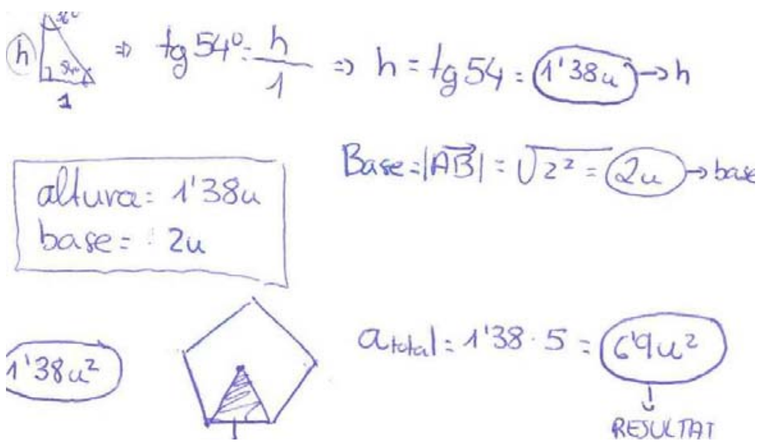
QUADERN d'ESTUDI: les EQUACIONS de la RECTA

Matemàtiques 1r de Batxillerat
(Escola Pia de Sabadell, 2013/14)



Autors: Adrià Arrabal, Anna Bardají, Helena Díez, Gerard Capellas, Xavi Lao, Jordi Vázquez, Natàlia Camps, Eva Galán, Cristina Solà, Cristian Galán, Oriol Martínez, Jordi Martínez, Josep Ciurana, Sergi Lorente, Bernat Correro, Marc Godayol, Xavi Jiménez, Camino Llonch, Remei Prat.

Coordinació: Pepe Ródenas Borja.

Continguts

- Problemes p.1
- Solucions p.6
- Resum de teoria p.9

Enunciats:

P1.- Siguin les següents rectes, que passen pels punts indicats:

$$r: \quad A(2,-3) \text{ i } B(-4,0)$$
$$s: \quad C(-2,-1) \text{ i } D(4,-4)$$
$$n: \quad E(4,-1) \text{ i } F(-4,3)$$
$$k: \quad G(1,2) \text{ i } H(2,0)$$

a) Troba les seves equacions generals.

b) Digues les posicions relatives entre les sis parelles possibles de rectes.

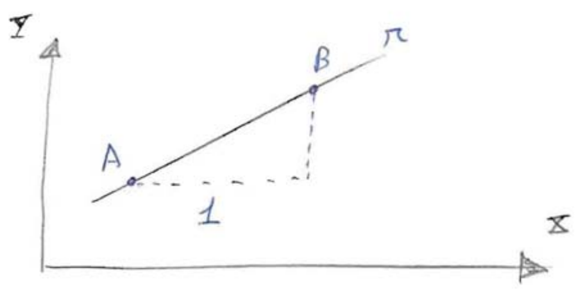
c) Dibuixa en un diagrama cartesià les quatre rectes a partir dels anteriors punts i comprova les teves respostes.

P2.- Respon les qüestions següents:

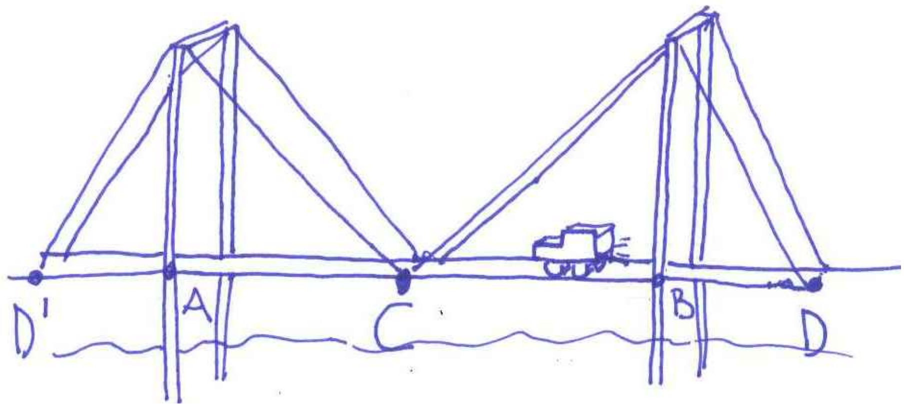
a) Siguin les rectes r i r' tals que $m \neq m'$ i $n = n'$. Quina és la seva posició relativa?

b) Siguin les rectes r i r' tals que $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$ i $n = n'$. Quina és la seva posició relativa?

c) Sigui la recta $r: y = mx + n$ i dos punts A i B sobre aquesta recta, segons s'ha representat a la figura següent. Digues la llargada de l'altre catet del triangle rectangle que té $\overrightarrow{AB}$ per hipotenusa.



