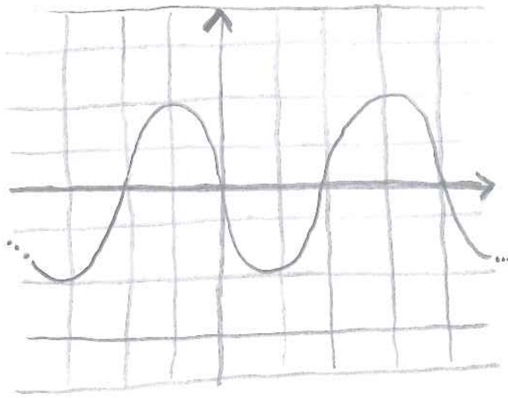
E. PIA SABADELL $\boxed{M1}$ proposta qüestions part de funcions (trimestral) **ENUNCIATS**

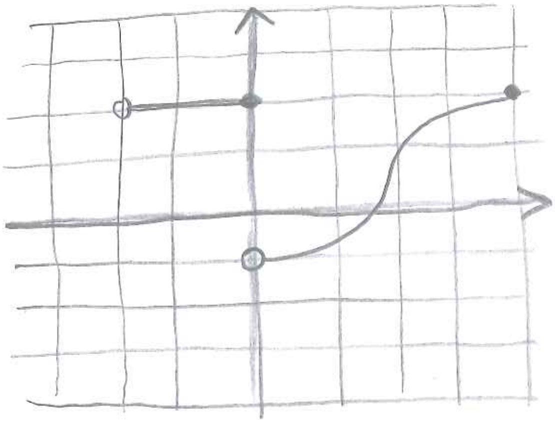
del, 2 - VI - 14

1 Digues i/ Dom f, ii/ Im f, iii/ mínims i màxims relatius, iv/ intervals de creixement / decreixement, v/ simetries (si n'hi ha), vi/ període (si és periòdica) i vii/ concavitat / convexitat als punts d'abscissa $x_1 = -1$ i $x_2 = +1$.

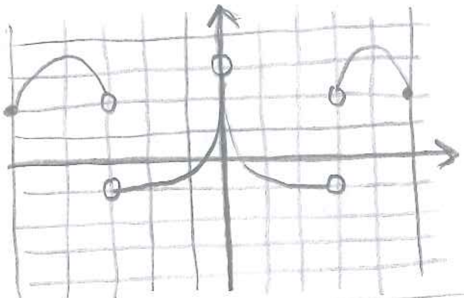
a)



b)



c)



2 Digues el domini de:

a) $a(x) = \sqrt{x-6}$

b) $b(x) = \dfrac{x^2}{4-x^2}$

c) $c(x) = \dfrac{x^2}{4+x^2}$

d) $d(x) = \cos(x+9)$

e) $e(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5+x}}{1+x}$

g) $g(x) = \dfrac{\sqrt{6x-1}}{x^2+5x+6}$

h) $h(x) = 6x^5 - x^3 + 2x + 9$

3 Digues simetria, quan sigui el cas:

a.- $f(x) = \dfrac{6x^2}{2+x^4}$

b.- $f(x) = x^3 - x$

c.- $f(x) = 4$

d.- $f(x) = x^3$

e.- $f(x) = 4 + x^3$

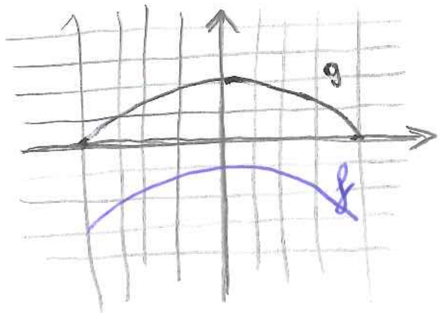
f.- $f(x) = 4 + x^2 + x^6$

g.- $f(x) = \cos x + \sin x$

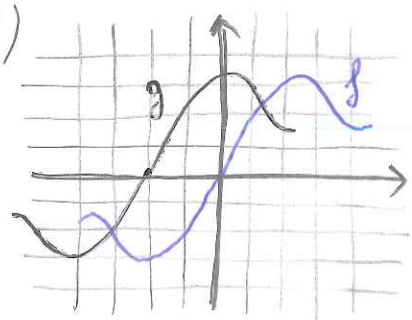
h.- $f(x) = \dfrac{2}{1+x}$

4 Expressa, en cada cas, la funció $g(x)$ en termes de $f(x)$:

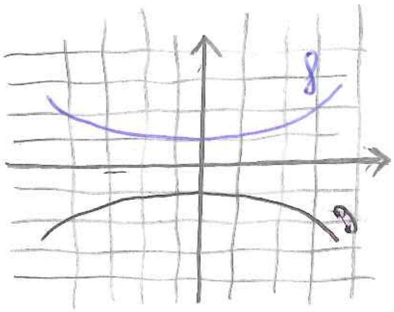
a)



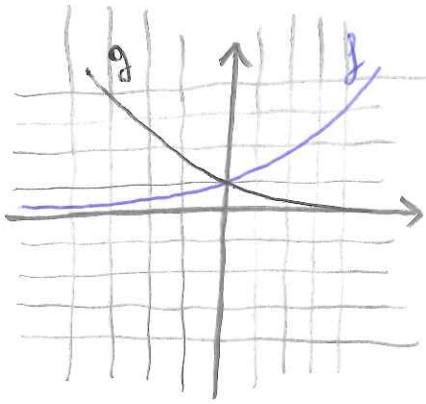
b)



c)



d)



5 Fes uns eixos cartesians i dibuixa:

errada: hi feia 1 (és 2).

a) Una funció amb $\mathrm{Dom}\, f = (-1, 1) \cup (1, 2]$

b) " " " $\mathrm{Im}\, f = [-1, 0) \cup (0, 2]$

c) Una corba que no sigui una funció

d) Una funció de període $T = 2$

e) " " simètrica (o "parella")

f) " " senar (o "imparella")

Pepe: les solucions

E. PiA SABADELL

[dll, 2-VI-14]

M1

RESOLUCIÓ: model de qüestions de part de funcions per al trimestral.

