I. E. S. JÚLIA MINGUELL 2n Batxillerat	dm, 19 de gener 2016	Nota (*sobre 10*)
Matemàtiques Prova: « 2.1 Funcions: Límits & núm. *e* »	Alumne: nº MÀXIM DE PUNTS: vuit (8)	

1. Heus aquí alguns fragments dels títols 1 i 2 de la Constitució de 1978, actualment en vigor:

Títol 1 (art.14): «Los españoles son iguales ante la ley, sin que pueda prevalecer discriminación alguna por razón de nacimiento (...)».

Títol 2 (arts. 56 i 64): «La persona del Rey es inviolable y no está sujeta a responsabilidad. (…) Los actos del Rey serán refrendados por el Presidente del Gobierno y, en su caso, por los Ministros competentes. (…) De los actos del Rey serán responsables las personas que los refrenden».

Sigui R el número de vegades que apareix la paraula "Rey" a la cita del títol 2, i sigui ω el número de vocals amb accent gràfic (*tilde*) que apareixen a la cita del títol 1. Resol les equacions següents: [*1 punt: 0,5 per cada equació*]

$\mathbf{1.}\boldsymbol{a})\quad \ln x = R$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{1.}\boldsymbol{b})\quad Re^x = \omega$

2. Resol els límits següents: [*4 punts: 0,5 per cada límit*]

$\mathbf{2.}\boldsymbol{a})\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $\qquad$ $\mathbf{2.}\boldsymbol{b})\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{4x}$ $\qquad$ $\mathbf{2.}\boldsymbol{c})\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}e^x$

$\mathbf{2.}\boldsymbol{d})\ \lim_{x\to 1}\frac{2\ln x}{x-1}$ $\qquad$ $\mathbf{2.}\boldsymbol{e})\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^{10}-6x}{x^3-6x}$ $\qquad$ $\mathbf{2.}\boldsymbol{f})\ \lim_{x\to 0}\frac{x^{10}-6x}{x^3-6x}$

$\mathbf{2.}\boldsymbol{g})\ \lim_{x\to 0^+} x\ln 7x$ $\qquad$ $\mathbf{2.}\boldsymbol{h})\ \lim_{x\to 0^+} x^x$

3. Sigui la "campana de Gauss" descrita per la funció: $f(x) = e^{-x^2}$.

$\mathbf{3.}\boldsymbol{a})$ Troba justificadament el màxim i els dos punts d'inflexió d' f. No cal que comprovis que els candidats realment són màxim/punts d'inflexió.

$\mathbf{3.}\boldsymbol{b})$ Sigui t la recta tangent a la gràfica d'f en el punt d'abscissa $x = 1$. Troba la seva equació. Després, representa en un mateix diagrama cartesià la gràfica de la funció f i la de la recta t.

[*2 punts: 1 per cada apartat*]

4. Calcula la derivada de les següents funcions. Simplifica el resultat quan es pugui.

$\mathbf{4.}\boldsymbol{a})\quad f(x) = 3^x + \frac{1}{x^5}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{4.}\boldsymbol{b})\quad f(x) = \log_2\sqrt{x-1}$

[*1 punt: 0,5 per cada derivada*]

(Resolució de l'examen)

1

$w = 2 \qquad R = 3$

1.a $\ln x = 3 \Rightarrow \boxed{x = e^3} \triangleq 20,1$

1.b $3e^x = 2 \Rightarrow \boxed{x = \ln \frac{2}{3}} \triangleq -0,405$

2

2.a $\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$ (per definició)

2.b $\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{4x}} = \left(\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right)^4 = \boxed{e^4}$

2.c $\boxed{\lim_{x \to \infty} \underbrace{\frac{1}{x} e^x}_{0 \cdot \infty \text{ IND}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \left(\frac{e^\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}\right) =$

$\underset{\text{L'HÔP}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{1} = e^\infty = \boxed{\infty}$

2.d $\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{2 \ln x}{x - 1}} = \left(\frac{2 \cdot 0}{1 - 1} = \frac{0}{0} \text{ IND}\right) \underset{\text{L'HÔP}}{=}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{2 \cdot 1/x}{1} = \frac{2 \cdot 1/1}{2} = \boxed{2}$

2.e/

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{x^{10}-6x}{x^3-6x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{10}}{x^3} = \lim_{x\to\infty} x^7 = \boxed{\infty}$$

2.f/

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x^{10}-6x}{x^3-6x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-6x}{-6x} = \lim_{x\to 0} 1 = \boxed{1}$$

