I. E. S. JÚLIA MINGUELL 2n Batxillerat	dv, 15 de gener 2016
Matemàtiques « 2.1 Funcions: límits & número e »	Exemple d'examen

1. Heus aquí els dos apartats de l'article 128 de la Constitució de 1978, actualment en vigor:

Apartat 1r: «Toda la riqueza del país en sus distintas formas y sea cual fuere su titularidad está subordinada al interés general.»

Apartat 2n: «Se reconoce la iniciativa pública en la actividad económica. Mediante ley se podrá reservar al sector público recursos o servicios esenciales, especialmente en caso de monopolio, y asimismo acordar la intervención de empresas cuando así lo exigiere el interés general.»

Sigui R el número de vegades que apareix la lletra "r" en el primer apartat, i sigui λ el número de vegades que apareix l'article determinat "la" en el segon. Resol les equacions següents: [*1 punt: 0,5 per cada equació*]

$\mathbf{1.}\boldsymbol{a})\quad \ln x = R$ $\qquad$ $\mathbf{1.}\boldsymbol{b})\quad Re^{11x} - \lambda e^{4x} = 0$

2. Resol justificadament els límits següents: [*4 punts: 0,4 per cada límit*]

$\mathbf{2.}\boldsymbol{a})\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\qquad$ $\mathbf{2.}\boldsymbol{b})\quad \lim_{x\to 0}(2+x)^{\frac{1}{x}}$ $\qquad$ $\mathbf{2.}\boldsymbol{c})\quad \lim_{x\to 0^+} x\ln 6x$

$\mathbf{2.}\boldsymbol{d})\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(e^x-1)$ $\qquad$ $\mathbf{2.}\boldsymbol{e})\quad \lim_{x\to \infty}\frac{4x^7-5x^4}{9x^2-x^3}$ $\qquad$ $\mathbf{2.}\boldsymbol{f})\quad \lim_{x\to 0}\frac{4x^7-5x^4}{9x^2-x^3}$

$\mathbf{2.}\boldsymbol{g})\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{4x^7-5x^4}{9x^2-x^3}$ $\qquad$ $\mathbf{2.}\boldsymbol{h})\quad \lim_{x\to \infty}\frac{4^x}{x+1}$

$\mathbf{2.}\boldsymbol{i})\quad \lim_{x\to \infty} x^{1/x}$ $\qquad$ $\mathbf{2.}\boldsymbol{j})\quad \lim_{x\to \infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{1/x}$

3. Sigui la "campana de Gauss" descrita per la funció: $f(x) = 2e^{-3x^2}$.

$\mathbf{3.}\boldsymbol{a})$ Troba, justificadament, el seu màxim (comprova que realment és un màxim) i punts d'inflexió (comprova que ho són), i dibuixa la funció.

$\mathbf{3.}\boldsymbol{b})$ Sigui t la recta tangent a la gràfica d'f en el seu màxim, i r la recta tangent en el punt d'inflexió d'abscissa positiva. Troba l'equació d'ambdues rectes tangents, i representa-les al mateix diagrama de l'apartat anterior.

[*2 punts: 1 per cada apartat*]

4. Calcula la derivada de les següents funcions. Simplifica el resultat quan es pugui.

$\mathbf{4.}\boldsymbol{a})\quad f(x) = 4^{x+5} + \frac{1}{x^6}$ $\qquad$ $\mathbf{4.}\boldsymbol{b})\quad f(x) = 15\log_5\sqrt{1-x}$

[*1 punt: 0,5 per cada derivada*]

RESOLUCIÓ examen model:

T 2.1 « FUNCIONS: límits i núm. e »

1

Ap. 1r: « Toda la riqueza del país en sus distintas formas y sea cual fuere su titularidad está subordinada al interès general. » $\Rightarrow$ $R = 7$

Ap. 2n: « Se reconoce la iniciativa pública en la actividad económica. Mediante ley se podrá reservar al sector público recursos o servicios esenciales, especialmente en caso de monopolio, y asimismo acordar la intervención de empresas cuando así lo exigiere el interès general. » $\Rightarrow$ $\lambda = 3$

1.a/ $\ln x = 7 \Rightarrow \boxed{x = e^{7}} \simeq 1{,}10 \cdot 10^{3}$

1.b/ $7e^{11x} - 3e^{4x} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 7e^{11x} = 3e^{4x} \Rightarrow \frac{e^{11x}}{e^{4x}} = \frac{3}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{(11-4)x} = \frac{3}{7} \Rightarrow \underbrace{(11-4)}_{7}x = \ln\frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{7}\ln\frac{3}{7}} \simeq -1{,}21 \cdot 10^{-1} = -0{,}121$$

2

2.a

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left((1+0)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} \text{ IND. tipus "e clàssic"} \right) = (*)$$

$$[*] = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{1/x}\right)^{\frac{1}{x}} = \boxed{e}$$

$\frac{1}{x} = u$, ja no cal res més.