W1W2W3'14

i / v

1.a) $\underbrace{\text{Dom } f}_{\uparrow} = \mathbb{R}$

tots els $x \in \mathbb{R}$ on la funció està definida.

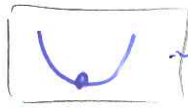
(també: $D[f] = (-\infty, +\infty)$): els punts suspensius volen dir que la corba continua (periòdicament) cap a dreta i esquena de manera indefinida. Per tant, per a tot $x \in \mathbb{R}$, existeix una imatge $y = f(x)$, i llavors el domini és tota la recta $\mathbb{R}$.

$\underbrace{\text{Im } f}_{} = [-2, 2]$

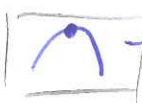
Recorregut: tots els $y \in \mathbb{R}$ tals que són la imatge d'algún x del domini, $y = f(x)$.

⟵ els $y = -2$ i $y = 2$ són els valors de l'ordenada en els extrems relatius (mínim i màxim, respectivament), i han d'estar inclosos en el recorregut. Per a no estar-ho, hauríem de tindre, en comptes d'un extrem, un "forat":

<u>Extrems relatius</u>: evidentment, com que $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ i la funció és periòdica, n'hi hauria infinits. Nosaltres, però, només indicarem els dos màxims i ~~...~~ dos mínims relatius que veiem a la gràfica de l'enunciat:

... on la corba fa una "<u>vall</u>":  ⟶ <u>mínim relat.</u>

(Ha de ser una veritable "vall": ha de tenir corba pels dos costats: no val ni).

... on la corba fa un "<u>cim</u>":  ⟶ <u>màxim relat.</u>

(No val ni).

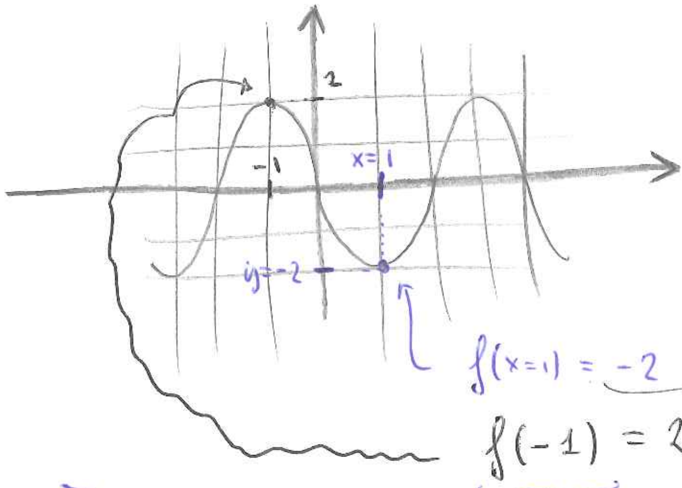
⇒ per tant, als punts d'obscissa $\boxed{x=-3}$ i $\boxed{x=1}$ tenim mins. rel., i als $\boxed{x=-1}$ i $\boxed{x=3}$ tenim màx.r.

(NOTA: hem solvat intervals de creixement / decreixement: ho fem més endavant.)

SIMETRIES: $\boxed{f(x) = -f(-x)}$ ⇔ $\boxed{f \text{ és imparella}}$ (o "senar").

⇔ $\boxed{f(-x) = -f(x)}$

Vegem-ho:



Anàlogament podem veure que:

$f(3) = 2$

$f(-3) = -2 = -f(3)$

etc.

$f(x=1) = -2$

$\underbrace{f(-1)}$ $= 2 = -(-2) = \underbrace{-f(1)}$

$f(-x) = \cdots\cdots = -f(x)$

(si $x=1$, veiem que la condició de senar es verifica).

Una altra manera de comprovar, recordem-ho, si una funció és imparella o senar, és imaginar que fem una rotació al voltant de l'origen de 180° (podem pensar que fiquem el paper sobre un vinil que gira): si la corba coincideix amb com estava inicialment, la funció és imparella. (També hi ha això de la doble reflexió: primer el "mirall de paret", l'eix Y, i després "l'estany", l'eix X).

PERIODE: quan una funció és periòdica, és que podem tallar una banda vertical del paper on hem fet la representació gràfica i copiant-la infinitament a

E. PIA SABADELL

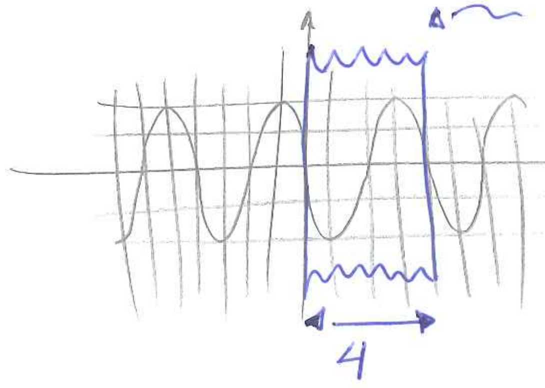
dll, 2-VI-14

M1

RESOLUCIÓ: model part de funcions trimestral.

ii/v

dreta i esquerra construïm la gràfica de la funció original:



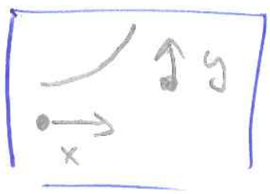
tallant i enganxant aquesta banda desplaçada horitzontalment (això és important: no val "pujar" ni "baixar") a dreta i esquerra, construïm tota la gràfica. La banda pot ser infinita per ~~dalt~~ dalt i per baix, si és necessari, però no així la seua amplada horitzontal. Aquesta amplada (4, en el nostre cas) és el període: $\boxed{T=4}$.

