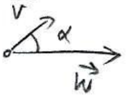
[dimecres, 27 - IV - 2016] | MATES (2n BAT.) | Exer. (67), (68), (69) i (70)

Exercicis T.5 "Geometria": posicions relatives de 3 plans, pla i recta, recta i recta.

REPÀS de TEORIA: RECORDEM: $\boxed{\vec{v}\cdot\vec{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\alpha}$



▶ POSICIONS RELATIVES de 2 VECTORS $\vec{v}$ i $\vec{w}$ ($\vec{v},\vec{w} \neq \vec{0}$ "no nuls"):

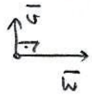
PARAL·LELS $\vec{v} \parallel \vec{w}$

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\exists k \neq 0 : \vec{v} = k\vec{w}}$ ("són proporcionals")

p. exemple: (en $\mathbb{R}^2$)
$(1,2) \parallel (-2,-4)$,
doncs $k = -2$:
$-2\cdot(1,2) = (-2,-4)$ ∎

NO PARAL·LELS $\vec{v} \not\parallel \vec{w}$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\nexists k \neq 0 : \vec{v} = k\vec{w}}$ (no són proporcionals) $\Longrightarrow$

- **PERPENDICULARS** $\vec{v} \perp \vec{w}$



$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\vec{v}\cdot\vec{w} = 0}$

p. ex:
$(0,1)\cdot(1,0) = 0+0 = 0$
$\Rightarrow (0,1) \perp (1,0)$
(en $\mathbb{R}^2$)

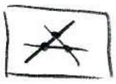
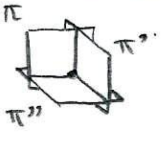
- **OBLICUS** $\vec{v}\cdot\vec{w} \neq 0$

p. ex: $(1,1)\cdot(1,0) = 1\cdot1 + 0 = 1$
$\Rightarrow (1,1) \not\perp (1,0)$ [en $\mathbb{R}^2$]

▶ POSICIONS RELATIVES de 3 PLANS:

sistema
$$\begin{cases} \pi: & Ax + By + Cz + D = 0 \rightarrow \vec{n} = (A,B,C) \\ \pi': & A'x + B'y + C'z + D' = 0 \rightarrow \vec{n}' = (A',B',C') \\ \pi'': & A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \rightarrow \vec{n}'' = (A'',B'',C'') \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{array}\right), \quad \underbrace{\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}}_{=M}$$

$r = rg M$	$\bar{r} = rg \bar{M}$	POSICIONS
1	1	COINCIDENTS 
1	2	PARAL·LELS no COINCIDENTS  2 COINCIDENTS i 1 PARAL·LEL 
2	2	SECANTS en una recta NO COINCIDENTS  2 COINCIDENTS i 1 SECANT 
2	3	SECANTS 2 a 2  2 PARAL·LELS i 1 SECANT 
3	3	SECANTS en 1 PUNT 

(files amb $r = 1$): $\boxed{\vec{n} \parallel \vec{n}' \parallel \vec{n}''}$ $\Downarrow$ proporcionals

(files amb $r = 2$): $\boxed{\{\vec{n},\vec{n}',\vec{n}''\} \text{ coplanaris}}$ $\Downarrow$ $\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0$

(SECANTS en 1 PUNT): $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \neq 0}$

POSICIONS RELATIVES de PLA i RECTA :

$$\left.\begin{array}{l} \pi:\ Ax+By+Cz+D=0 \iff \vec{n}\cdot\vec{p}+D=0 \\ r:\ \left\{\begin{array}{l} A'x+B'y+C'z+D'=0 \\ A''x+B''y+C''z+D''=0 \end{array}\right\} \iff \vec{p}=\vec{p}_0+\lambda\vec{v} \end{array}\right\} \quad \bar{M}=\overset{=M}{\left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{array}\right)}$$

$$\boxed{\vec{n}\cdot\vec{v}} = \begin{cases} \boxed{\neq 0} \iff \boxed{\vec{n}\not\perp\vec{v}} \implies \text{SECANTS} \\ \boxed{=0} \iff \boxed{\vec{n}\perp\vec{v}} \text{ (no secants)} : \begin{cases} P_0\in\pi \implies \boxed{r\subset\pi} \ \ r \text{ continguda en } \pi \\ P_0\notin\pi \implies r\parallel\pi \ \ \text{PARAL·LELS} \end{cases} \end{cases}$$

$r=rgM$	$\bar{r}=rg\bar{M}$
3	3
2	2
2	3

caracterització amb $(\vec{n},\vec{v},P_0)$ ← dues possibilitats → caracterització amb rangs

POSICIONS RELATIVES de RECTA i RECTA

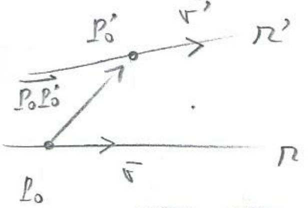
$$\left.\begin{array}{l} r:\ \left\{\begin{array}{l} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{array}\right\} \iff \vec{p}=\vec{p_0}+\lambda\vec{v} \\ r':\ \left\{\begin{array}{l} A'_1x+B'_1y+C'_1z+D'_1=0 \\ A'_2x+B'_2y+C'_2z+D'_2=0 \end{array}\right\} \iff \vec{p}=\vec{p_0}'+\mu\vec{v}' \end{array}\right\} \quad \bar{M}=\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{ccc} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 \end{array}}_{M} & \begin{array}{c} -D_1 \\ -D_2 \\ -D'_1 \\ -D'_2 \end{array} \end{array}\right)$$

