MATEMÀTIQUES (1r BAT.)

EXERCICIS de FUNCIONS

PEPE RODENAS BORJA (agost 2016)

1 DOMINIS: Troba i expressa adientment el domini de cadascuna de les següents funcions:

1.a) $y = \dfrac{x+5}{2+x-x^2}$

1.b) $y = 5x^7 - x + 4$

1.c) $y = \dfrac{1-x}{x^2-4}$

1.d) $y = \dfrac{x^2}{x}$

1.e) $y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{x}$

1.f) $y = \sqrt{x} + \sqrt{6}$

1.g) $y = \ln \dfrac{x-1}{x^2-9}$

1.h) $y = \dfrac{x+1}{x^2+9}$

1.i) $y = e^{-x}$

1.j) $y = \sqrt{16-x^2}$

2 LÍMITS (I): polinomis i fraccions polinòmiques

2.a) $\lim\limits_{x \to \infty} (x^3 - 2x^2 + 1)$

2.b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 + 1)$

2.c) $\lim\limits_{x \to 0} (x^3 - 2x^2 + 1)$

2.d) $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 - 2x^2 + 1)$

2.e) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-1}{x^2+1}$

2.f) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2-1}{4-x^2}$

2.g) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+2-3x^2}{3x-3-3x^2}$

2.h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+2-3x^2}{3x-3-3x^2}$

2.i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+2-3x^2}{3x-3}$

2.j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+3}{3x-3}$

2.k) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+3}{3x-3}$

2.l) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{3x-3}$

2.m) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3}{3x-3}$

2.n) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{3x-3}$

2.o) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{3}{3x-3}$

2.p) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3}{3x-3}$

2.q) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3}{3x-3}$

2.r) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3}{3x-3}$

2.s) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3}{3x-3}$

2.t) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3}{3x-3}$

2.u) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-2}{(x-2)(x-1)^2}$

2.v) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-2}{(x-2)(x-1)^2}$

2.w) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{(x-2)(x-1)^2}$

2.x) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-2}{(x-2)(x-1)}$

2.y) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-2}{(x-2)(x-1)}$

2.z) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-2}{(x-2)\cdot(x-1)}$

3 LÍMITS (II): altres casos.

OBSERVACIÓ: quan tinguem dificultats en calcular el límit d'una fracció, una tècnica que de vegades funciona és dividir a sobre i a sota entre una potència d'x.

EXEMPLE: $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{\sqrt{4x^2-6}}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty} \text{ INDET.}\right) =$

(dividim entre x a sobre i a sota)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{4-\frac{6}{x^2}}} = \frac{2+\frac{1}{\infty}}{\sqrt{4-\frac{6}{\infty}}} = \frac{2}{\sqrt{4}} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

(prenem límits)

3.a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{7-x^2}$

3.b) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{7+x^2}$

3.c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{7+x^2}$

3.d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{7-x^2}$

3.e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+2}\right)$

3.f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+2}\right)$

3.g) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{2x^2-1} - \sqrt{x^2+2}\right)$ 3.h) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^3-1} - \sqrt{x^2+2}\right)$

3.i) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{5x}$ 3.j) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{5x+3}$

3.k) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x}$ 3.l) $\lim_{x\to 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}}$

3.m) $\lim_{x\to 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{2x}}$ 3.n) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x/3}$

3.o) $\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4}\right)$ 3.p) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{5x^3}{5x^3-7}\right)^{2x}$

$\boxed{4}$ CONTINUÏTAT i ASIMPTOTES.

Troba, de cadascuna de les funcions següents,
i) el domini ii) catalogació de les discontinuïtats
iii) les asímptotes verticals; catalogacis [fes ambdós límits laterals: factoritzant num. i denom., simplificant, veient els signes quan ens acostem al valor per la dreta i l'esquerra].
iv) les asímptotes horitzontals.