NOTA: en aquest examen, de periodicitat només entra el que hem dit fins ara, però és interessant assenyalar que una funció periòdica de període T satisfà que: $f(x+T)=f(x)$; per exemple,

$$\underbrace{f(-1)}_{2} = f(-1+4) = f(3) = 2 \quad \checkmark .$$

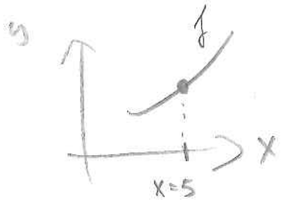
CREIXEMENT i DECREIXEMENT: anàlogament al que hem dit amb els extrems relatius: n'hi havien infinits intervals, però només assenyalarem els de la gràfica.

↱ Una funció creix si: quan avancem cap a la dreta en les x, la y de la corba puja:



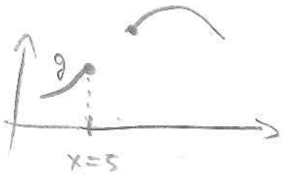
↳ si baixa o es queda igual, no creix.

A més a més, com ens passa amb els mínims i màxims, per a dir que en un punt creix necessitem tenir corba per darrera i davant també, sense forats ni salts:



→ en $x=5$, f creix.

Però:



← en $x=5$, g ni creix ni decreix.

- En un màxim o mínim relatius, f ni creix ni decreix.

En la nostra gràfica de l'exercici (1.a):

f creix en $x \in (-3,-1) \cup (1,3)$

f decreix en $x \in (-1,1) \cup (3,5)$

Els intervals de creixement/decreixement sempre són oberts ("parèntesi i no claudàtors)

CONCAVITAT / CONVEXITAT en $\boxed{x_1=-1}$ i $\boxed{x_2=+1}$ → $\boxed{\text{còncava.}}$

⇒ $\boxed{\text{convexa.}}$

Di bell nou, necessitem que existeixi gràfica una mica per darrere i una mica per davant per a parlar de concavitat (forma de tipus "vall":

← completa: aquí ~~...~~ també.

aquí és còncava

(Anàlogament amb convexitat).

E. PIA SABADELL

[dll, 2-VI-14]

M1

Resolució: model part de funcions trimestral

WSW
iii / V

1.b) Dom $f = (-2, 4]$; Im $f = (-1, 2]$; no tenim extrems relatius (si la funció és constant, no hi ha extrem; si no està definida la corba una mica davant i darrere "sense salts", tampoc); f creix en $x \in (0, 4)$;

sempre oberts aquests intervals (!)

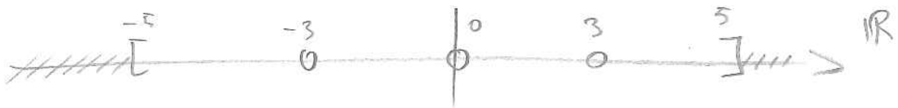
no hi ha simetries; no és periòdica;

f és còncava a $x \in (0, 2)$

f és convexa a $x \in (2, 3)$

$\Rightarrow$ en $x = -1$ no és ni còncava ni convexa.
en $x = +1$ és còncava.

1.c) Dom$f = [-5, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, 3) \cup (3, 5]$



Im $f = (-1, 3{,}5]$

Extrems relatius: en $x = -4$ i $x = 4$ tenim màx. rel.

f creix en $x \in (-5, -4) \cup (-3, 0) \cup (3, 4)$

f decreix en $x \in (-4, -3) \cup (0, 3) \cup (4, 5)$

f és parell: si fiquem un mirall en eix Y, es reprodueix la part de gràfica que tapem.

també: $f(-x) = f(x)$, com podem comprovar

gràficament: $f(-5) = 2 = f(5)$

$f(-4) = 2{,}5 = f(4)$

etc.

f no és periòdica.

$$\left.\begin{cases} f \text{ és còncava a } x \in (-3,0) \cup (0,3) \\ f \text{ és convexa a } x \in (-5,-3) \cup (3,5) \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ a $\boxed{x=-1}$ i $\boxed{x=1}$ és còncava.

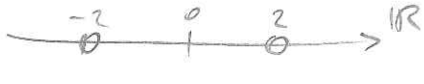
2.a) $D\left[\sqrt{x-6}\right] = [6, +\infty)$.

hem de veure on el radicand, $x-6$, és negatiu. Veiem on es fa zero: $\boxed{x=6}$, i veiem si la part que hem de treure està a esquerra o dreta del resultat:

en $x=6$, $a(x)=0$, per tant queda inclòs en el domini

2.b) $D\left[\frac{x^2}{4-x^2}\right] = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$

hem de treure, només, els punts on el denominador es fa zero: $x = \pm 2$



E. PIA SABADELL [del, 2-VI-14]

M1

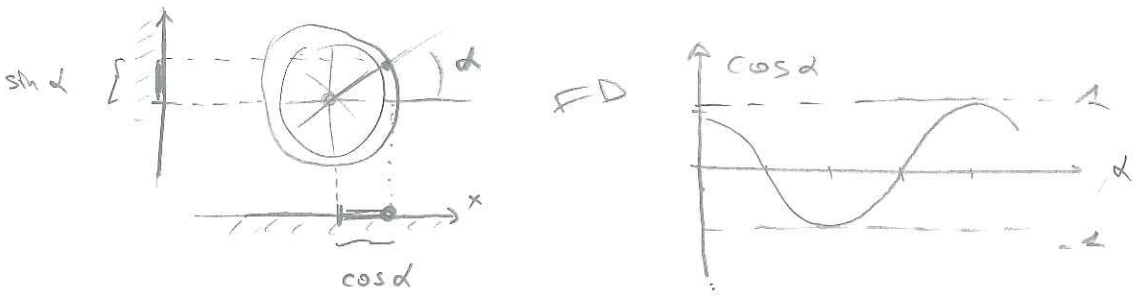
RESOLUCIÓ: model de part de funcions (trimestral)

iv / v

2.c) $D\left[\frac{x^2}{4+x^2}\right] = \mathbb{R}$

Vegem que el denominador no s'anul·la mai: $4+x^2=0$ $\rightarrow$ $x=\sqrt{-4}$ ($\nexists$).