$\boxed{¿\ \vec{v}\parallel\vec{v}'\ ?}$

→ $\boxed{\text{SÍ } (\vec{v}=k\vec{v}')} \implies \boxed{¿\ \overrightarrow{P_0P_0'}\parallel\vec{v}\ ?}$

- → $\boxed{\text{SÍ } (\overrightarrow{P_0P_0'}=m\vec{v})}$: COINCIDENTS 
- → $\boxed{\text{NO } (\overrightarrow{P_0P_0'}\neq m\vec{v})}$: PARAL·LELES 

→ $\boxed{\text{NO } (\vec{v}\neq k\vec{v}')} \impliedby \boxed{\det(\vec{v},\vec{v}',\overrightarrow{P_0P_0'})} = \begin{cases} \boxed{=0} : \text{SECANTS} \\ \boxed{\neq 0} : \text{ES CREUEN} \end{cases}$



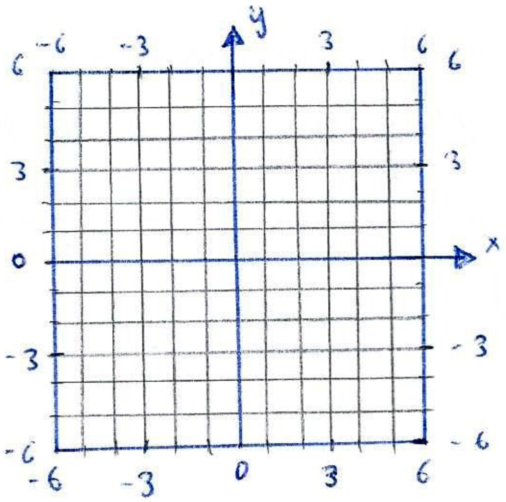
També es poden caracteritzar amb els rangs $\bar{r}=rg\bar{M}$, $r=rgM$:

r	$\bar{r}$	posició	
2	2	COINCIDENTS	SCI, g = 1
2	3	PARAL·LELES	SI, els 4 $\vec{n}$ coplanaris
3	3	SECANTS	SCD
3	4	ES CREUEN	SI, els 4 $\vec{n}$ no coplanaris

per a trobar el punt d'intersecció, podem resoldre el sistema de les 4 generals, o millor encara substituir amb $\vec{p}=\vec{p}_0+\lambda\vec{v}$ en una de les gens. d'r' (on el $\vec{n}'\not\perp\vec{v} \iff \vec{n}'\cdot\vec{v}\neq 0$), trobem $\lambda \implies$ trobem $\vec{p}$ ■

67 Considera els següents vectors d' $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \vec{v} = (2,3) \\ \vec{w} = (4,6) \\ \vec{u} = (-2,-3) \\ \vec{t} = (6,-4) \\ \vec{s} = (3,1) \end{cases}$$



a) Dibuixa en una quadrícula com la de la figura les cinc fletxes amb les que representaríem els anteriors vectors. Totes les fletxes han de sortir de l'origen, (0,0). Indica a l'extrem de cada fletxa el nom del vector que representa.

b) Només mirant el dibuix que has fet, digues la posició relativa (PARAL·LELS, PERPENDICULARS ó OBLICUS) de les següent quatre parelles de vectors: $\vec{v}$ i $\vec{w}$, $\vec{v}$ i $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{t}$, $\vec{v}$ i $\vec{s}$.

c) Justifica analíticament cadascuna de les respostes de l'apartat anterior.

d) Sabem que dos vectors no nuls $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ són paral·lels quan són proporcionals, és a dir: quan $\exists k \neq 0 : \vec{a} = k\vec{b}$. Per a cada parella de vectors paral·lels de l'apartat (67.b), troba'n la constant de proporcionalitat (la k).

68 Troba la posició relativa de cadascun dels següients conjunts de tres plans. Quan siguin secants en un punt o secants en una recta, troba'n, respectivament, les coordenades del punt intersecció o l'eq. vectorial de la recta intersecció.

a) $\begin{cases} \pi: x - y + z - 2 = 0 \\ \pi': -x + y - z + 2 = 0 \\ \pi'': 2x - 2y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \pi: x - y + z - 2 = 0 \\ \pi': -x + y + z - 2 = 0 \\ \pi'': x - y + 3z - 6 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \pi: (x, y, z) = (2, 0, 0) + \lambda(1,1,0) + \mu(-1, 0, 1) \\ \pi': (x, y, z) = (-1, 0, 1) + \lambda(2,1,1) + \mu(1, 0, 1) \\ \pi'': (x, y, z) = (-2, 1, 1) + \lambda(1,1,0) + \mu(-1, 2, 1) \end{cases}$

d) $\begin{cases} \pi: -x + y - 2z + 7 = 0 \\ \pi': x + y - z = 0 \\ \pi'': -x - 2y + z - 2 = 0 \end{cases}$

69 Esbrina, en cada cas, la posició relativa de la recta r i el pla π. Quan siguin secants, troba les coordenades del punt $Q = r \cap \pi$.

a) $r: \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$; $\pi: 3x - z + 2 = 0$

b) $r: (x,y,z) = (2,3,1) + \lambda(1,1,-1)$; $\pi: (x,y,z) = (0,6,2) + \gamma(1,1,1) + \mu(-1,1,1)$

c) $r: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 4 = 0 \end{cases}$; $\pi: x + y + 2 = 0$

70 Dedueix la posició relativa de $r: (x,y,z) = (2,0,1) + \lambda(0,2,1)$ i $r': (x,y,z) = (0,0,4) + \mu(2,2,-2)$. Si són secants, troba'n la intersecció.