P3.- Hem construït els pilars d'un pont, i volem trobar el seu punt mitjà C per a clavar els cables. Troba aquest punt a partir de la figura següent, tenint en compte que $A(2,1)$ i $B(9,1)$. Després troba el punt simètric de $D(12,1)$ respecte de C. Tots els darrers vectors els hem expressats en unes certes unitats *u* que no són metres. Calcula la distància entre A i B, tenint en compte que la distància entre els punts $(0,0)$ i $(1,0)$ és de 3,5 m.



P4.- Siguin els punts $A(7,3)$ i $B(2,-3)$. Troba les sis equacions de la recta que els uneix.

P5.- Siguin els punts $A(7,3)$ i $B(28,12)$.

a) Determina la distància entre A i B.
b) Troba el punt simètric de A respecte de B.
c) Determina el punt mitjà del segment $\overline{AB}$.
d) Determina un possible vector director de la recta r que passa pels punts A i B. Escriu després la seva equació vectorial.
e) A partir de l'equació vectorial que acabes de trobar, dedueix l'equació general de r. No oblidis escriure tots els passos intermedis.
f) Determina la posició relativa de la recta r. i la recta $r'\!: \ 42y - 18x = 0$.
g) Escriu l'equació d'una tercera recta, s, que sigui paral·lela a r.

P6.- Siguin les dues rectes següents:

$$r: \begin{cases} x = 2\text{-}2k \\ y = 1\text{-}k \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \text{-}k \\ y = 3\text{-}3k \end{cases}$$

a) Troba les seves equacions explícites.
b) Digues la posició relativa de r i s. Justifica la teva resposta en termes de m, m', n, i n'.

P7.- Coneixem tres vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram:

$$A(1,-1)$$
$$B(-1,1)$$
$$C(1,3)$$

a) Troba les coordenades del quart vèrtex, D.
b) Calcula la llargada dels costats i digues si són iguals.
c) Troba el punt mitjà del costat $\overline{AB}$.
d) Quin angle formen els costats $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$?
e) Creus que les diagonals tindran la mateixa longitud? Per què? Comprova la teva resposta calculant les longituds.
f) De quin tipus de paral·lelogram es tracta? Justifica la teva resposta.

P8.- Determina la distància entre el punt $P(2,8)$ i la recta $r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{8}$.

P9.- Determina el valor que ha de tenir el paràmetre t per a que la recta $r_1 : tx + 3y + 8 = 0$ formi un angle de 55º amb la recta $r_2 : \begin{cases} x = 6k + 12 \\ y = 2k + 8 \end{cases}$

P10.- Siguin els punts següents:

$$A(1,1)$$
$$B(3,1)$$

Si suposem que són els extrems de la base d'un pentàgon regular,

a) troba les coordenades del seu centre;
b) troba les coordenades de la resta de vèrtexs;
c) calcula l'àrea del pentàgon.

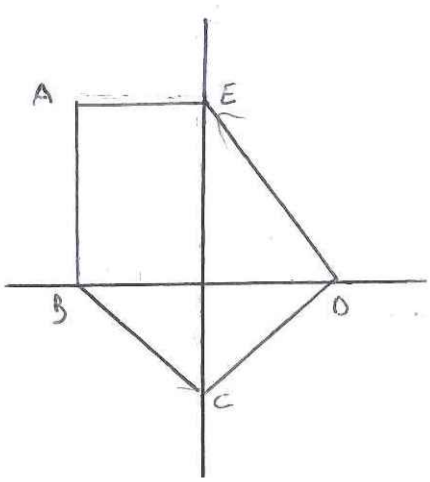
P11.- Sigui la recta r que passa pel punt $P(4,7)$ i té com a vector director $\vec{d}(1,2)$. Troba la seva equació general, i després estudia la seva posició relativa respecte de la recta $s: 4x + 2y - 1 = 0$. Si són secants, troba el punt on es tallen.

P12.- Sigui el punt $P(2,5)$ i la recta $r: \dfrac{x}{4} = \dfrac{y-3}{2}$.

a) Calcula la distància entre P i r.

b) Troba la posició relativa entre r i $s: \frac{x}{4} = y - 3$. Si són secants, troba l'angle que formen; si no ho són, digues a quina distància es troben l'una de l'altra.

P13.- Observa aquesta figura:



Coneixent les coordenades dels següents punts

$A(1,-1)$

$B(-1,1)$

$C(1,3)$

a) troba el punt D, sabent que és simètric a B respecte de l'origen de coordenades;

b) comprova si $\overline{BC}$ i $\overline{DE}$ són paral·lels. Si no ho són, calcula on es troben les rectes que els contenen.

c) troba l'àrea de la part de la figura corresponent a valors positius de la coordenada y.

P14.- Digues quina és la posició relativa de les següents parelles de rectes. Si són secants, digues en quin punt es tallen..

a)

$$r: \begin{cases} x = 3\text{-}2\lambda \\ y = 1\text{-}5\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = 3\text{-}4\mu \end{cases}$$

b)

$$r: \begin{cases} x = 4\text{-}3\lambda \\ y = -5 + \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 + 9\mu \\ y = -1 + 3\mu \end{cases}$$

P15.- Siguin els vèrtexs d'un triangle,

$$A(4{,}9)$$
$$B(9{,}4)$$
$$C(11{,}10)\,.$$

a) Calcula l'àrea del triangle.
b) Digues si és equilàter, isòsceles o escalè.