2.d) $D[\cos(x+9)] = \mathbb{R}$ $\Leftarrow$ el cosinus és "l'ombra en el terra" del punt pintat en la roda de bicicleta:



$\Rightarrow$ per a qualsevol angle existeix el seu cosinus ($D[\cos x] = \mathbb{R}$), i per tant per a qualsevol $x \rightarrow \exists \cos(x+9)$ ■.

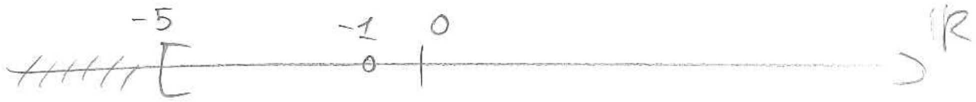
2.e) $D\left[\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right] = [0,1) \cup (1,+\infty)$. (també: $= [0,+\infty) - \{1\}$).

hem de treure els que "espatllen" l'arrel ($x<0$) i els que fan zero el denominador (només $x=1$):

2.f) $D\left[\frac{\sqrt{5+x}}{1+x}\right] = [-5,-1)\cup(-1,+\infty)$

traiem $x < -5$ (en $x=-5$, el radicand es fa zero; en $x<-5$, es fa negatiu)

traiem $x = -1$



2.g) $D\left[\frac{\sqrt{6x-1}}{x^2-5x+6}\right] = \left[\frac{1}{6},2\right)\cup(2,3)\cup(3,+\infty) = (*)$

· radicand $=0 \Rightarrow 6x-1 \Rightarrow x = 1/6 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ traiem $\boxed{x < 1/6}$

traiem!!

· denom $=0 \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot6}}{2\cdot1}} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$

$(*) = \left[1/6,+\infty\right) - \{2,3\}$ ■

manera alternativa vàlida d'expressar-ho

2.h) $D\left[6x^5 - x^3 + 2x + 9\right] = \mathbb{R}$ ■

(un polinomi està definit per a tot $x\in\mathbb{R}$
— veiem que no té ni arrels, ni denominadors
ni logaritmes —).

E. PIA SABADELL

[All, 2-VI-14]

M1

RESOLUCIÓ: model de part de funcions (trimestral)

3.a) $f(-x) = \frac{6(-x)^2}{2+(-x)^4} = \frac{6x^2}{2+x^4} = f(x) \to$ parella

3.b) $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) =$

$= -f(x) \to$ senar. [NOTA: clar, és suma de funcions senars]

3.c) $f(-x) = 4 = f(x) \to$ parella

3.d) $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ senar.

3.e) $f(-x) = 4 + (-x)^3 = 4 - x^3$ ... $\boxed{\text{no té simetries}}$

[NOTA: clar, és suma de funció parella amb funció senar]

3.f) $f(-x) = 4 + (-x)^2 + (-x)^6 = 4 + x^2 + x^6 = f(x)$

parell. [NOTA: és suma de f. parelles ✓]

3.g) $f(-x) = \cos(-x) + \sin(-x) = \cos x - \sin x$

... $\boxed{\text{no té simetries}}$ [és suma de f. parella —cosinus— i senar —el sinus—].

3.h) $f(-x) = \frac{2}{1-x} \leftarrow$ $\boxed{\text{no té simetries.}}$

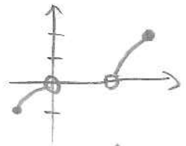
4.a) $g(x) = f(x) + 3$ — exemple: $f(x) = -x^2 - 1$

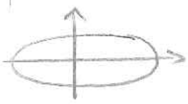
4.b) $g(x) = f(x+2)$ — [desplaçament $\xrightarrow{+k}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x \to (x-k)}$] aquí k serà -2.

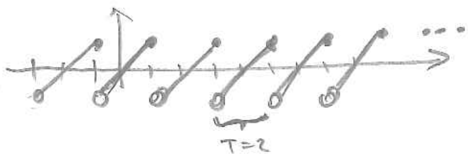
4.c) $g(x) = -f(x)$ — exemple: $f(x) = x^2 + 1$

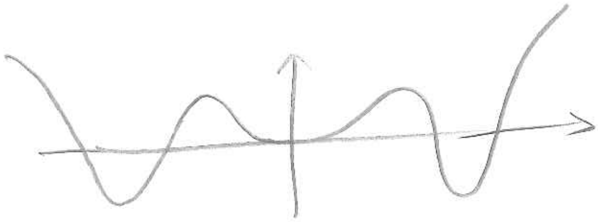
4.d) $g(x) = f(-x)$ — exemple: $f(x) = e^x$

