[dm; 19-IV-2016]

MATEMÀTIQUES (2n BAT.)

T.5 "GEOMETRIA"

EXERCICIS INTRODUCTORIS a les EQS. de RECTES i PLANS.

56 Considera els següents sistemes d'equacions lineals. Troba, en cada cas, els rangs r i $\bar{r}$. Si el sistema és SCD ó SCI, troba totes les solucions i expressa-les adientment.

Digues si aquestes solucions constitueixen, en cada cas, geomètricament un punt, una recta o un pla. En els dos darrers casos, digues-ne el/els vector/s director/s, i troba tres punts que pertanyin a la recta o el pla en qüestió.

a)
$$\begin{cases} 3x + 2y - 3z = 13 \\ 5x - 4y + z = 1 \\ -x + 3y - 2z = 6 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} -6x + 3y - 9z = 15 \\ 2x - y + 3z = -5 \\ -4x + 2y - 6z = 10 \end{cases}$$

57 Sigui la recta $r: (x,y,z) = (4,1,5) + \lambda(1,0,-1)$.
Escriu l'equació vectorial d'un pla que la contingui.

EXERCICIS: vector normal a un pla ,

equació general $Ax + By + Cy + D = 0$.

58 Calcula els següents productes:

$\vec{a} = (1,0,0)$ $\quad \vec{b} = (0,1,0)$ $\quad \vec{c} = (6,2,0)$

$\vec{d} = (1,-3,0)$ $\quad \vec{e} = (1,-1,1)$ $\quad \vec{f} = (2,-2,2)$

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ $\quad$ b) $\vec{a}\cdot\vec{c}$ $\quad$ c) $\vec{a}\cdot\vec{d}$

d) $\vec{c}\cdot\vec{d}$ $\quad$ e) $\vec{e}\cdot\vec{f}$ $\quad$ f) $\vec{c}\cdot\vec{f}$

59 Recorda que $\boxed{\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\alpha}$ 

i contesta: a) en quin dels sis apartats de l'exercici (58) els vectors eren perpendiculars?

b) calcula l'angle que formen $\vec{c}$ i $\vec{f}$ d'exercici (58)

Recorda que, en $\mathbb{R}^3$, $\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$

c) calcula l'angle que formen $\vec{e}$ i $\vec{f}$ d'exercici (58).

60 A partir dels vectors de l'exercici (58), calcula:

a) $\vec{a}\times\vec{b}$ $\quad$ b) $\vec{b}\times\vec{a}$ $\quad$ c) $\vec{c}\times d$ $\quad$ d) $\vec{e}\times\vec{f}$

61 Troba les equacions vectorial, paramètriques i contínues de la recta r que passa pels punts $P(1,2,3)$ i $Q(4,-1,4)$.

62 Troba les equacions vectorial, paramètriques i general del pla π que passa pel punt $P_0(6,2,-1)$ i té per vect. directors a: $\begin{cases}\vec{v} = (-1,1,2)\\ \vec{w} = (1,1,3)\end{cases}$

divendres, 22-IV-2016

MATES (2n BAT)

Exercicis T. $\boxed{5}$ "Geometria": posicions relatives de dos plans i eqs. generals d'una recta.

$\boxed{63}$ Digues si els següents plans són SECANTS, PARAL·LELS o COINCIDENTS, després d'haver trobat un vector normal de cadascun. En el cas que siguin secants, troba l'equació vectorial de la recta intersecció.

a) $\begin{cases} \pi: \ 2x - y + 5z - 13 = 0 \\ \pi': \ -4x + 2y - 10z - 2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \pi: \ 2x - y + 5z - 6 = 0 \\ \pi': \ -4x + 2y - 10z + 12 = 0 \end{cases}$

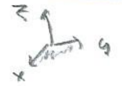
c) $\begin{cases} \pi: \ 4x + 3y - z = 0 \\ \pi': \ x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \pi: \ z = 6 \\ \pi': \ y = 0 \end{cases}$

$\boxed{64}$ Escriu les equacions VECTORIAL, PARAMÈTRIQUES i GENERAL d'un pla que passa pels tres punts següents:

$A(1,0,0)$ $B(0,1,0)$ i $C(0,0,1)$

$\boxed{65}$ Escriu les equacions VECTORIAL, PARAMÈTRIQUES, CONTÍNUES i GENERALS d'una recta que passa pels punts $A(0,2,2)$ i $B(1,0,0)$.

$\boxed{66}$ Escriu les equacions VECTORIAL, PARAMÈTRIQUES i GENERAL dels tres "plans coordenats": XY,  ; YZ,  ; ZX,  .