4.a) $f(x) = \frac{6-3x}{x^2-x-2}$ 4.b) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^3+5x^2+8x+4}$

4.c) $f(x) = \frac{x^3+4x^2+4x}{x^2+3x+2}$ 4.d) $f(x) = \frac{3x^2+21x+30}{5x^2+35x+60}$

4.e) $f(x) = \frac{2}{x^5-2x^4-3x^3+8x^2-4x}$ 4.f) $f(x) = \frac{x}{x^2}$

MATEMÀTIQUES (1r BAT.)

EXERCICIS de FUNCIONS: «ASIMPTOTES i CONTINUÏTAT»

(exemple resolt)

▶ Funció a analitzar: $f(x) = \dfrac{2x-6}{x^2-4x+3}$

① DOMINI: $\boxed{\text{denominador} = 0} \rightarrow x^2-4x+3=0 \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}} = \begin{cases} (+) \; \dfrac{4+2}{2} = \boxed{3} \\ (-) \; \dfrac{4-2}{2} = \boxed{1} \end{cases} \Longrightarrow$

$$\boxed{D[f] = (-\infty, 1) \cup (1,3) \cup (3, +\infty)} = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$$

② DISCONTINUÏTATS: cal factoritzar núm. i denom. $\boxed{f(x) = \dfrac{2(x-3)}{(x-1)(x-3)}}$

$x=1$: $\boxed{\lim_{x\to1^-} \dfrac{2(x-3)}{(x-1)(x-3)}} = \dfrac{2\cdot\cancel{(1-3)}}{\underbrace{(1^--1)}_{0^-}\cancel{(1-3)}} = \dfrac{2}{0^-} = \boxed{-\infty}$

fem també el límit lateral $x\to1^+$, doncs el necessitarem per a saber com és l'asimptota vertical $\boxed{x=1}$:

$\boxed{\lim_{x\to1^+} \dfrac{2(x-3)}{(x-1)(x-3)}} = \dfrac{2\cdot\cancel{(1-3)}}{\underbrace{(1^+-1)}_{0^+}\cancel{(1-3)}} = \dfrac{2}{0^+} = \boxed{+\infty} \Longrightarrow$ en $x=1$, tenim una discontinuïtat no evitable de salt infinit.

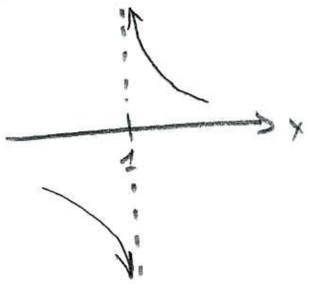
$\underline{x=3}$: en la forma factoritzada $f(x) = \dfrac{2(x-3)}{(x-1)(x-3)}$ simplificarem, per a fer ambdós límits $x \to 3^-$; $x \to 3^+$, els factors $(x-3)$, de manera que tenim

$$\boxed{\lim_{x \to 3^-} \frac{2\cancel{(x-3)}}{(x-1)\cancel{(x-3)}} = \lim_{x \to 3^-} \frac{2}{(x-1)} = \frac{2}{3-1} = \frac{2}{2} = 1}$$

i anàlogament: $\boxed{\lim_{x \to 3^+} f(x) = 1}$, i per tant:

$\boxed{\text{en } x=3, \text{ tenim una discontinuïtat evitable}}$ ■

3.- A.V.: Atès que en $x=1$ els límits laterals són $\ell_- = -\infty$ i $\ell_+ = +\infty$, hi tenim com a asímptota vertical la recta $\boxed{x=1}$ ■, i té aquest aspecte:



4.- A.H.: $$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{2x-6}{x^2-4x+3} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x} = 0}$$

$\Longrightarrow$ la recta $\boxed{y=0}$, o sigui l'eix d'abscisses, és asímptota horitzontal a la dreta (AHd). ■

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{2x-6}{x^2-4x+3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0}$$ $\Longrightarrow$ la recta $\boxed{y=0}$ també és asímptota horitzontal a l'esquerra (AHe) ■