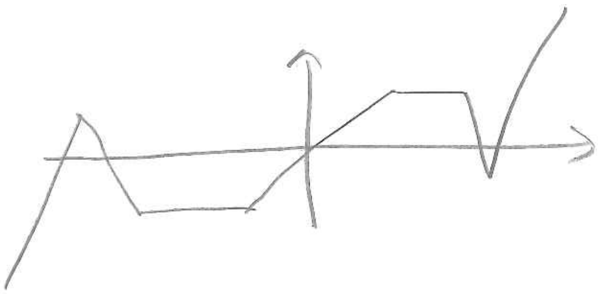
5.a) 

5.b) 

5.c) 

5.d) 

5.e) 

5.f) 

Escola Pia
Sabadell

ESCOLA PIA SABADELL	Data: *dc, 21-V-2014*	Puntuació
Matemàtiques	Alumne: WSW84'14	
Prova: « Circumferències [*i proced. rectes*] »	Curs: *2n Batxillerat*	

CONCEPTES. [*Puntuat sobre 5*]

C1. Omple la taula següent. [*3 punts*]

CENTRE	RADI	EQUACIÓ	EQUACIÓ GENERAL	HI PERTANY P(6, 2)?
(-1,2)	7			
			$x^2+y^2+6x-8y+24=0$	

C2. Troba tres rectes r_1, r_2 i r_3 que siguin, respectivament, secant, tangent i exterior a la circumferència $x^2+(y-1)^2=49$. [*1 punt*]

C3. Siguin les circumferències $x^2+y^2=4$ i $(x-2)^2+y^2=16$. Digues la seva posició relativa. [*1 punt*]

PROCEDIMENTS. [*Puntuat sobre 7*]

P1. Troba l'equació de la recta tangent a la circumferència

$$x^2+y^2+2x-2y-23=0$$

en el punt $Q(3,4)$. [*2 punts*]

P2. Escriu l'equació de la circumferència concèntrica a

$$x^2+y^2-6x-6y+14=0$$

que passi pel punt $P(-1,-1)$. [*2 punts*]

A(4, 2)

P3. Tres vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram són $A(4,2)$, $B(2,1)$ i $C(3,4)$.

a) Troba el quart vèrtex, D. [*1, punt*]

b) Calcula l'àrea del paral·lelogram. [*1, punt*]

c) Quin angle formen els costats $\overline{BA}$ i $\overline{BC}$? [*1, punt*]

C/ Conectos 5? , 5º 1a. 6:30 p.m.

interconec... 5º luego el 2º.

E. PiA SABADELL
curs 2013/14

M1

RESOLUCIÓ:
examen de CIRCUMF.
(i procediments rectes)

WWW 14
i / ii

CONCEPTES:

C1 Omple la taula següent:

	Centre	Radi	Eq. (PITAGÒRICA)	Eq. GENERAL	Hi pertany P(6,2)?
A)	(-1,2)	7	$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 49$	$x^2+y^2+2x-4y-44=0$	SÍ
B)	(-3,4)	1	$(x+3)^2+(y-4)^2 = 1$	$x^2+y^2+6x-8y+24=0$	NO

A.- $x^2 + 1 + 2x + y^2 + 4 - 4y - 49 = 0$;

$(6+1)^2 + (2-2)^2 = 7^2 + 0 = 49$ ✓

B.- $\left.\begin{array}{l} A = 6 = -2a \to a = -3 \\ B = -8 = -2b \to b = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow C:(a,b) = (-3,4)$

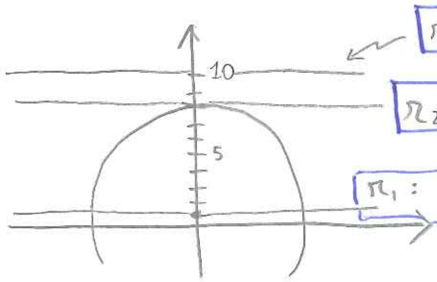
$C = \boxed{24 = a^2 + b^2 - r^2} = 9 + 16 - r^2 \to$

$\to r = \sqrt{25-24} = 1$;

$(6+3)^2 + (2-4)^2 = 81 + 4 = 85 \neq 1 \Rightarrow$ NO !!

C2 Troba r_1, r_2, r_3 respectivament secant, tangent, ext. a: $x^2 + (y-1)^2 = 49 \to$

$\to \left\{\begin{array}{l} C(0,1) \\ R = 7 \end{array}\right\} \to$



$\boxed{r_3: \ y = 10}$ (exterior)

$\boxed{r_2: \ y = 8}$ (tangent)

$\boxed{r_1: \ y = 1}$ (secant)

$\boxed{C3}$ posició relativa de $(x-2)^2 + y^2 = 16$ i $x^2 + y^2 = 4$

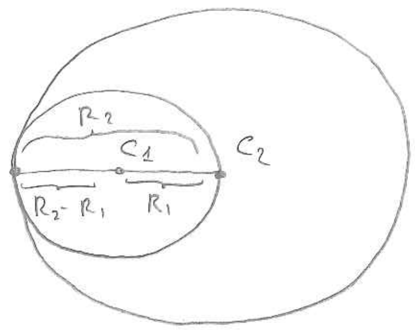
$(x-2)^2 + y^2 = 16 \rightarrow \begin{cases} C_2 : (2,0) \\ R_2 = 4 \end{cases}$

$x^2 + y^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} C_1 : (0,0) \\ R_1 = 2 \end{cases}$

$$\boxed{d_{12} = d(C_1, C_2) = 2}$$

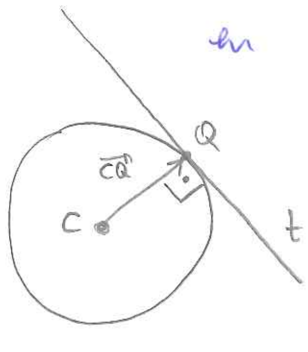
$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} d_{12} < R_2 \\ 2 < 4 \end{array}} & \text{és més petita que el radi major} \\ \boxed{\begin{array}{l} d_{12} = R_2 - R_1 \\ 2 = 4 - 2 \end{array}} & \text{és igual a la diferència de radis} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ «les circumferències són tangents interiors». ∎



