ESCOLA PIA SABADELL	Data: *dijous, 13-III-2014*	Puntuació
Física	Alumne: RESOLUCIÓ	
Prova Camp Gravitatori	Curs: *2n Batxillerat*	

Preliminar

Si dimarts havies fet voluntàriament els problemes E6 i E7 de Camp Electrostàtic i creus que mereixies el positiu, indica-ho explícitament en el següent espai:

Enunciats de la prova

A. [*Basat en P1 juny 2013, sèrie 4*]

Caront, amb una massa de $M_C = 1{,}52 \times 10^{21}$ kg i un radi de $R_C = 604$ km, és el satèl·lit natural més gran de Plutó.

1) Quin és el valor de l'energia mecànica mínima d'una nau que, sortint de la superfície de Caront, escapés totalment de l'atracció gravitatòria del satèl·lit?

2) Quina hauria de ser la velocitat inicial mínima d'aquesta nau?

DADA: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

B. [*PAU juny'08*]

3) A partir de les dades de la taula següent, calculeu el radi de l'òrbita del planeta Júpiter.

Planeta	*Radi de l'òrbita (km)*	*Període de revolució (anys)*
Terra	$148 \cdot 10^6$	1,0
Júpiter		11,9

C. [*Basat en P2 opció B Sèrie 4, juny'09*]

Els satèl·lits GPS descriuen òrbites circulars al voltant de la Terra. Tots ells estan a la mateixa altura, i fan dues voltes a la Terra cada 24 hores. Suposa $m_{sat} = 1630$ kg.

Calculeu:

4) L'energia mecànica que té un d'aquests satèl·lits GPS en la seva òrbita.

5) L'energia mecànica que hauríem de comunicar a un d'aquests satèl·lits per a fer-lo passar de la seva òrbita una altra d'altura doble.

DADES: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg; $R_T = 6380$ km.

A

Caront: $M_C = 1{,}52 \cdot 10^{21}$ kg
$R_C = 604$ km

1/

$$E_M = \underbrace{E_p(d)}_{\text{distància al centre de Caront}} + \underbrace{E_C(v)}_{\text{mòdul velocitat de la nau}} = \text{constant}$$

(conservació de l'E_M en camp gravitatori).

« "escapar" vol dir arribar a $d \to \infty$ » $\Rightarrow E_p = -G\dfrac{M_C m}{d} \to 0$

$$\Rightarrow \boxed{E_M(\infty) = \underbrace{E_C(v_\infty)}_{\text{la que té quan arriba a l'}\infty\text{.}} = \frac{1}{2} m v_\infty^2} \Rightarrow \underbrace{E_M^{min}(\infty) = 0}_{\text{el valor més petit de } v_\infty^2 \text{ es } = 0\text{.}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E_M^{min} = 0}$$

ja no diguem (∞) perquè E_M val el mateix en qualsevol punt del moviment (per ser constant).

sin paraula de sii algú vol més info

Si tingués una energia encara més petita que zero, $E_M < 0$,
en $d \to \infty \Rightarrow E_p = 0$ i tindríem $E_M(\infty) = \underbrace{E_C(v_\infty)}_{\frac{1}{2} m v_\infty^2 > 0} < 0$ } absurd!

$\Rightarrow$ Això vol dir que $v = 0$
s'assoleix abans de $d \to \infty$, i no pot anar més enllà
(no pot "escapar"): es un "punt de retorn", com quan la pedra que tirem cap amunt arriba a $v = 0$ en el seu punt més alt i torna a caure cap avall).

