[dj, 18-II-16]

Ins Júlia Minguell

MATES (1r BAT.)

exercici de repàs

CONTINGUTS:
- factorització i arrels de polinomis
- asímptotes, punts de tall, dominis, discontinuïtats i límits de funcions racionals.

ENUNCIAT:

Estudia les asímptotes, punts de tall, dominis i continuïtat de les següents funcions.
Fes els dos límits laterals als punts de discontinuïtat, i digues si aquesta ès evitable, de salt finit o de salt infinit:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{2x^3+2x^2-12x}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4-18x^2+81}{x^3-6x^2+11x-6} & x>0 \\ -1 & x\leq 0 \end{cases}$$

⚠ ZERO: abans que res, convé treure de factoritzar números (sense x): $12x^3-24 = 12(x^3-2)$.

REPÀS FACTORITZACIÓ de POLINOMIS:

1r/ si no hi ha terme independent, traiem factor comú la potència d'x amb menor exponent:

$$2x^3+2x^2-12x = x(2x^2+2x-12)$$

això ja ès el primer factor, equivalent a $(x-0)$, construit amb l'arrel $x=0$.

2n/ per a factoritzar el que queda, hem de fer Ruffini: Podem evitar-ho si reconeixem una "diferència de quadrats":

$$x^2-25 = x^2-5^2 = (x+5)(x-5)$$

$$x^2-1 = x^2-1^2 = (x+1)(x-1)$$

$$x^2-9 = x^2-3^2 = (x+3)(x-3)$$

etc.

3r/ Si ja no queda més remei que fer Ruffini, hem de saber amb quines arrels provar:

a/ si eq. de 2n grau → les busquem aplicant la fórmula

b/ si eq. de 1r grau → les busquem resolent l'equació

c/ si eq. biquadrada → les busquem aplicant la fórmula

d/ si tots els coefs. són enters, podem provar amb els divisors enters del terme independent

e/ saber si $\boxed{x=1}$ és arrel és molt fàcil: hem de sumar tots els coeficients del polinomi ⇒ si dóna zero, $x=1$ és arrel.

4t/ si ja coneixem totes les arrels d'un polinomi, només ens faltarà saber l'última quocient, que és el prefactor numèric de la descomposició, però llavors no cal passar per tot el Ruffini: aquest prefactor serà el coef. del monomi de més alt grau del polinomi.

Per exemple:

$$-7x^5+35x^4-21x^3-63x^2 =$$
$$= -7(x-3)^2(x+1)x^2$$

EXEMPLES:

a

$$-2x^2-2x+12=0$$

$$\rightarrow x = \frac{+2 \pm\sqrt{4+4\cdot2\cdot12}}{-2\cdot2} = -3,\ 2$$

$$\boxed{-2x^2-2x+12 =}$$
$$\boxed{= -2(x+3)(x-2)}$$

b:

$$\begin{array}{c|cc} & 2 & -4 \\ 2 & & 4 \\ \hline & 2 & \lfloor 0 \end{array} \rightarrow 2x-4=0 \rightarrow x=\frac{4}{2}=2$$

$$\Rightarrow \boxed{2x-4 = \underbrace{2}\cdot\underbrace{(x-2)}}$$

veure una manera més ràpida de fer aquesta factorització en pàg. 10

c:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -18 & 0 & 81 \\ 3 & & 3 & 9 & -27 & -81 \\ \hline & 1 & 3 & -9 & -27 & \lfloor 0 \\ -3 & & -3 & 0 & +27 & \\ \hline & 1 & 0 & -9 & \lfloor 0 & \\ 3 & & 3 & 9 & & \\ \hline & 1 & 3 & \lfloor 0 & & \\ -3 & & -3 & & & \\ \hline & 1 & \lfloor 0 & & & \end{array}$$

$\rightarrow x^4 - 18x^2 + 81 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4\cdot 81}}{2} = \frac{18}{2} = 9$

$\rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{9} = \pm 3}$

$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$

$$\Rightarrow \boxed{x^4 - 18x^2 + 81 = (\underbrace{x-3}) ^2 (\underbrace{x+3})^2}$$

d:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 2 & & 2 & 10 & 12 \\ \hline & \underbrace{1 \quad 5 \quad 6} & & & \lfloor 0 \end{array}$$

-12 té $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6\}$ com a divisors enters. Podem provar amb 2.

això es pot fer amb fórmula eq. 2n grau.

e:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -1 & -11 & 11 & 9 & -9 \\ 1 & & 1 & 0 & -11 & 0 & 9 \\ \hline & \underbrace{1 \quad 0 \quad -11 \quad 0 \quad 9} & & & & & \lfloor 0 \end{array}$$

això es pot fer amb biquadrada.