PROCEDIMENTS:

$\boxed{P1}$ recta tangent a $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$ en $Q(3,4)$



$t: \boxed{Ax + By + C = 0}$

$\hookrightarrow \begin{cases} A = 2 = -2a \rightarrow a = -1 \\ B = -2 = -2b \rightarrow b = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C : (-1,1)}$

$\vec{v_\perp}$ de la t buscada:

$\vec{v_\perp} = \vec{CQ} : (3+1, 4-1) = (4,3)$

$\Rightarrow t: 4x + 3y + C = 0$; trobem C imposant que $Q \in t$, $4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + C = 0 \rightarrow C = -24 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{t: 4x + 3y - 24 = 0}$$ ∎

E. Pia Sabadell

curs 2013/14

M1

Resolució: examen circumf. (i procediments rectes)

'14

P2

Circumferència concèntrica a $x^2+y^2-6x-6y+14=0$ que passi per $P(-1,-1)$:

$A=-6=-2a \rightarrow a=3$
$B=-6=-2b \rightarrow b=3$

$C:(a,b)=(3,3)$, que també serà el centre de la concèntrica que hem de trobar.

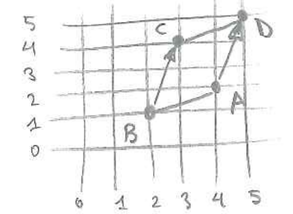
radi:

$\boxed{R=|\vec{PC}|=|(3+1,3+1)|=}$ $=\sqrt{4^2+4^2}=\boxed{\sqrt{32}}$

Tot plegat: $\boxed{(x-3)^2+(y-3)^2=32}$ (també volia donar-ne la general: $x^2+y^2-6x-6y-14=0$).

P3

A(4,2)
B(2,1)
C(3,4)

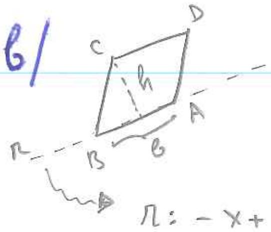


gràficament ja veiem quina serà la solució: D(5,5), encara que així s'ha de justificar analíticament.

a/ $\boxed{\vec{OD}}=\vec{OA}+\vec{AD}=\vec{OA}+\vec{BC}:(4,2)+(3-2,4-1)=(4,2)+(1,3)=(5,5)$

$\boxed{D(5,5)}$

b/



$\boxed{\text{Àrea}=b\cdot h=\sqrt{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{5}}=5\ u^2}$

$b=|\vec{BA}|=|(4-2,2-1)|=|(2,1)|=\sqrt{2^2+1^2}=\boxed{\sqrt{5}}$

$h=d(C,r)=\frac{|-3+2\cdot4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\boxed{\frac{5}{\sqrt{5}}}$

$r: -x+2y+C=0 \xrightarrow{B(2,1)\in r} -2+2+C=0 \rightarrow C=0 \rightarrow \boxed{r: -x+2y=0}$

c/ $\vec{BA}:(2,1)$
$\vec{BC}:(1,3)$

$\boxed{\alpha=\cos^{-1}\frac{|\vec{BA}\cdot\vec{BC}|}{|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|}}=\cos^{-1}\frac{|2\cdot1+1\cdot3|}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{1^2+3^2}}=\cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=$

$=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{5}{10}}\right)=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)=$

$=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\boxed{45^\circ}$

E. PiA SABADELL

EXAMEN DE GEOMETRIA WSWR4 '14 1r Batxillerat 13-14

Nom:____

CONCEPTES (puntuats sobre 8,5)

1. (4,5p) Omple la taula que trobaràs al final de la prova.

2. (2p) Donades les rectes:

$r: \ mx - 2y + 5 = 0$

s: $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 5 - k \end{cases}$

Calcula m per tal que les rectes siguin:

a) Paral·leles.
b) Perpendiculars.

3. (2p) Calcula la distància que hi ha entre el parell de rectes següents:

$r: x + 2y + 1 = 0$

$s: 3x + 6y - 3 = 0$

PROCEDIMENTS (puntuats sobre 8)

1. (2p) Calcula l'angle format per les rectes:

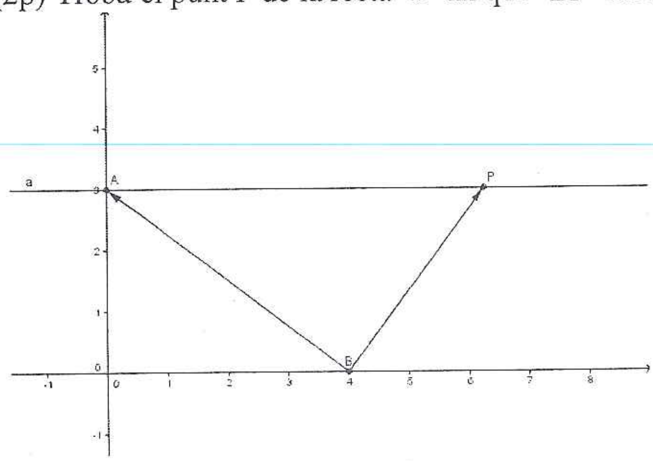
$r: \ 5x + 4y - 1 = 0$

$s: \ x + 2y - 7 = 0$

2. (2p) Troba l'àrea del triangle de vèrtexs A(–1,–2), B(3,–1) i C(2,4).

3. (2p)Troba l'equació de la recta paral·lela a $2x - y + 1 = 0$ que disti 2 del punt A(1,–3).

