I. E. S. JÚLIA MINGUELL 2n Batxillerat	dv, 12 de febrer 2016	Nota (*sobre 10*)
Matemàtiques — Prova 2.2: «Funcions: Continuïtat i representació»	Alumne: nº MÀXIM DE PUNTS: vuit (8)	

1. REPRESENTACIÓ de FUNCIONS

Recordatori important: aquesta pregunta (1) val tres punts, valent-n'hi un cadascun dels seus apartats (1.a), (1.b) i (1.c).

Anomenant *N1* a la nota total (sobre tres punts) obtinguda en aquesta pregunta (1), i *NC* a la nota total (sobre dos punts) obtinguda en l'avaluació continuada del tema 2.2, la seva suma *S = N1 + NC* té un valor màxim de cinc punts.

Tal i com es va avisar durant les classes, per a aprovar el tema 2.2 serà condició necessària que aquesta suma *S* de la nota en la pregunta 1 d'examen i la nota en la continuada del tema sigui superior o igual a 2,5 punts (és a dir: al 50% del màxim possible).

1.a) Fes la taula de curvatura i troba tots els punts d'inflexió de la funció:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

1.b) Troba totes les asímptotes de la funció:

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x}$$

1.c) Representa gràficament una certa funció $f(x)$ de la que sabem:

- Domini: $D[f] = (-\infty,\ -1) \cup (-1,\ 1) \cup (1,\ \infty)$
- La funció és contínua en tots els punts del seu domini.
- La funció és no periòdica; no té simetria parella ni tampoc senar.
- Punts importants: $A(2,\ 0)$ mínim, tall X;
  $B(0,\ 0)$ punt d'inflexió, tall X, Y.
- Regió on f és creixent: $(-1,\ 1) \cup (2,\ \infty)$
  és decreixent: $(-\infty, -1) \cup (1,\ 2)$
  és còncava: $(0,\ 1) \cup (1,\ \infty)$
  és convexa: $(-\infty, -1) \cup (-1,\ 0)$
- Asímptotes: r: $x = -1$ és AV (límits: $-\infty$ a esquerra, $-\infty$ a dreta);
  s: $x = 1$ és AV (límits: ∞ a esquerra, ∞ a dreta);
  t: $y = 0$ és AH a l'esquerra;
  u: $y = \frac{2}{3}x - 2$ és AO a la dreta.

[*3 punts: 1 per cada apartat*]

(continua en pàgina següent)

2. Sigui la funció $f(x) = 5x$. Calcula $f'(6)$ utilitzant la definició de derivada.

[*1 punt*]

3. Sigui la funció $f(x) = ax^3 + b$.

3.a) Calcula el valor del paràmetre a per a que la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = -1$ sigui paral·lela a r: $y = 6x + 9$.

3.b) Calcula els valors dels paràmetres a i b que fan que la recta tangent a la gràfica d' f en el punt d'abscissa $x = -1$ sigui la recta t: $y = 6x - 1$.

[*2 punts: 1 per cada apartat*]

4. Sigui la funció $y = x^{2x}$. Troba $f'(x)$. (Pots usar la "derivació logarítmica").

[*1 punt*]

5. Calcula la derivada de les següents funcions. Simplifica el resultat quan es pugui.

5.a) $f(x) = \sqrt{2 - x}$ **5.b)** $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(7x)$

[*1 punt: 0,5 per cada derivada*]

PEPE RÒDENAS BORJA
[dv; 12 - II - 16]
INS JÚLIA MINGUELL

MATES (2n BAT.)

examen T. 2.2 — pàg. 1/4

«Continuïtat i Representació de funcions»

(resolució)

1

1.a/ $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x}} \rightarrow f'(x) = -x^{-2} \rightarrow \boxed{f''(x) = \dfrac{2}{x^3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ denominador $= 0 \rightarrow x^3 = 0 \rightarrow \boxed{x=0}$: 1 discontinuïtat

candidats a p. inf:

$f''(x) = 0 \rightarrow \dfrac{2}{x^3} = 0$ ~~sen~~ $\nexists$ solució: $\nexists$ candidats

$\Rightarrow \boxed{\nexists \text{ punts d'inf.}}$

TAULA:

	$x <$	0	$< x$
f'':	$\ominus$	$\nexists$	$\oplus$
f:	$\cap$ cv	$\nexists$	$\cup$ cc

$f''(1) = \dfrac{2}{1^3} = 2 \oplus$

(f és senar)

1.b/ AV: denom. $= 0 \rightarrow \boxed{x=0}$ candidat:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-}\left(x-2+\frac{1}{x}\right) = 0-2+\frac{1}{0^-} = -\infty \\ &\lim_{x\to 0^+}\left(x-2+\frac{1}{x}\right) = 0-2+\frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\boxed{x=0} \text{ és A.V.}}$$