REPÀS de LÍMITS de funcions racionals:

$$\boxed{\lim_{x\to\alpha} \frac{P(x)}{Q(x)}}$$

sent-hi: $\begin{cases} P(x) & \text{un polinomi "numerador"} \\ Q(x) & \text{un polinomi "denominador"} \\ \alpha: & \text{pot ser } +\infty, -\infty \text{ o un número.} \end{cases}$

1r Si $\boxed{\alpha = \pm\infty}$, dividim numerador i denominador entre x^n, sent-hi n el menor entre el grau del numerador i el grau del denominador:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 6x^3 + 1}{-x^2 + x - 21} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 6x + 1/x^2}{-1 + 1/x - 21/x^2} = (*)$$

$(g(P) = 4,\ g(Q) = 2 \Rightarrow$ dividim entre x^2 num. i denom.$)$

$$(*) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1 - 6/x + 1/x^4\right)}{-1 + 1/x - 21/x^2} = \frac{\infty(1 - 0 + 0)}{-1 + 0 - 0} = -\infty$$

al numerador ens queda $\infty - \infty + 0$, però la indeterminació es resol traient factor comú (sortint) la major potència d'x.

En la pràctica, bastarà, senzillament, considerar que dominen, respectivament, al numerador i al denominador, els monomis de major grau, i farem directament:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 6x^3 + 1}{-x^2 + x - 21} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{-x^2} = \lim_{x\to\infty} (-x^2) = -\infty$$

2n Si $\alpha \neq \pm\infty$, substituïm $x = \alpha$ i mirem si es pot fer l'operació: en tal cas, el resultat és el resultat del límit:

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 6x^3 + 1}{-x^2 + x - 21}} = \frac{1^4 - 6 \cdot 1^3 + 1}{-1^2 + 1 - 21} = \frac{-6}{-21} = \boxed{6/21}$$

3r Si $\boxed{\alpha \neq \pm\infty}$ però la substitució $x = \alpha$ duu a que s'anul·li el denominador, cal fer els límits laterals $x \to \alpha^+$ i $x \to \alpha^-$ per separat. Podem tenir dos casos:

3r.a $\boxed{\alpha = 0}$: treurem al numerador factor comú la menor potència d'x que hi hagi, treurem també al denominador factor comú la menor potència, simplificarem el que es pugui i avaluarem el límit lateral:

$$\boxed{\lim_{x \to 0^-} \frac{4x^7 + 2x^3 + x}{x^5 + 7x^4 - x^2}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x\,(4x^6 + 2x^2 + 1)}{x^2\,(x^3 + 7x^2 - 1)} =$$

(al numerador, x és la menor potència; al denominador, x^2 és la menor potència)

simplifiquem $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{4x^6 + 2x^2 + 1}{x\,(x^3 + 7x^2 - 1)} = \frac{0 + 0 + 1}{0^-\,(0 + 0 - 1)} = \frac{1}{0^+} \boxed{= +\infty}$$

3r. b $\boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$, no necessàriament zero: traiem el factor $(x-\alpha)$ al numerador i al denominador tantes vegades com sigui possible (això ho fem dividint $P(x):(x-\alpha)$ successivament mentre doni exacte, i el mateix $Q(x):(x-\alpha)$), després simplifiquem allò que es pugui i avaluem el límit:

$$\boxed{\lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{x^6-3x^5+4x^3}{5x^2+20x-60} = \lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{x^3(x-2)^{\cancel{2}}(x+1)}{\cancel{(x-2)}\,(5x+30)} = \frac{2^3\cdot 0^{\pm}\cdot 2}{5\cdot 2+30} = \frac{0^{\pm}}{40} = 0}$$

substituint, dóna $\boxed{\frac{0}{0}}$: cal treure al num. i al denom. factors $(x-2)$:

· num:

$$\boxed{x^6-3x^5+4x^3 = x^3\underbrace{(x^3-3x^2+4)} = (*)}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -3 & 0 & 4 \\
2 & & 2 & -2 & -4 \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & \lfloor 0 \\
2 & & 2 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 1 & \lfloor 0 & \\
2 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & \lfloor 3 \neq 0 & &
\end{array}$$

podem treure'n només dos factors, i el polinomi queda:

$$\boxed{(*) = x^3(x-2)^2(x+1)}$$

· den:

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 5 & 20 & -60 \\
2 & & 10 & 60 \\
\hline
 & 5 & 30 & \lfloor 0 \\
2 & & 10 & \\
\hline
 & 5 & \lfloor 40 \neq 0 &
\end{array} \Longrightarrow \boxed{5x^2+20x-60 = (x-2)(5x+30)}$$

només hem pogut treure'n un factor.