4. (2p) Troba el punt P de la recta a tal que $\overrightarrow{BP}$ formi amb $\overrightarrow{BA}$ un angle recte.



Equació	Tipus d'equació	punt P	punt Q	vector director	pendent	Hi pertany el punt (–5, 5) ?
$(x, y)=(0,2)+k(5,-3)$						
$y=\frac{-1}{2}x+3$						
$x+3=\frac{y+1}{-3}$						

E. Pi A SABADELL   **M1**   RESOLUCIÓ: 11/11/8/'14

curs 2013/14   examen de GEOMETRIA   i / ii

(a.k.a.: "vectors i eqs. de la recta").

CONCEPTES:

1. Omple la taula:

Eq.	Tipus eq.	punt P	punt Q	vector director	pendent	Hi pertany (-5,5)?
$(x,y)=(0,2)+k(5,-3)$	vectorial	$(0,2)$	$(5,-1)$	$(5,-3)$	$-\frac{3}{5}=-0{,}6$	sí $(k=-1)$
$y=-\frac{1}{2}x+3$	explícita	$(0,3)$	$(6,0)$	$(1,-\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}=-0{,}5$	NO
$x+3=\frac{y+1}{-3}$	contínua	$(0,-10)$	$(1,-13)$	$(1,-3)$	-3	sí

2. Donades $\rightarrow$ $r: mx-2y+5=0 \rightarrow \vec{v_r}=(2,m) \rightarrow m_r=\frac{m}{2}$

$s: \begin{cases} x=1+k \\ y=5-k \end{cases} \rightarrow \vec{v_s}=(1,-1) \rightarrow m_s=-\frac{1}{1}=-1$

... calculem el valor del paràmetre m per a que r i s siguin:

a/ $r \parallel s \Rightarrow m_r=m_s \Rightarrow \frac{m}{2}=-1 \Rightarrow \boxed{m=-2}$ "paral·leles" ▨

(**Nota:** a l'examen no s'exigia, però atenent a que solem considerar que "coincidents" no és un cas particular de "paral·leles", caldria, amb rigor, revisar que no tinguin punts en comú; per exemple, $(1,5)\in s$ clarament, i, per tant, anem a l'eq. d'r i veiem que $-2\cdot 1-2\cdot 5+5=-2-10+5=-7\neq 0$ $\Rightarrow (1,5)\notin r \Rightarrow r$ i s no poden ser coincidents ▨)

b/ $r \perp s \Leftrightarrow m_r=-\frac{1}{m_s} \Rightarrow \frac{m}{2}=-\frac{1}{-1}=1 \Rightarrow \boxed{m=2}$ "perpendiculars": ▨

(Tret que: alguna d'ambdues sigui horitzontal, cas en què les equacions serien, senzillament, $r: x=x_0$ i $s: y=y_0$, i el pendent d'r no existiria [però no és el cas, i aquest comentari tampoc no s'exigia en l'examen.])

Mètode alternatiu:

$s: x+y-6=0$

$\Rightarrow$ a/ $\frac{m}{1}=\frac{-2}{1}\neq\frac{5}{-6} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{m=-2}$ ▨

b/ $\vec{v_s}\,\vec{v_r}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(-1,1)}_{\vec{v_s}}\cdot\underbrace{(2,m)}_{\vec{v_r}} \Rightarrow -2+m=0$

$\Rightarrow \boxed{m=2}$ ▨.

3. Calcula la distància entre: $\left| \begin{array}{l} r: \; x + 2y + 1 = 0 \\ s: \; 3x + 6y - 3 = 0 \end{array} \right.$

1r: veiem la posició relativa: $\dfrac{A}{A'} \boxed{?} \dfrac{B}{B'} \boxed{?} \dfrac{C}{C'} \rightsquigarrow \boxed{\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{6} \neq \dfrac{1}{-3} \Rightarrow \Rightarrow \text{paral·leles.}}$

(doncs si fossin secants o coincidents $d(r,s) = 0$)

2n: com que són paral·leles, agafem un punt qualsevol d'r:
fem $y = 0 \to x = -1 \Rightarrow \boxed{P(-1,0)}$; amb ell, calculem la distància a s:

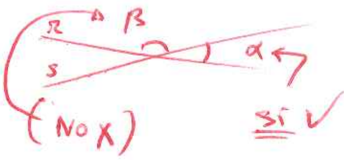
$$\boxed{d(r,s) = d(P,s) = \frac{|3\cdot(-1) + 6\cdot 0 - 3|}{\sqrt{3^2 + 6^2}} = \frac{6}{\underbrace{\sqrt{45}}} = 0{,}89\ u}$$

(també: $= \dfrac{6}{3\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$)

PROCEDIMENTS:

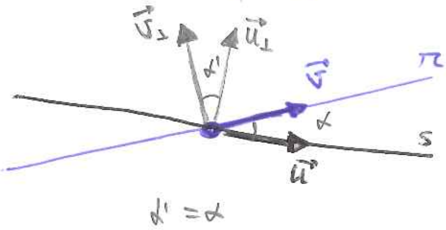
1. Calcula'n l'angle: $\left\{ \begin{array}{l} r: \; 5x + 4y - 1 = 0 \to \vec{v_1}: (5,4) \\ s: \; x + 2y - 7 = 0 \to \vec{u_1}: (1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow$

⚠ no oblidem ficar el valor absolut!! ⇝ la raó és que sempre ens interessa l'angle petit, dels dos possibles entre r i s:



$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \cos^{-1} \frac{|\vec{v_1} \cdot \vec{u_1}|}{|\vec{v_1}| \cdot |\vec{u_1}|}} = \cos^{-1} \frac{|(5,4)\cdot(1,2)|}{\sqrt{25+16} \cdot \sqrt{1+4}} = (*)$$

(recordem que, efectivament, l'angle que formen dues rectes es correspon amb el que formen els seus vectors directors, però també el que formen els seus vectors normals:



)

$$[*] = \cos^{-1} \frac{|5 + 8|}{\sqrt{41 \cdot 5}} = \cos^{-1} \frac{13}{\sqrt{205}} = \boxed{24{,}78^\circ}$$

E. PiA SABADELL

curs 2013/14

M1

Resolució: examen de GEOMETRIA (a.k.a.: "vectors i eqs. de la recta").