2/

$$\underbrace{E_M(sup)}_{\text{consv.}} = -G\frac{M_C m}{R_C} + \frac{1}{2} m v_e^2 \Rightarrow \boxed{v_e = \sqrt{\frac{2GM_C}{R_C}}} =$$

$$E_M(\infty) = \underbrace{0}_{\text{apt. (1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}52 \cdot 10^{21}}{604 \cdot 10^3}} =$$

$$= 579 \text{ m/s}$$

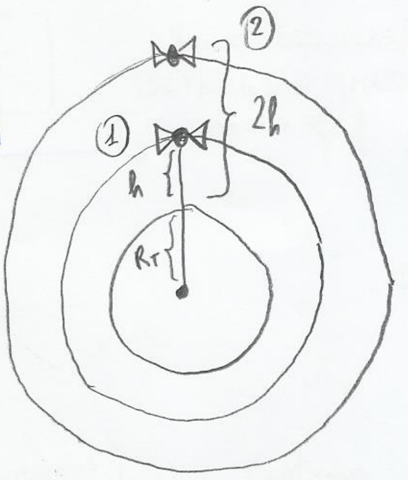
"velocitat d'escapament".

B

3/ 3a llei Kepler: $\dfrac{T_T^2}{R_T^3} = \dfrac{T_J^2}{R_J^3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{R_J = \sqrt[3]{\frac{T_J^2}{T_T^2}}\, R_T} = (11{,}9)^{2/3} \cdot 148 \cdot 10^6 = \boxed{7{,}7 \cdot 10^8 \text{ km}}$$

C



$m = 1\,630$ kg
$T_1 = 12$ h $= 432\,00$ s

$$E_M(1) = \underbrace{E_c(1)}_{\frac{1}{2} m v_1^2} + \underbrace{E_p(1)}_{-G\frac{M_T m}{r_1}}$$

necessitem $\left\{ \begin{array}{l} v_1 : \text{veloc òrbita } 1 \\ r_1 : \text{distància al centre Terra òrbita } 1 \end{array} \right.$

4/ • És un MCU sola força gravitatòria $F_c = F_g \Longrightarrow$

$$F_c = m \overbrace{\frac{v^2}{r}}^{=a_N} \qquad F_g = G\frac{M_T m}{r^2}$$

$$\Longrightarrow \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} = G\frac{M_T \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \Longrightarrow \quad (1)\ \boxed{v = \sqrt{G\frac{M_T}{r}}}$$

"veloc. orbital d'un satèl·lit amb radi òrbita r"

• Necessitem una altra equació que lligui v i r: per ser MCU,

$$(2)\ \boxed{v = \frac{2\pi r}{T}} \Longrightarrow v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \overset{[1]}{\Longrightarrow} \boxed{r = \sqrt[3]{\frac{G M_T T^2}{4\pi^2}}}\ (3)$$

"radi òrbita d'un satèl·lit període T".

$$\boxed{r_1 = \sqrt[3]{\frac{G M_T T_1^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot10^{24}\cdot 43200^2}{4\pi^2}} = 2{,}66\cdot10^{7}\ \text{m}}$$

$$\boxed{E_M(1) = \frac{1}{2} m v_1^2 - G\frac{M_T m}{r_1} \overset{[1]^2}{=} m\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{GM_T}{r_1} = 1\,630\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{2{,}66\cdot10^{7}} = -1{,}22\cdot10^{10}\ \text{J}}$$

5/ $$\boxed{E_M(2) = -G\frac{M_T m}{2 r_2}} = -\frac{G M_T m}{4r_1 - 2R_T} = -\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot1630}{4\cdot2{,}66\cdot10^{7} - 2\cdot6380\cdot10^{3}} = \boxed{-6{,}94\cdot10^{9}\ \text{J}}$$

$$\left. \begin{array}{l} h = r_1 - R_T \\ r_2 = R_T + 2h \end{array} \right\} \Longrightarrow \boxed{r_2 = R_T + 2(r_1 - R_T) = 2r_1 - R_T}$$

Energia que hem de comunicar:

$$\boxed{\Delta E_M = E_M(2) - E_M(1) = 5{,}26\cdot10^{9}\ \text{J}}$$

Nota: $\Delta E_M > 0$, com esperàvem.