2.g/

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \underbrace{x \ln 7x}_{-0\cdot\infty}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln 7x}{1/x} = \left(\frac{-\infty}{\infty} \text{ IND}\right) \overset{\text{L'HÔP}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{7/7x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{7x^2}{7x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (-x) = \boxed{0}$$

$$0\cdot\infty = \frac{\infty}{1/0}$$

2.h/

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^x} = \left(0^0 \text{ IND}\right) = e^{\lim_{x\to 0^+} x \ln x} =$$

$$b = e^{\ln b}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2}{x}\right)} =$$

$$\left(\frac{\infty}{\infty} : \text{L'HÔP}\right)$$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+}(-x)} = e^0 = \boxed{1}$$

3

$$f(x) = e^{-x^2}$$

3.a/ $\boxed{f'(x) = -2x\, e^{-x^2}}$

$$\boxed{f''(x)} = (-2x)'\, e^{-x^2} - 2x \cdot \left(e^{-x^2}\right)' =$$

$$= \underbrace{-2e^{-x^2} + 2x^2 2\, e^{-x^2}}_{\text{f. comú}} = \boxed{2e^{-x^2}(2x^2-1)}$$

· máxim: $f'(x) = -2x\, \cancel{e^{-x^2}} = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{0}{-2} = 0}$ CANDIDAT

$\neq 0$ sempre

$\boxed{y = f(0) = e^0 = 1} \Rightarrow$ màxim: $\boxed{B\,(0,1)}$

· punts d'inf: $f''(x) = \cancel{2e^{-x^2}}(2x^2-1) = 0 \Rightarrow$

$\neq 0$ sempre

$\Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}}$ CANDIDATS $\longrightarrow \boxed{y = f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)} = e^{-\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} =$

$= e^{-\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{e}}} \simeq 0{,}607$

$\Rightarrow$ punts d'inf: $\boxed{A\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right),\ C\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)}$

decimals: $\begin{cases} A\,(-0'707,\ 0'607) \\ C\,(0'707,\ 0'607) \end{cases}$

3.b/

$$\boxed{m = f'(1) = -2\cdot 1\cdot e^{-1^2} = -\frac{2}{e}} \simeq -0{,}736$$

$$t:\; y = mx + n \quad \begin{cases} y \to f(1) \\ m \to -\frac{2}{e} \\ x \to 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{e} = -\frac{2}{e}\cdot 1 + n$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e} = \frac{3}{e}} \simeq 1{,}10$$

$$f(1) = e^{-1^2} = \frac{1}{e} \simeq 0{,}368$$

$$\Longrightarrow \quad t:\; \boxed{y = -\frac{2}{e}x + \frac{3}{e}}$$

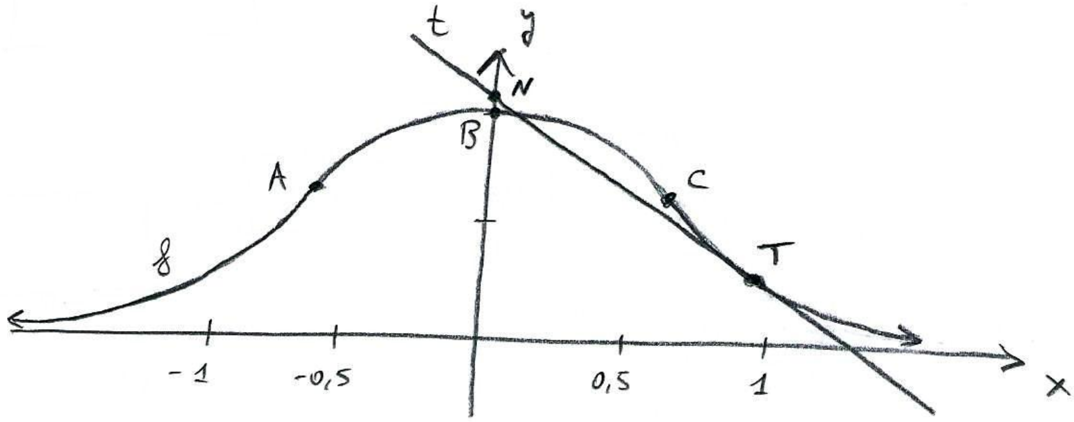
$$y \simeq -0{,}736x + 1{,}10$$

→ per a gràfica: passa per:

$T(1, 0'4)$ tangència

$N(0, 1'1)$ tall Y

REPRESENTACIÓ:



4

4.a/

$$\boxed{\left(3^x + \frac{1}{x^5}\right)'} = \ln 3\cdot 3^x\cdot (x)' + (x^{-5})' =$$

$$= \ln 3\cdot 3^x - 5x^{-6} = \boxed{\ln 3\cdot 3^x - \frac{5}{x^6}}$$

4.b/

$$\boxed{\left(\log_2\sqrt{x-1}\right)'} = \frac{1}{\ln 2\sqrt{x-1}}\,\frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \boxed{\frac{1}{2\ln 2\cdot(x-1)}}$$