[dimecres, 27 - IV - 2016] | MATES (2n BAT.) | Exerc. 67, 68, 69 i 70

Exercicis T|5| "Geometria": posicions relatives de 3 plans, pla i recta, recta i recta.

REPÀS de TEORIA: RECORDEM: $\boxed{\vec{v}\cdot\vec{w} = v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3 = |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\alpha}$

▶ **Posicions relatives de 2 vectors** $\vec{v}$ i $\vec{w}$ ($\vec{v},\vec{w} \neq \vec{0}$ "no nuls"):

- **PARAL·LELS** $\vec{v} \parallel \vec{w}$ $\iff$ $\boxed{\exists k \neq 0 : \vec{v} = k\vec{w}}$ ("són proporcionals")
  - p. exemple: (en $\mathbb{R}^2$) $(1,2) \parallel (-2,-4)$, doncs $k=-2$: $-2\cdot(1,2) = (-2,-4)$
- **NO PARAL·LELS** $\vec{v} \not\parallel \vec{w}$ $\iff$ $\nexists k\neq 0 : \vec{v} = k\vec{w}$ (no són proporcionals) $\Rightarrow$
  - **PERPENDICULARS** $\vec{v}\perp\vec{w}$ $\iff$ $\boxed{\vec{v}\cdot\vec{w} = 0}$
    - p. ex: $(0,1)\cdot(1,0) = 0+0 = 0$ $\Rightarrow (0,1)\perp(1,0)$ (en $\mathbb{R}^2$)
  - **OBLICUS** $\vec{v}\cdot\vec{w} \neq 0$
    - p. ex: $(1,1)\cdot(1,0) = 1\cdot 1+0 = 1$ $\Rightarrow (1,1) \not\perp (1,0)$ [en $\mathbb{R}^2$]

▶ **Posicions relatives de 3 plans:**

sistema
$$\begin{cases} \pi: Ax+By+Cz+D=0 \to \vec{n} = (A,B,C) \\ \pi': A'x+B'y+C'z+D'=0 \to \vec{n}' = (A',B',C') \\ \pi'': A''x+B''y+C''z+D''=0 \to \vec{n}'' = (A'',B'',C'') \end{cases} \Rightarrow \overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{array}\right)$$

(la part $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C''\end{pmatrix} = M$)

$r = rg M$	$\bar{r} = rg\overline{M}$	POSICIONS	
1	1	COINCIDENTS	$\vec{n} \parallel \vec{n}' \parallel \vec{n}''$ ⇩ proporcionals
1	2	PARAL·LELS no COINCIDENTS; 2 COINCIDENTS i 1 PARAL·LEL	$\vec{n} \parallel \vec{n}' \parallel \vec{n}''$ ⇩ proporcionals
2	2	SECANTS en una recta NO COINCIDENTS; 2 COINCIDENTS i 1 SECANT	$\{\vec{n},\vec{n}',\vec{n}''\}$ coplanaris ⇩ $\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C''\end{vmatrix} = 0$
2	3	SECANTS 2 a 2; 2 PARAL·LELS i 1 SECANT	$\{\vec{n},\vec{n}',\vec{n}''\}$ coplanaris ⇩ $\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C''\end{vmatrix} = 0$
3	3	SECANTS en 1 PUNT (π, π', π'')	$\iff \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C''\end{vmatrix} \neq 0$

POSICIONS RELATIVES de PLA i RECTA:

$\pi: \; Ax+By+Cz+D=0 \iff \vec{n}\cdot\vec{p}+D=0$

$r: \begin{cases} A'x+B'y+C'z+D'=0 \\ A''x+B''y+C''z+D''=0 \end{cases} \iff \vec{p}=\vec{p}_0+\lambda\vec{v}$

$$\bar{M}=\left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{array}\right), \quad M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$$

$\boxed{\vec{n}\cdot\vec{v}} = \begin{cases} \boxed{\neq 0} \iff \boxed{\vec{n}\not\perp\vec{v}} \iff \text{SECANTS} \\ \boxed{=0} \iff \boxed{\vec{n}\perp\vec{v}} \text{ (no secants)}: \begin{cases} P_0\in\pi \Rightarrow \boxed{r\subset\pi} \text{ r continguda en } \pi \\ P_0\notin\pi \Rightarrow r\parallel\pi \text{ PARAL·LELS} \end{cases} \end{cases}$

$r = rg M$	$\bar{r} = rg\bar{M}$
3	3
2	2
2	3

caracterització amb $(\vec{n},\vec{v},P_0)$ ← dues possibilitats → caracterització amb rangs