· OPCIÓ 1 : sabem que $\lim_{x\to\alpha}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)} = e$ quan $u \xrightarrow{x\to\alpha} \infty$. Podem forçar aquesta expressió en la base, i després multiplicarem i dividirem l'exponent entre la u trobada.

· OPCIÓ 2 : sabem que les INDETS. "clàssiques" 1^∞ es poden resoldre aplicant directament la fórmula d'Euler:

$$[*] = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(1+x-1)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}} = e^1 = \boxed{e}$$

· OPCIÓ 3 : qualsevol indeterminació exponencial es pot resoldre amb la fórmula general.

$$[*] = e^{\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{1}{x}}_{\infty}\underbrace{\ln(1+x)}_{0}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}} \overset{\text{L'HÔP}}{=} (*,*)$$

fiquem $\ln(1+x)$ al numerador i tenim un $\frac{0}{0}$, L'HÔPITAL

$$[*,*] = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{1+x}\right)}{1}} = e^{\frac{1}{1+0}} = \boxed{e}$$

(OBSERVACIÓ: en aquest exemple, la més fàcil és l'op. 1).

MATES (2n BAT.)

resol. ex. model : T. 2.1 « límits & nº e »

2.b/ $\lim_{x\to 0} (2+x)^{\frac{1}{x}} = (2+0)^{\frac{1}{0}} = 2^{\infty} = \boxed{\infty}$

2.c/ $\lim_{x\to 0^+} x \ln 6x = \left(0 \cdot (-\infty) \quad \text{IND.} \right) =$

Transformem $0 \cdot \infty = \frac{\infty}{1/0} = \frac{\infty}{\infty}$
i apliquem L'HÔPITAL

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln 6x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{6}/\cancel{6}x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} =$

$= \boxed{0}$

2.d/ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(e^x - 1) \left(= \infty (e^0 - 1) = \infty \cdot 0 \quad \text{IND.} \right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = \boxed{1}$

fiquem el parèntesi al numerador i és $\frac{0}{0}$, L'HÔP.

2.e/ $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^7 - 5x^4}{9x^2 - x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^7}{-x^3} = \lim_{x\to\infty} (-4x^4) = \boxed{-\infty}$

en quocient de polinomis si $x \to \infty$, només sobreviuen els monomis de grau superior en denom. i num, respect.

2.f/ $\lim_{x\to 0} \frac{4x^7-5x^4}{9x^2-x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-5x^4}{9x^2} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{5}{9}x^2\right) = \boxed{0}$

en quocient de polinomis quan $x\to 0$, només sobreviuen els monomis de grau menor en num. i denom., respectivament

2.g/ $\lim_{x\to -\infty} \frac{4x^7-5x^4}{9x^2-x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{4(-x)^7-5(-x)^4}{9(-x)^2-(-x)^3} =$

per definició de límit quan $x\to-\infty$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x^7-5x^4}{9x^2+x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x^7}{x^3} =$

$= \lim_{x\to\infty}(-4x^4) = \boxed{-\infty}$

2.h/ $\lim_{x\to\infty} \frac{4^x}{x+1} = \left(\frac{4^\infty}{\infty+1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}\right) =$ L'HÔP.

$= \lim_{x\to\infty} \frac{(4^x)'}{(x+1)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{4^x \ln 4}{1} = 4^\infty \ln 4 = \boxed{\infty}$

2.i/ $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \left(\infty^{1/\infty} = \infty^0 \text{ IND "exp"}\right) =$

$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}} = (*,*,*)$

(pugem la base a l'exponent: $b = e^{\ln b} \Rightarrow b^a = e^{a\ln b}$)

(resol examen model)

$$[*,*,*] \underset{\text{L'HÔP}}{=} e^{\lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = \boxed{1}$$

2.j) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x} \left(= \left(\frac{1}{\infty}\right)^{1/\infty} = 0^0 \quad \text{IND. "exp"} \right) =$

$$= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln 1/x}{x}} = (4.*)$$

(pugem la base a l'exponent $b^a = e^{a \ln b}$
– equivalentment: apliquem la fórmula general de resolució d'indeterminacions exponencials –)

ens surt a l'exponent $\frac{\ln 1/\infty}{\infty} = \frac{\ln 0^+}{\infty} = \frac{-\infty}{\infty}$: L'HÔP

$$= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{-1/x^2}{1/x}\right)}{1}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x^2}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x}} =$$

$$= e^{\frac{-1}{\infty}} = e^0 = \boxed{1}$$

COMENTARIS: en un examen s'ha d'emprar un raonament analític, com els darrers, però no està de més, en full apart, fer una comprovació del resultat amb el mètode de la taula. Us he penjat a MANIFOLDO un arxiu d'EXCEL amb les taules d'aquests exercicis.