NOTA: En la pràctica, tenir factoritzat tant numerador com denominador representa un gran guany de cara a avaluar aquests límits problemàtics (indeterminacions). I no sempre donaran el mateix els límits laterals: si un dóna $+\infty$ i l'altre $-\infty$, per exemple, llavors el límit pròpiament dit no existeix:

$$\lim_{x\to 2} \frac{6x^2-6x-12}{x^3-4x^2+4x} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 2} \frac{6\cancel{(x-2)}(x+1)}{(x-2)^{\cancel{2}}\,x} \Rightarrow$$

[$x=2$ duu a $\frac{0}{0}$: factoritzem]

fem límits laterals:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} \frac{6(x+1)}{(x-2)x} = \frac{6\cdot 3}{0^-\cdot 2} = \frac{18}{0^-} = -\infty \\ \\ \lim_{x\to 2^+} \frac{6(x+1)}{(x-2)x} = \frac{6\cdot 3}{0^+\cdot 2} = \frac{18}{0^+} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\nexists \lim \text{ en } x\to 2}$$

(en $x=2$ hi ha una discontinuïtat de salt infinit amb una asímptota vertical de tipus "anti-simètrica": $\downarrow | \uparrow$).

▶ RESOLUCIÓ de l'EXERCICI:

$\boxed{\text{FUNCIÓ } f(x)}$ → per a treballar més còmodament, anem a fer abans la factorització de numerador i denominador:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{2x^3+2x^2-12x} = \frac{(x+2)(x-2)}{2x(x^2+x-6)} = (*)$$

num.: reconeixem $\boxed{\text{DIF. de QUADRATS} = \text{SUMA} \times \text{DIF.}}$

denom: traem x per no haver-hi terme independent, i 2 per adonar-nos que tots els coefs. parells.

per a factoritzar el parèntesi, fem eq. de 2n grau:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2+4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

$$[*] \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{2x(x-2)(x+3)}}$$

- Domini: $\boxed{D[f] = (-\infty,-3) \cup (-3,0) \cup (0,2) \cup (2,+\infty)}$

(treiem els punts on s'anul·la el denominador)

- És contínua a tots els punts del seu domini.

· Discontinuïtats:

$x=-3$: $\boxed{\lim_{x\to -3^{\mp}} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{2x\cancel{(x-2)}(x+3)} = \frac{-1}{2\cdot(-3)\cdot 0^{\mp}} = \boxed{\mp\infty}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\nexists \lim_{x\to -3} f(x)}$
hi ha una A.V. en $\boxed{x=-3}$ de tipus,
i per tant una discontinuïtat no evitable de salt infinit.

$x=0$: $\boxed{\lim_{x\to 0^{\mp}} \frac{x+2}{2x(x+3)} = \frac{2}{2\cdot 0^{\mp}\cdot 3} = \mp\infty}$ $\Rightarrow$ $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$
$\exists$ A.V. $\boxed{x=0}$
discont. inev.
salt infinit

$x=2$: $\boxed{\lim_{x\to 2^{\mp}} \frac{x+2}{2x(x+3)} = \frac{4}{2\cdot 2\cdot 5} = \frac{1}{5}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\lim_{x\to 2} f(x) = 1/5}$, $\nexists$ AV en $x=2$,
la discontinuïtat ès de tipus evitable.

· Punts de tall:

$x=0 \Rightarrow \nexists f(0) \Rightarrow$ $\boxed{\text{no talla eix } Y}$

$y=0 \Rightarrow \frac{(x+2)(x-2)}{2x(x-2)(x+3)} = 0 \Rightarrow (x+2)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \leftarrow \text{prohibit} \\ \boxed{x=-2} \checkmark \end{cases}$

(si $x\neq 0$, $x\neq 2$, $x\neq -3$)

$\Downarrow$

$\boxed{(-2,0) \text{ únic punt de tall}}$

Funció $g(x)$ $\rightarrow$ Anem a factoritzar la seva expressió en $x>0$:

$$\frac{x^4-18x^2+81}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{(x+3)^2(x-3)^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

