PROBLEMES de PROBABILITAT CONDICIONADA

1. PROBLEMA de les DUES CIUTATS (*Cas estàndard*)

Siguin dues ciutats, ***A*** i ***B***, i dos partits polítics, ***m*** i ***n***. Fem l'experiment aleatori d'agafar una persona a l'atzar i preguntar-li de quina ciutat és i a quin partit ha votat.

La probabilitat que sigui de la ciutat ***A*** és 1/3, i que sigui de la ***B*** és 2/3. A la ciutat ***A***, la proporció d'habitants que ha votat ***m*** és 1/4, i els que han votat ***n*** són 3/4. A la ciutat ***B***, les proporcions són 1/2 per a ***m*** i 1/2 per a ***n***.

a) Quina és la probabilitat que hagi votat ***m***?
b) Sabem que ha votat ***m***. Quina és la probabilitat que sigui d'***A***?

2. PROBLEMA de les DUES CIUTATS (*Variants suaus de l'enunciat*)

Siguin dues ciutats, ***A*** i ***B***, i dos partits polítics, ***m*** i ***n***. Fem l'experiment aleatori d'agafar una persona a l'atzar i preguntar-li de quina ciutat és i a quin partit ha votat.

A la ciutat ***A***, la proporció d'habitants que ha votat ***m*** és 1/4, i els que han votat ***n*** són 3/4. A la ciutat ***B***, les proporcions són 1/2 per a ***m*** i 1/2 per a ***n***.

a) Quina és la probabilitat que hagi votat ***m***?
b) Sabem que ha votat ***m***. Quina és la probabilitat que sigui d'***A***?
c) Imagina que la probabilitat que la persona sigui d'***A*** és 1/5. Contesta els apartats (a) i (b) en tal supòsit.
d) En comptes d'això, imagina ara que la ciutat ***A*** té 2000 habitants i la ciutat ***B*** en té 5000. Contesta els apartats (a) i (b) en tal supòsit.

3. PROBLEMA de les DUES CIUTATS (*Ampliació*)

Ens plantegem un problema semblant al #1, però ara tenim tres ciutats, ***A***, ***B*** i ***C***, amb probabilitats respectives del 30%, 10% i 60%.

Pel que fa als partits, ara també en tenim tres, ***m***, ***n*** i ***k***, però no tots ells tenen presència a cadascuna de les tres ciutats. Els resultats electorals de cada partit a cada ciutat són:

A :	***m*** (60%) ,	***n*** (40%)	
B :	***m*** (30%) ,	***n*** (30%) ,	***k*** (40%)
C :	***m*** (50%) ,	***k*** (50%)	

a) Quina és la probabilitat que una persona hagi votat ***m***? I ***n***?
b) Sabem que ha votat ***m***. Quina és la probabilitat que sigui d'***A***? I de ***C***?

4. **PROBLEMA de les BOLES i la CAPSA** (*Cas bàsic: amb reposició*)

Sigui una capsa amb 3 boles blanques i 2 de negres. En traiem una a l'atzar, prenem nota del seu color i la tornem a ficar a la capsa. En traiem una segona bola a l'atzar i prenem nota del seu color.

a) Quina és la probabilitat que la segona bola sigui negra?
b) Quina és la probabilitat de treure'n una de cada color?
c) Quina és la probabilitat que la primera bola sigui negra?
d) Sabem que la 2a és blanca. Quina és la probabilitat que la primera hagi sigut també blanca? I negra?

5. **PROBLEMA de les BOLES i la CAPSA** (*Cas sense reposició*)

Sigui una capsa amb 3 boles blanques i 2 de negres. En traiem una a l'atzar i ens la fiquem a la butxaca. En traiem una segona bola a l'atzar i la deixem sobre la taula.

a) Quina és la probabilitat que les dues siguin negres?
b) Quina és la probabilitat de treure'n al menys una blanca?
c) Quina és la probabilitat de treure'n al menys una negra?
d) Quina és la probabilitat de treure'n una de cada color?
e) Quina és la probabilitat que la 1a sigui blanca i la 2a sigui negra?
f) Entra algú al final de l'experiment i veu la segona bola a la taula, que és blanca, però no veu la de la butxaca. Quina és la probabilitat que també sigui blanca? I que sigui negra?

6. **PROBLEMA de les BOLES i la CAPSA** (*Ampliació: cas mixt*)

Sigui una capsa amb 3 boles blanques i 2 de negres. En traiem una a l'atzar, i si es negra, la tornem a ficar a la capsa. Si és blanca, ens la fiquem a la butxaca. En traiem una segona bola a l'atzar i la deixem a la taula.

a) Quina és la probabilitat que la segona bola sigui negra?
b) Quina és la probabilitat de treure'n una de cada color?
c) Quina és la probabilitat que la primera bola sigui negra?
d) Sabem que la 2a és blanca. Quina és la probabilitat que la primera hagi sigut també blanca? I negra?

7. PROBLEMA dels ALUMNES (*Cas bàsic*)

Sigui una classe de 35 alumnes. Escrivim a un paper el nom d'un d'ells, ***m***, i després n'agafem dos a l'atzar.

Quina és la probabilitat que un dels dos que hem agafat sigui el que hem escrit al paper, ***m***?