3

Gaussiana $f(x) = 2\underbrace{e^{-3x^2}} = 2\underbrace{E}$ ... notació!

3.a/

$$\boxed{f'(x) = 2e^{-3x^2}\cdot \underbrace{(-3x^2)'}_{-6x} = -12x\,e^{-3x^2}} = (\#.1)$$

$$= -12xE$$

$$\boxed{f''(x)} = \underbrace{(-12x)'}_{-12}E - 12x\,E' = -12E + 12x^2 6\,E = (*)$$

$$\left(E' = \left(e^{-3x^2}\right)' = e^{-3x^2}\underbrace{(-3x^2)'}_{-6x} = -6xE \quad (*,*) \right)$$

$$[*] = 12E\left(-1 + 6x^2\right) = \boxed{12\,e^{-3x^2}\left(6x^2-1\right)} \ (\#.2)$$

f. comú: 12 E

$$\boxed{f'''(x)} = (12\,E)'\,(6x^2-1) + 12E\,(6x^2-1)' =$$

$$= 12\underbrace{E'}_{-6xE}(6x^2-1) + 12E\,12x =$$

$[*,*]$

f. comú: 12xE

$$= -\underbrace{12}\cdot 6\underbrace{xE}(6x^2-1) + 12\underbrace{E\,12x} =$$

$$= 12xE\,\underbrace{\left(\underbrace{-6(6x^2-1)} + 12\right)}_{= 18 - 36x^2} =$$

$$-36x^2 + 6 + 12$$

(resol ex. model)

$$= 12 x E (18 - 36x^2) = \boxed{216\,x\,e^{-3x^2}(1-2x^2)} \quad (\#3)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{f. comú } 18 \\ 12 \cdot 18 = 216 \end{array}\right)$$

MÀXIM:

$$f'(x) \overset{[\#.1]}{=} \cancel{-12x\,e^{-3x^2}} = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \quad \text{CANDIDAT}$$

una exp. no mai s'anul·la

Comprovem:

$$f''(0) \overset{[\#.2]}{=} 12\underbrace{e^0}_{=1}(\cancel{6 \cdot 0^2} - 1) = -12 < 0 \Rightarrow \text{màxim}$$

PUNTS D'INF:

una exp. no mai s'anul·la

$$f''(x) \overset{[\#.2]}{=} \cancel{12e^{-3x^2}}(6x^2-1) = 0$$

$$\boxed{x = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}} \quad \text{(Dos) CANDIDATS.}$$

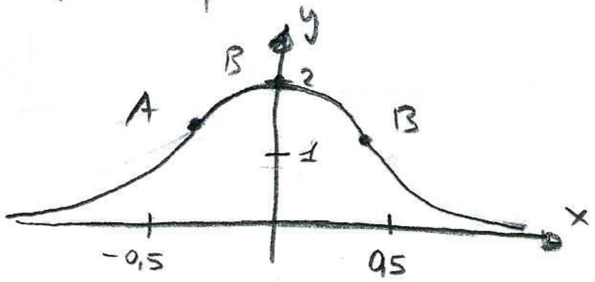
Comprovem:

$$f'''(\pm\sqrt{1/6}) \overset{[\#.3]}{=} \pm 216\sqrt{\frac{1}{6}}\,e^{-3(\pm\sqrt{1/6})^2}\left(1-2(\pm\sqrt{1/6})^2\right) =$$

$$= \pm 216\sqrt{\frac{1}{6}}\,e^{-\frac{3}{6}}\left(1-2\frac{1}{6}\right) =$$

$$= \pm 216\sqrt{\frac{1}{6}}\,e^{-1/2}\,\frac{2}{3} \neq 0 \Rightarrow \text{són punt d'inf.}$$

Dibuixem la funció aprofitant que l'enunciat ens informa que es tracta d'una campana de Gauss:



B: màxim:

$x = 0$

$y = f(0) = 2e^0 = 2$

$\boxed{B(0,2)}$

A i C: punts d'inflexió:

$x = \sqrt{1/6} \simeq 0,41 \Rightarrow \boxed{y = f(\sqrt{1/6})} = 2e^{-3(\sqrt{\frac{1}{6}})^2} =$

$= 2e^{-3/6} = 2e^{-1/2} = \frac{2}{e^{1/2}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{e}}} \simeq 1,21$

$x = -\sqrt{1/6} \Rightarrow \boxed{y = f(-\sqrt{1/6}) = \frac{2}{\sqrt{e}}}$ (només que f és "simètrica").