POSICIONS RELATIVES de RECTA i RECTA

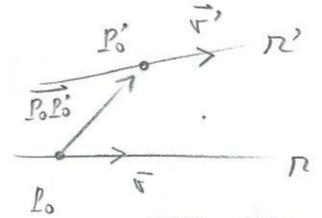
$r: \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \iff \vec{p}=\vec{p}_0+\lambda\vec{v}$

$r': \begin{cases} A_1'x+B_1'y+C_1'z+D_1'=0 \\ A_2'x+B_2'y+C_2'z+D_2'=0 \end{cases} \iff \vec{p}=\vec{p}_0'+\mu\vec{v}'$

$$\bar{M}=\left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_1' & B_1' & C_1' & -D_1' \\ A_2' & B_2' & C_2' & -D_2' \end{array}\right), \quad M = \text{(part } A, B, C)$$

$\boxed{¿\,\vec{v}\parallel\vec{v}'\,?}$

- → $\boxed{\text{Sí } (\vec{v}=k\vec{v}')} \Rightarrow \boxed{¿\,\overrightarrow{P_0P_0'}\parallel\vec{v}\,?}$
  - → $\boxed{\text{Sí } (\overrightarrow{P_0P_0'}=m\vec{v})}$: COINCIDENTS
  - → $\boxed{\text{No } (\overrightarrow{P_0P_0'}\neq m\vec{v})}$: PARAL·LELES
- → $\boxed{\text{No } (\vec{v}\neq k\vec{v}')} \Rightarrow \boxed{\det(\vec{v},\vec{v}',\overrightarrow{P_0P_0'})} = \begin{cases} \boxed{=0}: \text{SECANTS} \\ \boxed{\neq 0}: \text{ES CREUEN} \end{cases}$



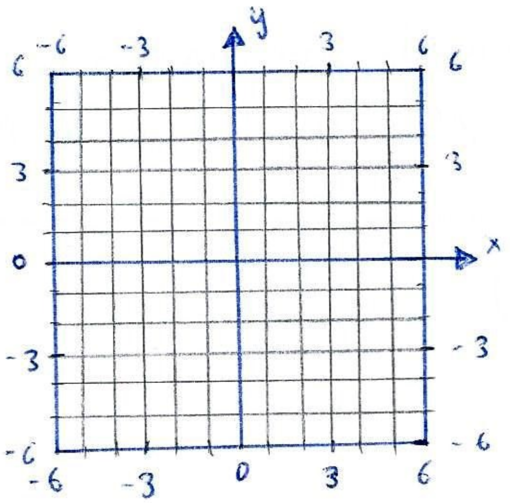
També es poden caracteritzar amb els rangs $\bar{r}=rg\bar{M}$, $r=rg M$:

r	$\bar{r}$	posició	
2	2	COINCIDENTS	SCI, g = 1
2	3	PARAL·LELES	SI, els 4 $\vec{n}$ coplanaris
3	3	SECANTS	SCD
3	4	ES CREUEN	SI, els 4 $\vec{n}$ no coplanaris

per a trobar el punt d'intersecció, podem resoldre el sistema de les 4 generals, o millor encara substituir amb $\vec{p}=\vec{p}_0+\lambda\vec{v}$ en una de les gens. d'r' (on el $\vec{n}'\not\perp\vec{v} \iff \vec{n}'\cdot\vec{v}\neq 0$), trobem $\lambda \Rightarrow$ trobem $\vec{p}$ ∎

67 Considera els següents vectors d' $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \vec{v} = (2,3) \\ \vec{w} = (4,6) \\ \vec{u} = (-2,-3) \\ \vec{t} = (6,-4) \\ \vec{s} = (3,1) \end{cases}$$



a) Dibuixa en una quadrícula com la de la figura les cinc fletxes amb les que representaríem els anteriors vectors. Totes les fletxes han de sortir de l'origen, (0,0). Indica a l'extrem de cada fletxa el nom del vector que representa.

b) Només mirant el dibuix que has fet, digues la posició relativa (PARAL·LELS, PERPENDICULARS ó OBLICUS) de los següent quatre parelles de vectors: $\vec{v}$ i $\vec{w}$, $\vec{v}$ i $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{t}$, $\vec{v}$ i $\vec{s}$.

c) Justifica analíticament cadascuna de les respostes de l'apartat anterior.

d) Sabem que dos vectors no nuls $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ són paral·lels quan són proporcionals, és a dir: quan $\exists k \neq 0 : \vec{a} = k\vec{b}$. Per a cada parella de vectors paral·lels de l'apartat (67.b), troba'n la constant de proporcionalitat (la k).