AH: $\lim_{x\to\pm\infty}\left(x-2+\dfrac{1}{x}\right) = \pm\infty - 2 \pm 0 = \pm\infty \Rightarrow \boxed{\nexists \text{ AH}}$

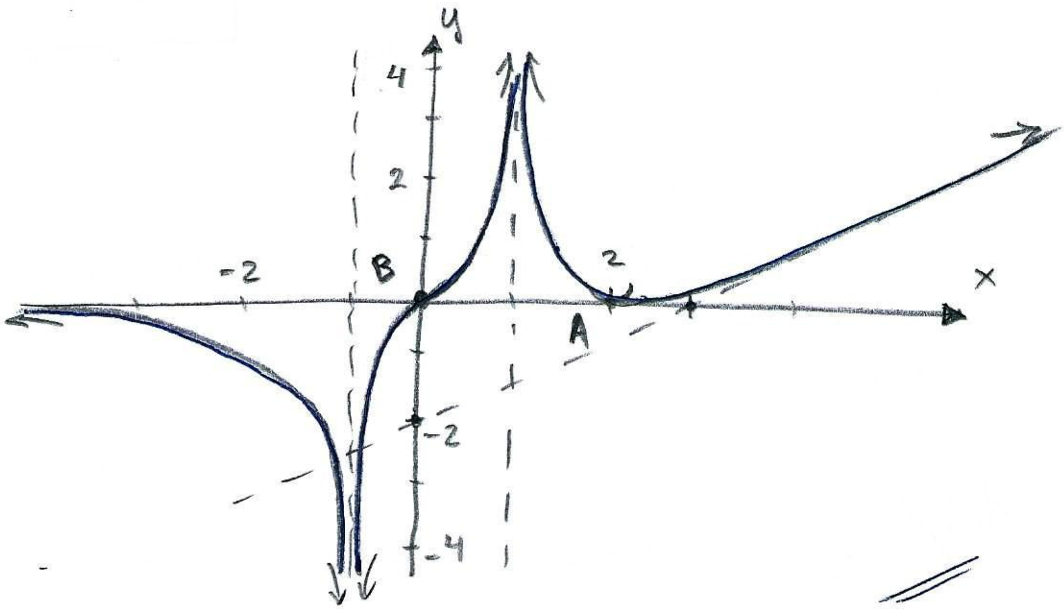
AO: $\left[m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \boxed{1} \right]$

$\hookrightarrow \left[n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x - 2 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to \pm 0} - x\right) = -2 \right]$

$\Longrightarrow$ $\boxed{y = x - 2}$ és AO a esquerra i a dreta.

1.c/ Per a representar AOd busquem els seus punts de tall:

$\begin{cases} x=0 \to y = -2 \longrightarrow (0,-2) \\ y=0 \to 0 = \frac{2}{3}x - 2 \to x = \frac{3}{2}\cdot 2 = 3 \to (3,0) \end{cases}$



$\boxed{2}$

$\boxed{f'(6)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(6+h) - f(6)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{5\cdot(6+h) - 5\cdot 6}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{5\cdot 6} + 5h - \cancel{5\cdot 6}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{5h}{h} = \boxed{5}$

(resolució)

3

$$f(x) = ax^3 + b \rightarrow f'(x) = 3ax^2$$

3.a/ dues rectes paral·leles tenen el mateix pendent.

Per tant: $f'(-1) = 6 \Rightarrow 3a \cdot \cancel{(-1)^2} = 6$

$\Rightarrow \boxed{a = \frac{6}{3} = 2}$

3.b/ $\boxed{a = 2}$ ja satisfà la condició sobre el pendent

Condició de tangència:

$$f(-1) = 6 \cdot (-1) - 1) = -6 - 1 = -7$$

$$2 \cdot (-1)^3 + b = -2 + b$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 2 - 7 = -5}$$

4

$$\boxed{y = x^{2x}}_{(*)} \xRightarrow{\text{prenem } \ln} \ln y = \ln x^{2x} = 2x \cdot \ln x$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = 2\ln x + 2\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}} = 2(\ln x + 1) \Rightarrow$$

derivem respecte d'x a ambdós costats

$$\Rightarrow \boxed{y' = 2(\ln x + 1)y \overset{(*)}{=} 2(\ln x + 1)x^{2x}}$$

5

5.a/ $\left(\sqrt{2-x}\right)' = \boxed{\dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}}}$ ■

5.b/ $\left[\operatorname{arctg}(7x)\right]' = \dfrac{7}{1+(7x)^2} = \boxed{\dfrac{7}{1+49x^2}}$ ■