A.- DERIVADES: Regles de derivació de polinomis. Exemples.

1. Derivada de constants

$$\boxed{y = k \quad \longrightarrow \quad y' = 0}$$

(k és una "constant")

Exemples:

$y = 5 \quad \longrightarrow \quad y' = 0$
$y = 7 \quad \longrightarrow \quad y' = 0$
$y = -2 \quad \longrightarrow \quad y' = 0$
$y = 0 \quad \longrightarrow \quad y' = 0$
$y = 1 \quad \longrightarrow \quad y' = 0$

2. Derivada de monomis

$$\boxed{y = ax^n \quad \longrightarrow \quad y' = n \cdot a\, x^{n-1}}$$

$(n \geq 1)$

Exemples:

$y = x^2 \quad \longrightarrow \quad y' = 2x$
$y = x^3 \quad \longrightarrow \quad y' = 3x^2$
$y = x \quad \longrightarrow \quad y' = 1$
$y = 5x^2 \quad \longrightarrow \quad y' = 10x$
$y = -x^7 \quad \longrightarrow \quad y' = -7x^6$

3. Derivada de polinomis (⇔ d'una suma de monomis)

$$\boxed{\begin{array}{l} y = suma\ de\ monomis \\ \qquad\qquad \longrightarrow \quad y' = suma\ de\ les\ derivades\ de\ cada\ monomi \end{array}}$$

Exemples:

$y = x^2 + x^3 \quad \longrightarrow \quad y' = 2x + 3x^2$
$y = x^2 + 3 \quad \longrightarrow \quad y' = 2x$
$y = x - 9 \quad \longrightarrow \quad y' = 1$
$y = 3x^5 - 2x \quad \longrightarrow \quad y' = 15x^4 - 2$
$y = ax^2 + bx + c \quad \longrightarrow \quad y' = 2ax + b$

B.- EXERCICIS i PROBLEMES de DERIVADES

1.- Troba les derivades de cadascun dels següents polinomis:

1.a)	$y = x^9$	**1.b)**	$y = -x^9$	**1.c)**	$y = -x^2$
1.d)	$y = x$	**1.e)**	$y = -x$	**1.f)**	$y = x + 3$
1.g)	$y = x + 1$	**1.h)**	$y = -5x$	**1.i)**	$y = 8x^2$
1.j)	$y = 3x^9 + 2$	**1.k)**	$y = 3x^2 + 5x - 3$	**1.l)**	$y = -x^2 + x + 4$
1.m)	$y = x^2 - 2$	**1.n)**	$y = -7x^2 + 2x - 1$	**1.o)**	$y = -x^5 + x + 8$

2.- Troba el valor de la derivada de les següents funcions polinòmiques en el punt de l'abscissa indicada en cada cas. (El primer apartat està resolt com a exemple).

2.a) $f(x) = -5x^2 + 3x + 10 \quad \rightarrow \qquad f'(x) = -10x + 3$
$f'(4) = -10 \cdot 4 + 3 = -37$

2.b) $f(x) = 3x^2 - 10x + 7 \qquad f'(2) =$

2.c) $f(x) = x^4 + 7x^2 + 13x - 12 \qquad f'(1) =$

2.d) $f(x) = \frac{4}{3}x + 11 \qquad f'(6) =$

2.e) $f(x) = -x \qquad f'(0) =$

2.d) $f(x) = ax^2 + bx + c \qquad f'(x_0) =$

3.- Si $f(x)$ és un polinomi de grau *n*, quin tipus de funció és $f'(x)$?

4.- Si $f(x)$ és creixent en $x = x_0$, quin signe té $f'(x_0)$?

5.- Si $f(x)$ és decreixent en $x = x_0$, quin signe té $f'(x_0)$?

6.- Si $f(x)$ té un extrem relatiu en $x = x_0$, quant val $f'(x_0)$?

7.- Pot ser que $f'(x_0) = 0$ i la funció no tingui un extrem relatiu en $x = x_0$? (Ajuda: Considera la funció dels "Sacamantecas", $y = x^3$, en $x = 0$).

8.- Per a saber si en els punts on $f'(x_0) = 0$ la funció $f(x)$ té un extrem relatiu, estudiem el signe de la derivada una miqueta abans i una miqueta després de x_0 (és a dir, en punts de tipus $x_e < x_0$ i $x_d > x_0$).