[illegible]'14

ii / ii

---

2. Àrea de $\widehat{ABC}$ $\begin{cases} A\ (-1,-2) \\ B\ (3,-1) \\ C\ (2,4) \end{cases}$

recta r ("A-B"):

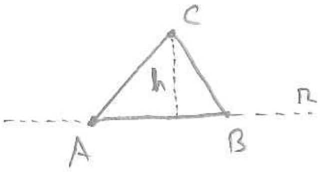
$m = \dfrac{-1+2}{3+1} = \dfrac{1}{4}$ → p.-pendent → $\dfrac{1}{4} = \dfrac{-1-y}{3-x}$ →

→ $3 - x = -4 - 4y$ →

→ $\boxed{r:\ x - 4y - 7 = 0}$

Prenem el costat $\overline{AB}$ com a base, $\boxed{b = |\vec{AB}| = |(4,1)| = \sqrt{17} \simeq 4{,}12}$;

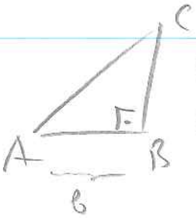
$\boxed{\text{Àrea} = \dfrac{b \cdot h}{2}}$; $\boxed{h = d(r, C) = \dfrac{|2 - 4\cdot 4 - 7|}{\sqrt{1^2 + 4^2}}} = \dfrac{|2-23|}{\sqrt{17}} = \boxed{\dfrac{21}{\sqrt{17}}}$ ⟹



⟹ $\boxed{\text{Àrea} = \dfrac{\sqrt{17} \cdot \dfrac{21}{\sqrt{17}}}{2} = \dfrac{21}{2} = 10{,}5\ u^2}$

nota: aquest valor no és aproximat, sinó exacte.

NOTA: recordem que la fórmula $h = d(r, C)$, sent-hi C el vèrtex oposat al costat contingut en r, sempre és correcta; en canvi, h serà igual a la longitud d'un dels costats només si parlem d'un catet d'un triangle rectangle:



$h = |\vec{CB}|$ ... per a justificar, doncs, una expressió com aquesta, primerament hauríem de demostrar que $\vec{AB} \perp \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$ (que no és el cas del triangle del problema).

3. recta paral·lela a $s: 2x - y + 1 = 0$ que disti 2 de $A(1,-3)$ (això és: "que estigui a distància 2 a del punt A"; disti, present de subjuntiu del verb "distar"):

$r: 2x - y + C = 0$ serà paral·lela a s, doncs tenen el mateix $\vec{v}_\perp$. Per a trobar el C que hem deixat (de moment) indeterminat, imposem que:

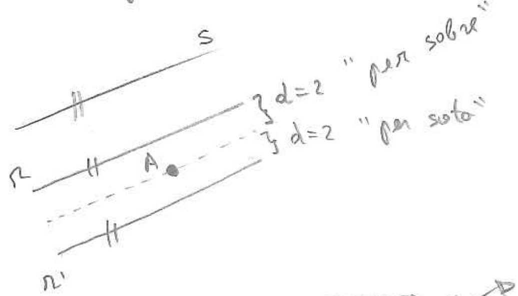
$$2 = d(r, A) = \frac{|2\cdot 1 + 3 + C|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|5 + C|}{\sqrt{5}} \Rightarrow |5 + C| = 2\cdot\sqrt{5}$$

$\Rightarrow$ dues possibilitats:

$$\begin{cases} 5 + C = 2\cdot\sqrt{5} \Rightarrow \boxed{C = 2\sqrt{5} - 5} = -0{,}53 \\ -5 - C = 2\cdot\sqrt{5} \Rightarrow \boxed{C = -(5 + 2\sqrt{5})} = -9{,}47 \end{cases}$$

$$\boxed{r: 2x - y - 0{,}53 = 0}$$

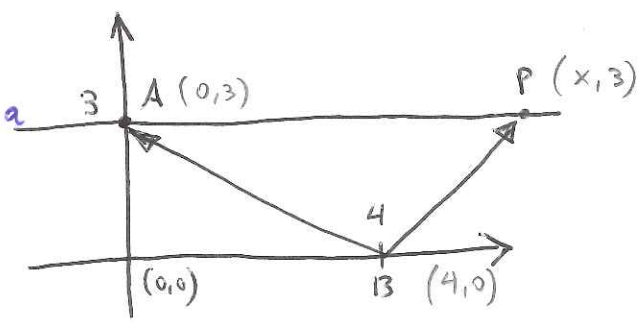
$$\boxed{r': 2x - y - 9{,}47 = 0}$$



NOTA: en l'examen, només donant-ne una de les dues ja n'hi havia prou.

4. Troba $P \in a$ tal que $\vec{BP} \perp \vec{BA}$:

$$\boxed{\vec{BP}\cdot\vec{BA} = 0}$$



$\vec{BP} = (x-4, 3)$

$\vec{BA} = (-4, 3)$

$\vec{BP}\cdot\vec{BA} = -4\cdot(x-4) + 9 = -4x + 16 + 9 = \boxed{-4x + 25}$

$\rightarrow \boxed{x = \frac{25}{4}} \Rightarrow \boxed{P\left(\frac{25}{4}, 3\right)}$