P16.- Troba l'equació de la recta s que passa pel punt $P(2,-6)$ i forma un angle de 37º amb la recta $r:\ 4x\text{-}2y+2=0$.

P17.- Siguin els punts $P(5{,}3)$ i $Q(1{,}1)$, i les dues rectes

$$r:\ \text{-}7x+6y-10=0$$
$$s:\ 8x+3y-3=0$$

a) Troba la distància entre P i r.
b) Troba la distància entre Q i s.
c) Quina és la posició relativa entre les dues rectes? Si són secants, troba el punt de tall.

P18.- Determina l'angle que formen les rectes següents:

$$r:\ \begin{cases} x=3\text{-}2\lambda \\ y=-2-4\lambda \end{cases} \qquad s:\ \begin{cases} x=4\mu \\ y=6+2\mu \end{cases}$$

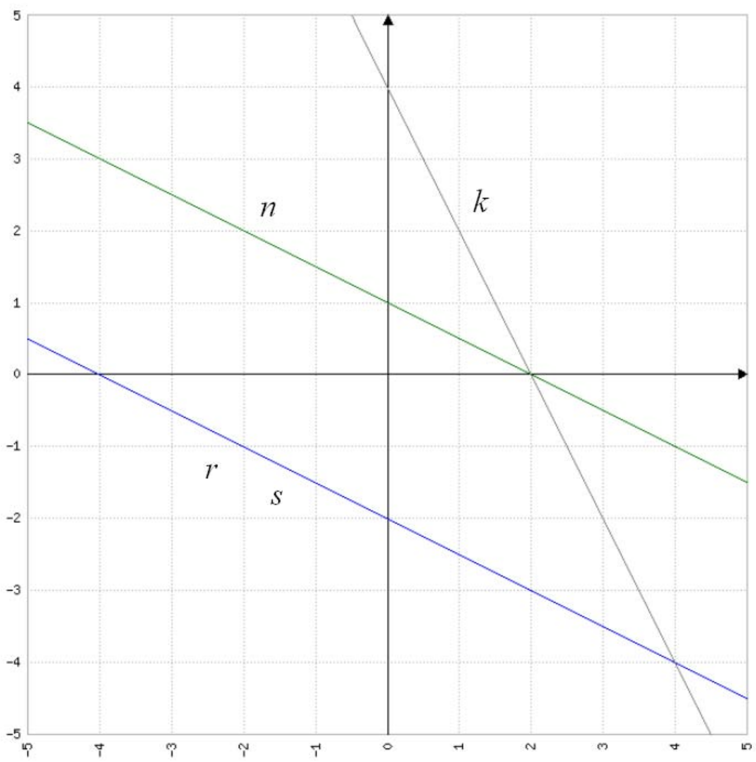
P19.- Troba el valor del paràmetre a per a que $r:\ ax+2y-7=0$ sigui paral·lela a $s:\ \frac{3x+1}{2}=y+2$.

SOLUCIONS

S.P1.- **a)** $r:\ 3x+6y+12=0$; $s:\ 3x+6y+12=0$; $n:\ 4x+8y-8=0$; $k:\ 2x+y-4=0$.

b) *r*, *s* coincidents; ambdues paral·leles a *n*; totes tres secants a *k*..

c)



S.P2.- **a)** secants

b) coincidents

c) *m*

S.P3.- $C\,(5'5,1)$; $D'\,(-1,1)$; $d\,(A,B)=24{,}5$ m

S.P4.-

$$(x,y)=(7,3)+k\,(-5,-6);\quad \begin{cases} \mathrm{x}=7-5\mathrm{k} \\ \mathrm{y}=3-6\mathrm{k} \end{cases};\quad \frac{x-7}{-5}=\frac{y-3}{-6};$$

$$-6\mathrm{x}+5\mathrm{y}+27=0;\quad \mathrm{y}=\frac{6}{5}x-\frac{27}{5};\quad (\mathrm{y}-3)=\frac{6}{5}(x-7)$$

S.P5.- **a)** $d\,(A,B)=22{,}85$ unitats; **b)** $A'\,(49,21)$; **c)** $M\,(17'5,7'5)$;

d) $\vec{v}\,(21,9)$; $(x,y)=(7,3)+k\,(21,9)$;

e) $\begin{cases} x = 7+21k \\ y = 3+9k \end{cases}$; $\dfrac{x-7}{21}=\dfrac{y-3}{9}$; $9x - 21y = 0$;;

f) coincidents; **g)** $9x - 21y + 1 = 0$

S.P6.- **a)** $r:\ y=\dfrac{x}{2};\ \ s:\ y=3x+3$ **b)** secants, atès que els seus pendents són diferents: $\dfrac{1}{2}\neq 3$.