68 Troba la posició relativa de cadascun dels següents conjunts de tres plans. Quan siguin secants en un punt o secants en una recta, troba'n, respectivament, les coordenades del punt intersecció o l'eq. vectorial de la recta intersecció.

a) $\begin{cases} \pi: x - y + z - 2 = 0 \\ \pi': -x + y - z + 2 = 0 \\ \pi'': 2x - 2y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \pi: x - y + z - 2 = 0 \\ \pi': -x + y + z - 2 = 0 \\ \pi'': x - y + 3z - 6 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \pi: (x, y, z) = (2, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(-1, 0, 1) \\ \pi': (x, y, z) = (-1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 1) + \mu(1, 0, 1) \\ \pi'': (x, y, z) = (-2, 1, 1) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(-1, 2, 1) \end{cases}$

d) $\begin{cases} \pi: -x + y - 2z + 7 = 0 \\ \pi': x + y - z = 0 \\ \pi'': -x - 2y + z - 2 = 0 \end{cases}$

69 Esbrina, en cada cas, la posició relativa de la recta r i el pla π. Quan siguin secants, troba les coordenades del punt $Q = r \cap \pi$.

a) $r: \begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$; $\pi: 3x - z + 2 = 0$

b) $r: (x, y, z) = (2, 3, 1) + \lambda(1, 1, -1)$; $\pi: (x, y, z) = (0, 6, 2) + \gamma(1, 1, 1) + \mu(-1, 1, 1)$

c) $r: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 4 = 0 \end{cases}$; $\pi: x + y + 2 = 0$

70 Dedueix la posició relativa de $r: (x, y, z) = (2, 0, 1) + \lambda(0, 2, 1)$ i $r': (x, y, z) = (0, 0, 4) + \mu(2, 2, -2)$. Si són secants, troba'n la intersecció.

$\boxed{71}$ Esbrina si els següents vectors són paral·lels, coplanaris o base d'$\mathbb{R}^3$. En el darrer cas, calcula el volum del paral·lelepípede que formen (és el valor absolut del seu producte mixt, $|(\vec{v},\vec{w},\vec{u})|$):

a) $\begin{cases} \vec{v} = (6,-1,0) \\ \vec{w} = (-12,2,0) \\ \vec{u} = (-6,1,0) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \vec{s} = (2,0,-3) \\ \vec{t} = (-1,1,1) \\ \vec{p} = (1,-1,0) \end{cases}$

c) $\begin{cases} \vec{a} = (1,2,1) \\ \vec{b} = (-3,5,3) \\ \vec{c} = (-2,7,4) \end{cases}$

$\boxed{72}$ De cada parella de rectes, digues el vector director de la primera, el vector director de la segona, i després digues un vector que connecti un punt de la primera amb un punt de la segona:

a) $\begin{cases} r: \ (x,y,z) = (2,-3,5) + \lambda(1,-1,1) \\ r': \ (x,y,z) = (0,0,-7) + \mu(3,-3,3) \end{cases}$

b) $\begin{cases} r: \ \vec{p} = (1,0,0) + \lambda(-1,0,1) \\ r': \ \vec{p} = (0,1,0) + \mu(0,-1,1) \end{cases}$

c) $\begin{cases} r: \begin{cases} 2x - 3y + z - 5 = 0 \\ 3x + y - z + 4 = 0 \end{cases} \\ r': \begin{cases} x + 4y - 2z + 9 = 0 \\ 5x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \end{cases}$

d) r: eix X; $\quad r': \begin{cases} 3x - 3y + z - 6 = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$

$\boxed{73}$ Digues la posició relativa de les quatre parelles de rectes de l'exercici (72).

Quan siguin secants, troba'n la intersecció.
Quan siguin paral·leles, troba la distància entre ambdues. Quan es creuin, troba, també, la distància entre elles.

