{q} = \vec{p}_0 + \lambda\vec{v}}$ (65) (o: $\vec{q} = \vec{p}_0\,' + \mu\vec{v}\,'$)

(!!) CAMÍ ÒPTIM

C.- Substituïm $\vec{p} = \vec{p}_0 + \lambda\vec{v}$ en una de les generals d'r', $\vec{n}\,'\cdot\vec{p} + D' = 0$ (⚠ una tal que $\boxed{\vec{n}\,' \not\perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{n}\,'\cdot\vec{v} \neq 0}$ (66)) $\Rightarrow$ trobem λ i: $\boxed{\vec{q} = \vec{p}_0 + \lambda\vec{v}}$ (67) ▨