S.P7.- **a)** $D\,(3,1)$ **b)** sí que són iguals, doncs tots els vectors que uneixen vèrtexs adjacents tenen el mateix mòdul: 2,8 unitats **c)** $M\,(0,0)$

d) 90º **e)** les diagonals tindran la mateixa longitud perquè un paral·lelogram que té tots els costats iguals i un angle recte és necessàriament un quadrat; podem comprovar que, efectivament, ambdues tenen una longitud de 4 unitats **f)** contestat en apartat (e).

S.P8.- $d\,(P,r)=3{,}4$ unitats

S.P9.- existeixen dues possibilitats: $t=2{,}23$ i $t=-10{,}08$. Es corresponen, alternativament, als casos en què r_1 puja o baixa respecte r_2 conforme avancem cap a la dreta.

S.P10.- **a)** $O\,(2,\ 2'38)$ **b)** $C\,(4,\ 2'38)$, $D\,(2,\ 4'08)$, $E\,(0,\ 2'38)$ **c)** $\text{àrea} = 6'9\ \text{u}^2$

S.P11.- $r:\ 2x-y-1=0$; les dues rectes són secants, i és tallen en el punt de coordenades $\left(\dfrac{3}{8},-\dfrac{1}{4}\right)$.

S.P12.- **a)** $d\,(P,r)=0{,}89$ unitats **b)** són secants, angle: 12º 32'.

S.P13.- **a)** $D\,(2,0)$ **b)** no són paral·lels; les rectes es troben al punt $(10,-12)$

c) $\text{àrea} = 9\ \text{u}^2$

S.P14.- **a)** secants, punt de tall: $\left(\dfrac{67}{23},\dfrac{18}{23}\right)$ **b)** secants, punt de tall: $\left(-3,-\dfrac{8}{3}\right)$

S.P15.- **a)** Triem com a base qualsevol dels costats, i trobem quina és l'equació de la recta que el conté. La distància d'aquesta recta al vèrtex oposat serà l'altura associada a aquesta base, amb la qual podrem trobar: $\text{àrea} = 20\ \text{u}^2$ **b)** És isòsceles, i el costat desigual és $\overline{BC}$ (en aquest cas és més curt que els altres dos).

S.P16.- $s\!: 5{,}43x + y - 4{,}86 = 0$; aquesta possibilitat és correspon amb la que queda a 37º per sobre de r conforme avancem cap a la dreta (n'hi ha també la possibilitat de la recta que li quedaria a 37º per sota). L'hem trobada exigint que la diferència dels respectius angles amb l'horitzontal sigui 37º, i després imposant que la recta passi pel punt P .

S.P17.- **a)** $d\,(P, r) = 2{,}93$ unitats **b)** $d\,(Q, s) = 0{,}94$ unitats **c)** són secants, punt de tall: $\left(-\dfrac{4}{23}, \dfrac{101}{69}\right)$

S.P18.- Primerament deduïm els vectors directors amb les paramètriques que l'enunciat ens dóna; a partir d'aquí, aplicant la fórmula corresponent, trobem que: $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{4}{5}\right) = 36{,}87^{\circ}$.

S.P19.- $a = -3$.

E. PIA SABADELL

[18 - IV - 2014; dg]

M1

RESUM: «Vectors & Equacions de la recta»

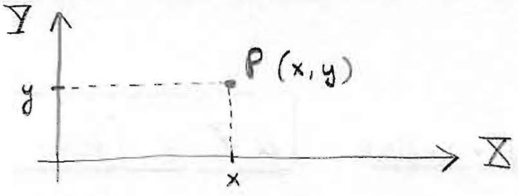
WNX14

i / iii

1. Punts i Vectors en el pla (RECORDATORI)

1.a Punts:

descrivim els punts del pla amb dues **coordenades**, referides als dos eixos cartesians, X i Y:



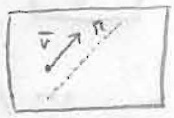
1.b Vectors:

un vector $\vec{v}$ es pot imaginar com una fletxa

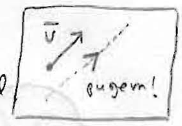
(més tècnicament, un "segment orientat"). Per a saber de quin vector parlem, cal conèixer:

- la seva longitud (o **mòdul**, $|\vec{v}|$):

- la seva **direcció**: a quina recta és paral·lel

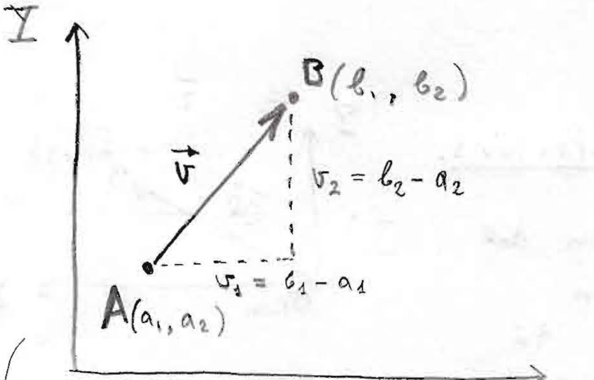


- el seu **sentit**: si "pugem" o baixem per la recta a la que $\vec{v}$ és paral·lel



1.c Components d'un vector:

una altra manera equivalent, més còmoda, de treballar amb vectors és fer servir les seves components. Per a trobar-les, dibuixem la fletxa en el pla, i anotem les coordenades



del punt A i B que hi ha en els extrems, i les restem en l'ordre "FINAL MENYS INICIAL":

$$(1) \quad \boxed{(v_1, v_2) = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2)}$$

NOTA: sovint escrivim $\vec{v} = B - A$ per abreujar, però això és un abús del llenguatge (veure comentari l'apartat 2.c).