- num: biquadrada $\rightsquigarrow$ $x^2 = \dfrac{18 \pm \sqrt{18^2-4\cdot 1\cdot 81}}{2\cdot 1} = \dfrac{18}{2} = 9 \rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{9}=\pm 3}$

Si $y=x^2$, llavors $y=9$ és "arrel doble", i

$$\boxed{x^4-18x^2+81} = y^2-18y+81 = (y-9)^2 = (x^2-9)^2 =$$

$$= \boxed{(x+3)^2(x-3)^2};$$

$x^2-3^2=(x+3)(x-3)$

si no ens n'adonem, podem fer Ruffini amb $x=3$ i $x=-3$ tantes vegades com sigui possible.

$\hookrightarrow$ veure-ho a pàg. 3

- denom: sumant coefs. veiem que $1-6+11-6=0 \Rightarrow x=1$ és arrel:

	1	−6	11	−6
1		1	−5	6
	1	−5	6	0

$\rightarrow x = \dfrac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 6}}{2\cdot 1} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ denom $=(x-1)(x-3)(x-2)$

$$\Rightarrow \boxed{g(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+3)^2(x-3)^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} & x>0 \\ -1 & x\leq 0 \end{cases}}$$

- Domini: denom $= 0$ $\Rightarrow$ $x=1$, $x=2$, $x=3$, tots tres valors que pertanyen a la regió on té vigència la fracció $(x>0)$ en la definició "a trossos" de la funció.

Conseqüentment, $\boxed{D[g] = (-\infty,1) \cup (1,2) \cup (2,3) \cup (3,+\infty)}$

- Continuïtat: en $x<0$ és contínua (doncs és constant);

en $x>0$ ho és excepte en $x = 1, 2$ i 3; en "l'empalme", $x=0$, cal estudiar el valor de la funció i els límits:

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = -1 = g(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x+3)^2(x-3)^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{3^2 \cdot 3^2}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} =$$

$$= -\frac{27}{2} \neq -1 \Rightarrow$$ en $\boxed{x=0}$, $g(x)$ té una discontinuïtat de salt finit.

$\Rightarrow$ $g(x)$ és contínua en tots els punts del seu domini excepte en $x=0$.

- Discontinuïtats (a banda d'x=0, ja tractada):

$x=1$: $\boxed{\lim_{x\to 1^{\mp}} \frac{(x+3)^2\cancel{(x-3)^2}}{(x-1)(x-2)\cancel{(x-3)}} = \frac{4}{0^{\mp}\cdot(-1)} = \frac{4}{0^{\pm}} = \pm\infty}$

$\Longrightarrow \begin{cases} \boxed{\nexists \lim_{x\to 1} g(x)} \\ \text{hi ha una A.V. en } \boxed{x=1} \text{ de tipus } \nearrow \vdots \swarrow, \\ \text{i per tant una discontinuïtat no evitable de salt infinit.} \end{cases}$

$x=2$: $\boxed{\lim_{x\to 2^{\mp}} \frac{(x+3)^2(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \frac{5^2\cdot(-1)}{1\cdot 0^{\mp}} = -\frac{25}{0^{\mp}} = \pm\infty}$

$\Longrightarrow \begin{cases} \boxed{\nexists \lim_{x\to 2} g(x)}; \text{ hi ha A.V. en } \boxed{x=2} \nearrow \vdots \swarrow; \\ \text{i per tant una discont. no evit. de salt infinit.} \end{cases}$

$x=3$: $\boxed{\lim_{x\to 3^{\mp}} \frac{(x+3)^2(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \frac{6^2\cdot 0^{\mp}}{2\cdot 1} = 0}$

$\Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to 3} g(x) = 0}$, $\nexists$ A.V. en $x=3$,

la discontinuïtat és evitable.

- Punts de tall:

$x=0 \to y=-1 \Longrightarrow \boxed{(0,-1) \text{ és p. tall amb eix } Y}$

$y=0 \to$
- $\boxed{x\leq 0}$: $y=-1 \Longrightarrow \nexists$ talls X en $x\leq 0$
- $\boxed{x>0}$: $\frac{(x+3)^2(x-3)^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = 0 \underset{\text{si } x\neq 1,2,3}{\Longrightarrow} (x+3)^2(x-3)^2 = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \left.\begin{cases} x=3 \to \text{prohibit (denom}=0) \\ x=-3 \to \text{no pertany a la regió } \boxed{x>0} \end{cases}\right\} \Longrightarrow \boxed{\nexists \text{ més punts de tall}}$