$\Rightarrow \boxed{A\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{e}}\right) \text{ i } B\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{e}}\right) \text{ punts d'inflexió}}$

3.b/

$t: \; y = mx + n \Rightarrow n = 2 \Rightarrow \boxed{t: \; y = 2}$

$y \to 2$, $m \to 0$, $x \to 0$

nota: a l'enunciat original de l'examen model hi havia una errada)

r: $y = mx + n$, amb $y \to 2/\sqrt{e}$, $x \to \sqrt{1/6}$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{e}} = -\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{e}}\frac{1}{\sqrt{6}} + n \qquad (*,*,*)$$

$$\left(f'(\sqrt{1/6}) \overset{[*.1]}{=} -12\sqrt{\frac{1}{6}}\, e^{-3(\sqrt{1/6})^2} = -12\frac{1}{\sqrt{6}} e^{-3\frac{1}{6}} = -12\frac{1}{\sqrt{6}} e^{-1/2} = -\frac{12\sqrt{6}}{6}\frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{e}} \right)$$

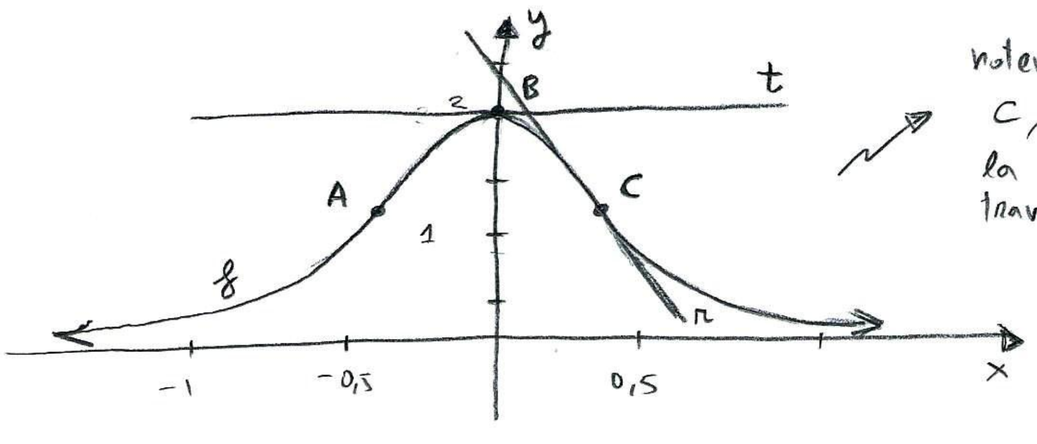
$$[*,*,*] \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{e}} + \frac{2}{\sqrt{e}} = n \Rightarrow \boxed{n = \frac{4}{\sqrt{e}} \cong 2{,}43},$$

i per tant:

$$\boxed{r:\quad y = -2\sqrt{\frac{6}{e}}\,x + \frac{4}{\sqrt{e}}}$$

(també: $y \cong -2{,}97x + 2{,}43$).

REPRESENTACIÓ: $t \rightsquigarrow$ horitzontal que passa per $y=2$; $r \rightsquigarrow$ passa per $B(0'41, 1'21)$ i $(0, \underbrace{2'43}_{=n})$



notem que en C, per ser P. d'INF, la tangent travessa la corba.

4

4.a/ $\left(4^{x+5} + \frac{1}{x^6}\right)' =$

$= \left(4^{x+5}\right)' + \left(x^{-6}\right)' = \underbrace{(x+5)'}_{=1} 4^{x+5} \ln 4 - 6x^{-7} =$

$= \boxed{\ln 4 \cdot 4^{x+5} - \frac{6}{x^7}}$ ▨

4.b/ $\left(15 \log_5 \sqrt{1-x}\right)' = \frac{15}{\ln 5} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \left(\sqrt{1-x}\right)' =$

$= \frac{15}{\ln 5} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}} = \boxed{-\frac{15}{2\ln 5 \cdot (1-x)}} =$ ▨

$= \frac{15}{2 \ln 5 (x-1)}$ ← (més ordenat encara).