Nota: si tenim les components (v_1, v_2), el mòdul es calcula amb t. Pitàgores: $\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}}$ (1.bis)

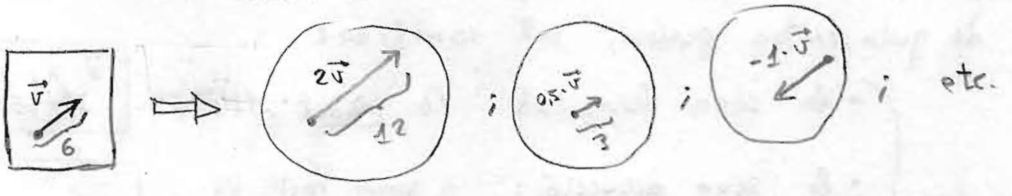
1.d Comentari sobre el llenguatge matemàtic:

estrictament, no és el mateix un punt del pla que la parella de coordenades amb la qual el descrivim. Per això, molts llibres eviten escriure $A = (x, y)$, i prefereixen dir $A(x, y)$. Igualment, no és el mateix una fletxa que les seves components com a vector, i molts llibres eviten $\vec{v} = (v_1, v_2)$ i prefereixen $\vec{v}(v_1, v_2)$.

2. Algunes OPERACIONS BÀSIQUES amb punts i vectors.

2.a Producte número · vector, $\boxed{k\vec{v} = (kv_1,\ kv_2)}$ (2) $\quad k \in \mathbb{R}$

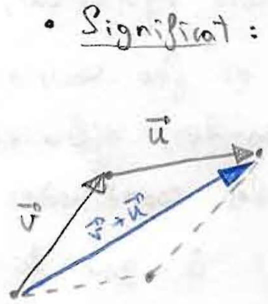
• Significat: el **resultat** és **un altre vector** paral·lel al original, més llarg si $|k| > 1$ i més curt si $|k| < 1$; en el mateix sentit si $k > 0$ i en sentit contrari si $k < 0$.



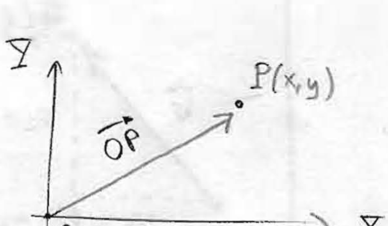
... per això, quan es parla de vectors, els números reben el nom d' "escalars" (dones "escalen" els vectors).

2.b Suma de dos vectors, $\boxed{\vec{v} + \vec{u} = (v_1 + u_1\ ,\ v_2 + u_2)}$ (3)

• Significat: el **resultat** és **un altre vector**, que interpretem amb la diagonal del paral·lelogram definit per $\vec{v}$ i $\vec{u}$.



2.c Vectors de posició. Translacions.



• El vector que va de l'origen del diagrama cartesià $O(0,0)$ a un punt $P(x,y)$ s'escriu $\vec{OP}$ i té té les components iguals a les coordenades de P, $(v_1, v_2) = (x, y)$. És el vector de posició del punt P.

E. PiA SABADELL

[18 - IV - 2014; dij]

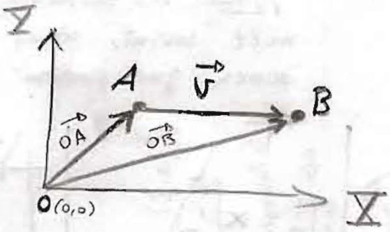
M1

RESUM: «Vectors & Equacions de la recta»

WSWZf'14

ii / iii

- Si volem conèixer quin punt $B(b_1, b_2)$ resulta de **traslladar un punt** $A(a_1, a_2)$ **seguint un vector** $\vec{v}(v_1, v_2)$, només hem de sumar al vector de posició de A el vector $\vec{v}$:



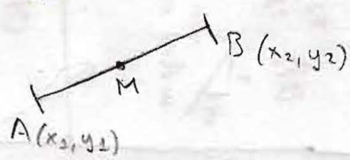
(4) $\boxed{\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{v}}$ $\xLeftrightarrow{\text{equivalentment}}$ $\boxed{(b_1, b_2) = (a_1, a_2) + (v_1, v_2)}$ (4.bis)

- De fet, el vector que uneix dos punts $A(a_1, a_2)$ i $B(b_1, b_2)$ s'escriu sovint $\vec{AB}$, i les seves components es calculen amb [1], que està en clara relació amb [4.bis].