$\boxed{74}$ Esbrina la posició relativa de les següents parelles recta - pla. Quan siguin secants, troba'n la intersecció:

a) $\pi: \ 4x - 2y + 3z - 1 = 0$

$r: \ (x,y,z) = (2,3,1) + \lambda(-2,2,4)$

b) $\pi: \ (x,y,z) = (0,5,5) + \lambda(1,2,0) + \mu(-1,1,2)$

$r: \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$

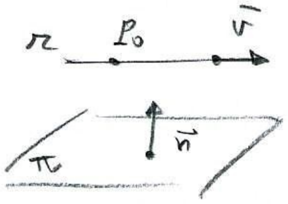
c) $\pi: \ (x,y,z) = (1,1,2) + \lambda(1,1,0) + \mu(1,-1,0)$

$r: \ \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{4-z}{4}$

d) $\pi: \ y = 0$

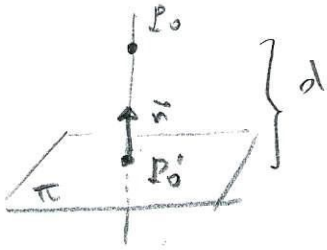
$r: \ \vec{p} = (0,7,0) + \lambda(0,-13,0)$

75 En l'exercici anterior (74), hi havia una de les rectes que era paral·lela al pla



$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}\cdot\vec{n}=0 \iff \vec{v}\perp\vec{n} \\ P_0 \notin \pi \end{array}\right\} \; r \parallel \pi .$$

La distància entre un pla i una recta paral·lela a ell es defineix com la distància entre qualsevol punt de la recta (per exemple, P_0) al pla. Al seu torn, la distància entre P_0 i π la calcularíem escrivint l'equació d'una recta n: $\vec{p}=\vec{p_0}+\lambda\vec{n}$, que passa per P_0 i té com a vector director el vector normal al pla π, i calculant el punt P_0', intersecció d'n i π:



$\Rightarrow$ la distància buscada, $d(r,\pi)=$ $= d(P_0,\pi)$ coincideix amb la distància entre P_0 i P_0', és a dir:

$$d(r,\pi)=|\overrightarrow{P_0P_0'}|.$$

Calcula la distància entre el pla i la recta paral·lels de l'exercici (74).

76 Digues la posició relativa dels següents conjunts de tres plans. Quan siguin secants en una recta o punt, troba'ls.

a) $\pi: x-y+z=0$
$\pi': 2x+y+z-3=0$
$\pi'': -x+2y-z-1=0$

b) $\pi: x-y+z=0$
$\pi': 2x+y+z-3=0$
$\pi'': -x-2y+3=0$

c) $\pi: 2x+3y-z-4=0$
$\pi': x-2y+z=0$
$\pi'': 3x+y-2=0$

77.- Exercicis de les PAU:

A. Trobeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que conté la recta $r_1: \frac{x-1}{2} = y = 2 - z$ i és paral·lel a la recta $r_2: \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

[2 punts]

B. Donades les rectes $r_1: \frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-4}$ i $r_2: \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0 \\ 2x - y + z + 11 = 0 \end{cases}$:

a) Comproveu que són paral·leles.
b) Trobeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que les conté.

C. Donats el pla $\pi: x + 2y + 3z - 4 = 0$ i els punts $P = (3, 1, -2)$ i $Q = (0, 1, 2)$:

a) Calculeu l'equació contínua de la recta perpendicular al pla π que passa pel punt P.
b) Calculeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla perpendicular a π que passa pels punts P i Q.

77.D

Siguin r i s dues rectes d'equacions

$$r:(x,y,z)=(-4,3,4)+t(2,-1,1)\ ,\quad s:x+1=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-a}{3}\,.$$

a) Trobeu el valor del paràmetre a perquè aquestes rectes es tallin.

b) En el cas en què es tallen, trobeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que les conté.

77.E (difícil —> surt SEGUR!!)

Considereu la recta $r:\dfrac{x+4}{-2}=\dfrac{y-1}{-1}=z-1$.

a) Trobeu els dos punts, A i B, de la recta r que estan situats a una distància $d=\sqrt{6}$ del punt $P=(-1, 1, 2)$.

b) Trobeu l'àrea del triangle de vèrtexs A, B i P.

77.F

Donada la recta $r:\begin{cases}2x-y+3z=2\\ x+z+1=0\end{cases}$:

a) Trobeu-ne un vector director.

b) Calculeu l'equació contínua de la recta paral·lela a r que passa pel punt $P=(1, 0, -1)$.

77.G

Donada la recta $\left.\begin{array}{r}2x-y+3z=2\\ x+z+1=0\end{array}\right\}$, calculeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax+By+Cz+D=0$) del pla perpendicular a la recta que passa pel punt $P=(1, 0, -1)$.

77.H (difícil —> surt SEGUR!!)

Donats els plans $\pi_1: 3x+y-2z+15=0$ i $\pi_2: x+y+2z-103=0$,

a) Comproveu que són perpendiculars.

b) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax+By+Cz+D=0$) del pla perpendicular a π_1 i π_2, que passa pel punt $P=(1, 3, 2)$.