Per exemple, la paràbola $g(x) = 3x^2 - 6x + 1 \;\rightarrow\; g'(x) = 6x - 6$, i per tant la seva derivada s'anul·la en $x = 1$. Per a saber si és extrem, i en tal cas si l'extrem és màxim o mínim, podem estudiar el signe de

$g'(x)$ als punts $x_e = 0{,}9$ (una miqueta a l'esquerra) i $x_d = 1{,}1$ (una miqueta a la dreta).

a) Digues els signes de $g'(0{,}9)$ i $g'(1{,}1)$.

b) Abans d'un mínim (a la seva esquerra), la funció creix o decreix? I després (a la dreta)? I abans i després d'un màxim?

c) En conclusió, hi ha un extrem en $x = 1$ en la nostra funció g?

9.- En l'exercici anterior era fàcil saber si $x = 1$ era extrem, i quin tipus d'extrem, doncs les paràboles sempre en tenen un, i només un, i sabem si és mìnim o màxim mirant cap a on apunten les banyes (per exemple, podem fer el límit $x \to \infty$ i si dóna positiu és que apunten cap amunt i l'extrem és mínim, i al contrari).

En general és útil saber reconèixer a quina situació és corresponen cadascuna de les quatre possibilitats per als signes de $f'(x_e)$ i $f'(x_d)$ al voltant d'un x_0 on s'anul·la la derivada. Aquestes possibilitats són (+,+), (+.-), (-,+) i (-,-). Una d'elles vol dir màxim, una altra vol dir mínim, i les altres dues no són extrem, malgrat satisfer $f'(x_0) = 0$ —com passava a la funció $y = x^3$ en $x = 0$, recordem-ho—. Digues quina combinació de signes es correspon amb cada situació.

10.- Basant-te en la resposta que has donat a l'exercici anterior, busca els extrems relatius dels polinomis següents. La manera de procedir és senzilla: **i)** trobem la funció derivada $f'(x)$; **ii)** trobem els punts on la derivada s'anul·la (és a dir, resolem l'equació $f'(x) = 0$); **iii)** mirem els signes de la derivada una mica abans i una mica després de tals punts, i així decidim si són extrems, i quin tipus d'extrem.

Polinomis a estudiar:

a) $y = 3x^2 + 4x - 2$ **b)** $y = x^2 - x - 3$

c) $y = -12x^2 + 6x + 1$ **d)** $y = -3x^3 + 9x + 4$

e) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ **f)** $y = 3x^2 + 3x$

11.- Un cos descriu un moviment 1D, la posició del qual en cada instant t ve descrita per la funció següent: $y(t) = 5x^3 - x + 6$ (unitats S.I.). Sabent que la velocitat és la derivada de la posició respecte del temps, $v(t) = y'(t)$, calcula la velocitat del cos en els instants $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 4$ i $t_4 = 8$ (tots els temps venen expressats en segons).

12.- L'acceleració és la derivada de la velocitat respecte del temps, $a(t) = v'(t)$. Per a trobar l'acceleració a partir de la posició, per tant, hem de derivar dues vegades: la primera ens dóna la velocitat i la segona la posició. Troba les funcions velocitat i acceleració d'un cos que es mou en 1D segons la funció $y(x) = -4x^3 + 2x^2 - x + 4$. Digues el valor de la posició, la velocitat i l'acceleració en els instants $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ i $t_3 = 2$ (tots els temps expressats en segons i les distàncies en metres).

13.- Sigui un producte el preu del qual fluctua segons la funció

$$p(t) = -6t^2 + 10t + 40.$$

estant-hi *p* expressat en euros i *t* en anys. Quan s'assoleix el preu màxim? Quin és aquest preu?

14.- Un estudi conclou que la quantitat mitjana d'euros estafada al mes per un cert patró al seus treballadors depèn aproximadament del nombre d'anys treballats segons la funció:

$$E(t) = 3t^2 - 12t + 15.$$

En quin moment la quantitat d'euros estafats és fa mínima? Quina és aquesta quantitat?

15.- Un àguila es llança des del seu niu i fa un picat, després del qual remunta el vol, tornant a guanyar altura. La següent funció ens diu a quina altura està l'àguila en cada instant durant els primers 12 segons des que es llança del niu:

$$h(t) = t^3 - 10x^2 + 15x + 82.$$

Quant val l'altura mínima assolida durant el picat? I l'altura màxima abans de començar el picat? (<u>Nota</u>: Les altures estan expressades en metres, i els temps en segons).

16.- A partir de l'equació general d'una paràbola,

$$y = ax^2 + bx + c$$

a) dedueix la fórmula que permet calcular la *x* del seu vèrtex, i digues una regla senzilla per a esbrinar si és màxim o mínim.

b) Troba i classifica els vèrtexs de: $f(x) = 15x^2 + 60x - 14$; $g(x) = -x^2 + 16x$ i $h(x) = 1 - x^2$ (troba ambdues coordenades *x* i *y*).

c) fes un raonament per a justificar que els punts que es troben amb la fórmula proposada seran extrems relatius de la funció sempre que es doni que $a \neq 0$.