- Comentari sobre el llenguatge matemàtic: sovint escrivim les equacions [1] i [4] de les respectives maneres següents, per abreujar: $\vec{v} = B - A$; $B = A + \vec{v}$. Això, però, és un abús del llenguatge, donés estrictament les operacions "restar dos punts" o "sumar un punt i un vector" no estan definides matemàticament (els motius són subtils, però podem pensar, per exemple, que les sumes i restes sempre es defineixen entre objectes matemàtics del mateix tipus —"sumem cebes amb cebes i dóna cebes; pomes amb pomes i dóna pomes", etc.—).

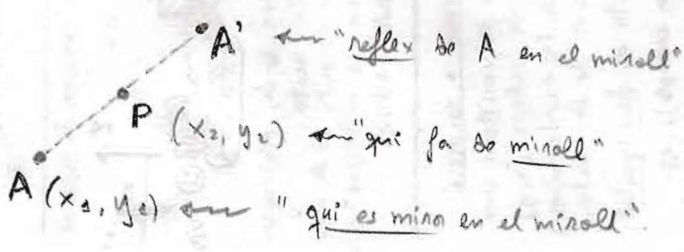
2.d Punt mitjà d'un segment d'extrems A i B.

$$\boxed{M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)} \quad (5)$$



TRUC: les coordenades de M són les mitjanes de les de A i B (!).

2.e Punt simètric a un punt A respecte d'un altre punt P.

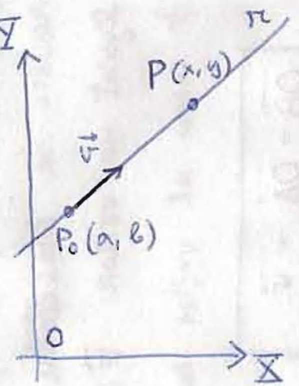
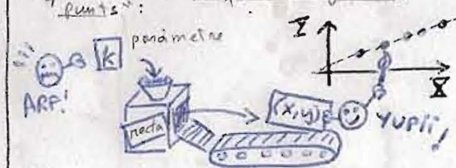
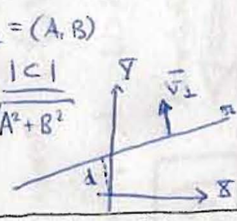
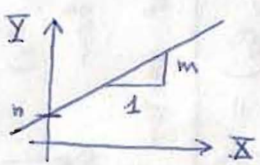
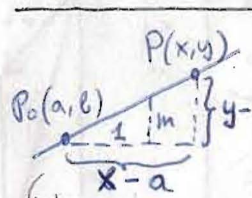
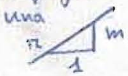


$$\boxed{A'(2x_2 - x_1, 2y_2 - y_1)} \quad (6)$$

3. Les sis EQUACIONS de la RECTA

1. vectorial
2. paramètriques
3. contínua
4. general
5. explícita
6. punt-pendent

Nota: els elements característics de la "recta r" que tot seguit tractarem no són, molt sovint, únics (com ara en el cas del vector director). Sempre sobreentendrem, doncs, que parlem d'un "possible vector director", etc.

INTERPRETACIÓ GRÀFICA	EQUACIÓ: nom	EQUACIÓ: forma	"DNI" ASSOCIAT (P(p_1,p_2) i Q(q_1,q_2) seran dos punts qualssevol de r)	SIGNIFICAT i comentaris
	1 vectorial	$(x,y)=(a,b)+k(v_1,v_2)$, $k\in\mathbb{R}$ (7)	$\boxed{P_0,\vec{v}}$ on: $P_0(a,b)$: punt qualsevol de r que ja coneixem. $\vec{v}(v_1,v_2)$: vector paral·lel a r ("director")	• Equació com a "màquina de generar punts":  • Per cada valor de k, pintem un punt de la recta. • Dues eqs. diferents de la mateixa recta pinten els mateixos punts en diferent ordre.
	2 paramètriques	$\begin{cases} x=a+kv_1 \\ y=b+kv_2 \end{cases}$ $k\in\mathbb{R}$ (8)	• Podem trobar $\vec{v}$ així: $\vec{v}=Q-P$; $\vec{v}=(1,m)$; $\vec{v}=(-B,A)$; $\vec{v}=(-w_2,w_1)$ (13) ($\vec{w}$ un vector normal a r, $\vec{w}=\vec{v}_\perp$)	
	3 contínua	$\dfrac{x-a}{v_1}=\dfrac{x-b}{v_2}$ (9)		• Equació com a condició que ha de verificar una parella de valors (x,y) per a ser les coordenades d'un punt de la recta. • Si la recta és horitzontal (y=6, per exemple), eq. contínua no existeix. Si és vertical, no existeixen ni cont., ni explícita ni punt-pendent (ex.: x=2).
$\vec{v}_\perp=(A,B)$ $d=\dfrac{\lvert C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 	4 general	$Ax+By+C=0$ (10)	"sense papers" → DNI de difícil interpretació. $\begin{cases} A=v_2 \\ B=-v_1 \\ C=v_1 b-v_2 a \end{cases}$ (14) $(A,B)=\vec{v}_\perp$ (15)	• Les equacions general, vectorial i paramètriques, però, són "robustes": sempre existeixen.
	5 explícita	$y=mx+n$ (11)	$\boxed{m,n}$ on: n: "ordenada en l'origen", altura a la qual r talla eix Y. $n=-\dfrac{C}{B}=b-ma$ (16)	• L'explícita és única: per a una mateixa recta, només n'hi ha una. Així no ocorre amb les altres equacions.
 triangles semblants ⇨ $\dfrac{y-b}{x-a}=\dfrac{m}{1}$	6 punt-pendent	$(y-b)=m(x-a)$ (12)	$\boxed{P_0,m}$ on: m: "pendent", el que pugem quan n'avancem una  $m=\dfrac{v_2}{v_1}=-\dfrac{A}{B}=\dfrac{q_2-p_2}{q_1-p_1}$ (17)	• Amb l'explícita, també podem "generar punts": ens inventem el valor de la x, i calculem la y corresponent.

Comentari: fent un abús del llenguatge, sovint s'escriu així la vectorial: $(x,y)=(a,b)+k\vec{v}$, o fins i tot: $P=P_0+k\vec{v}$.

E. PiA SABADELL

[18-IV-2014; dv]

M1

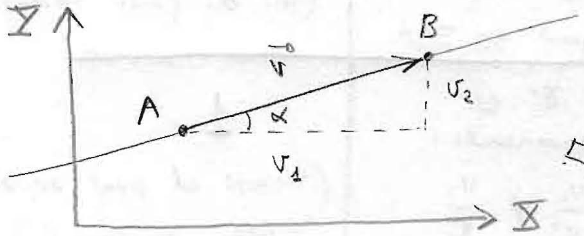
RESUM: «Vectors & Equacions de la recta»

LLSWX+'14

iii/iii

4. L'angle amb l'horitzontal $\boxed{\alpha = tg^{-1}\, m}$ (18)

Interpretem trigonomètricament el pendent m d'una recta r dibuixant un triangle rectangle amb la hipotenusa sobre dos punts A i B de r units pel vector director $\vec{v}(v_1, v_2)$:



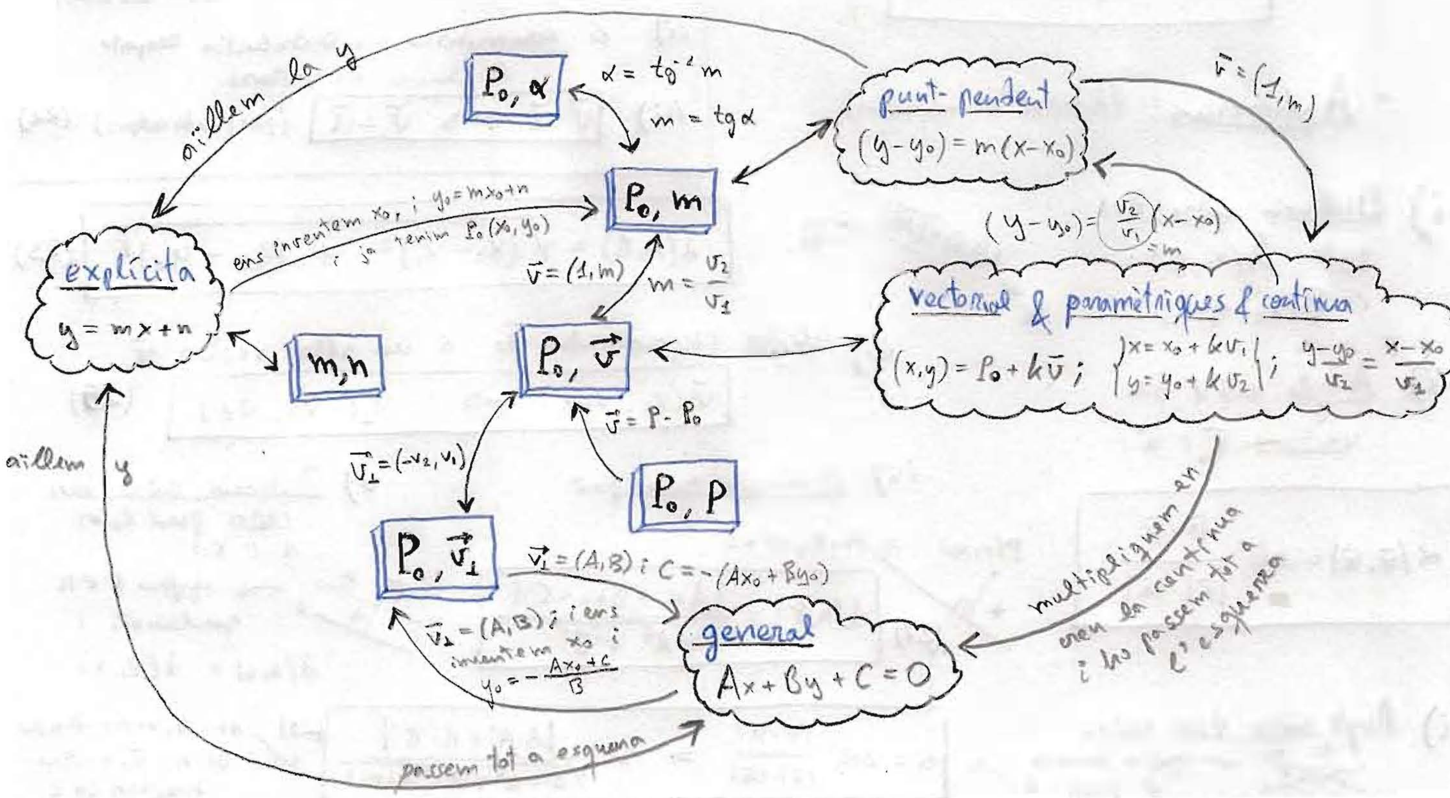
α: angle que forma r amb l'horitzontal (equivalentment: "amb l'eix X")

$$\boxed{tg\,\alpha = \frac{v_2}{v_1} = m} \quad (19),$$

és a dir, «el pendent m d'una recta r és la tangent de l'angle α que r forma amb l'horitzontal»

5. Connexió entre diferents "DNI's" i eqs. de la recta.

$P_0(x_0, y_0)$ i $P(x_1, y_1)$ seran punts de la recta r;
$\vec{v}(v_1, v_2)$ un possible vector director de r i $\vec{v}_\perp$ un vector normal a r.



6. Posicions relatives entre dues rectes r i r'.

	eqs. EXPLÍCITES	eqs. GENERALS	eqs. VECTORIALS	Solucions del sistema d'equacions (les dues explícites o les dues generals).
paral·leles	$m = m'$ $n \neq n'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$	$\vec{v}$ i $\vec{v}'$ proporcionals: $\frac{v_1}{v_1'} = \frac{v_2}{v_2'}$, i un punt no comú.	0 (cap punt comú)
coincidents	$m = m'$ $n = n'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$	$\vec{v}$ i $\vec{v}'$ proporcionals: $\frac{v_1}{v_1'} = \frac{v_2}{v_2'}$, i un punt en comú	∞ (tots els punts comuns)
secants	$m \neq m'$	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$	$\vec{v}$ i $\vec{v}'$ no proporcionals: $\frac{v_1}{v_1'} \neq \frac{v_2}{v_2'}$	1 (només el punt on es tallen és comú)

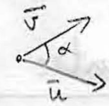
7. Producte escalar, distàncies i angles.

($|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$)

$|\vec{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$

$|\vec{u}| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2}$

- Definició: $\boxed{\vec{v}\cdot\vec{u} = |\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cos\alpha}$ (20)



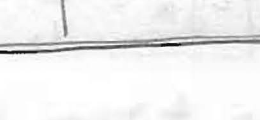
↳ fórmula equivalent:

$\boxed{\vec{v}\cdot\vec{u} = v_1u_1 + v_2u_2}$ (21)

- Propietats:
  - i) $\vec{v}\cdot\vec{u}$ no dóna un vector, sinó un escalar (un número).
  - ii) És commutatiu, i distributiu respecte la suma de vectors.
  - iii) $\boxed{\vec{v}\cdot\vec{u} \iff \vec{v}\perp\vec{u}}$ (perpendiculars) (22)

- Aplicacions: (directes o indirectes)

i) Distància entre dos punts $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$



$$\boxed{d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \quad (23)$$

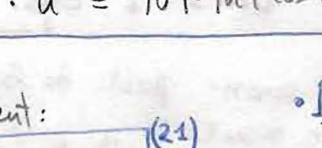
ii) Angle entre dos vectors $\vec{v}$ i $\vec{u}$:

(24) $$\boxed{\alpha(\vec{v},\vec{u}) = \cos^{-1}\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|}}$$

iii) Vector perpendicular $\vec{v}_\perp$ a un altre vector $\vec{v}$

$$\boxed{\vec{v}(v_1, v_2) \implies \vec{v}_\perp(-v_2, v_1)} \quad (25)$$

iv) Distància recta-punt:

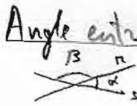


(27) $$\boxed{d(r,P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

v) Distància entre dues rectes paral·leles r i s:

→ agafem $P \in r$ qualsevol, i $d(r,s) = d(P,s)$

vi) Angle entre dues rectes



← agafem sempre el petit: α →

$$\boxed{\alpha = \cos^{-1}\frac{|\vec{v}\cdot\vec{u}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|} = \cos^{-1}\frac{|A\cdot A' + B\cdot B'|}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{(A')^2+(B')^2}}} \quad (28)$$

← on: $\vec{v}$, vector director de r; $\vec{u}$, vector director de s.