8. PROBLEMA dels ALUMNES (*Ampliació*)

Sigui una classe de 35 alumnes. Escrivim a un paper el nom de dos d'ells, ***m*** i ***n***, i després n'agafem dos a l'atzar.

Quina és la probabilitat que al menys un dels dos que hem agafat sigui un dels que hem apuntat al paper?

9. PROBLEMA dels CARAMELS (*Ampliació: condicionant compost)*

En una capsa hi tenim 4 caramels de maduixa, 2 de llimona i 3 de menta.

N'agafem un, si és de maduixa ens el mengem i n'hi posem un de llimona, si és de menta també ens el mengem, però no n'hi posem cap més, i si és de llimona ens el mengem i n'hi posem dos de maduixa i un de menta.

Després en traiem un altre caramel.

a) Quina és la probabilitat que el segon caramel sigui de llimona?

b) Quina és la probabilitat que si el segon caramel no és de maduixa, me n'hagi menjat un de menta?

SOLUCIONS dels PROBLEMES de PROBABILITAT CONDICIONADA

1 «PROBLEMA de les DUES CIUTATS» (cas estàndard)

A ($1/3$): m ($1/4$) $\longrightarrow$ $p(A,m) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ ①

A ($1/3$): n ($3/4$) $\longrightarrow$ $p(A,n) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ ②

B ($2/3$): m ($1/2$) $\longrightarrow$ $p(B,m) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ ③

B ($2/3$): n ($1/2$) $\longrightarrow$ $p(B,n) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ ④

↳ comprovació: $\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 1$ ✓

a/ $p(m)$? $\longrightarrow$ branques fav.: ① i ③ $\Longrightarrow$ $\boxed{p(m) = \frac{1}{12}+\frac{1}{3} = \frac{5}{12}}$ //

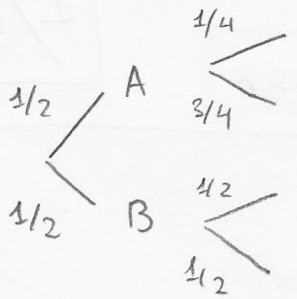
b/ $p(A|m)$?
1.- pos: ① i ③ $\longrightarrow$ $p(\text{pos}) = \frac{1}{12}+\frac{1}{3} = \frac{5}{12}$
2.- fav: ① $\longrightarrow$ $p(\text{fav}) = 1/12$
3.- quocient: $\boxed{p(A|m) = \frac{p(\text{fav})}{p(\text{pos})} = \frac{1/12}{5/12} = \frac{1}{5}}$ //

2 «PROBLEMA DE LES DUES CIUTATS» (variants suaus de l'enunciat)

a & b/ $\longrightarrow$ és com el problema #1, però no ens diuen les probabilitats $p(A)$, $p(B)$. Normalment, en un cas així suposarem "equiprobabilitat", $p(A) = p(B)$, i calculem les probabilitats amb:

$$\boxed{p = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}}} \Longrightarrow \begin{cases} p(A) = \frac{1}{2} \\ p(B) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Fem l'arbre amb això:



$m \rightarrow p(A,m) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ ①

$n \rightarrow p(A,n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ ②

$m \rightarrow p(B,m) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ③

$n \rightarrow p(B,n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ④

1 o.k.

a/ branques fav: ① i ③ $\Rightarrow$ $\boxed{p(m) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}}$ //

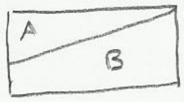
b/ 1.- pos : ① i ③ $\rightarrow$ $p(pos) = 3/8$

2.- fav : ① $\rightarrow$ $p(fav) = 1/8$

3.- quocient : $\boxed{p(A|m) = \frac{p(fav)}{p(pos)} = \frac{1}{3}}$ //

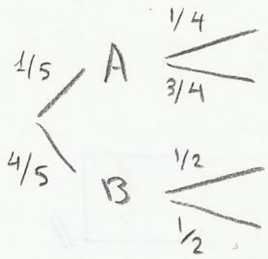
c/ $p(A) = 1/5 \Rightarrow \boxed{p(B) = 1 - \frac{1}{5}} = 4/5$

(... recordem:



)

Tornem a fer l'arbre:



$m \rightarrow p(A,m) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$ ①

$n \rightarrow p(A,n) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$ ②

$m \rightarrow p(B,m) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$ ③

$n \rightarrow p(B,n) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$ ④

1 o.k.

▶ $p(m)$? → fav: ① i ③ $\Rightarrow$ $\boxed{p(m) = \frac{1}{20} + \frac{2}{5} = \frac{9}{20}}$ //

▶ $p(A|m)$? 1.- pos : ① i ③ $\rightarrow$ $p(pos) = 9/20$

2.- fav : ① $\rightarrow$ $p(fav) = 1/20$

3.- quocient : $\boxed{p(A|m) = \frac{p(fav)}{p(pos)} = \frac{1}{9}}$ //

d/ A → 2 000 hab.
B → 5 000 hab. → si només ens donen aquesta informació, per conèixer $p(A)$ i $p(B)$ aplicarem:

$$\boxed{p = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(A) = \dfrac{2000}{2000+5000} = \dfrac{2}{7} \\[2ex] p(B) = \dfrac{5000}{2000+5000} = \dfrac{5}{7} \end{cases} \leftarrow \text{amb això, tornem a fer l'arbre:}$$

$\frac{2}{7}$ A: $\frac{1}{4}$ m → $p(A,m) = \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{14}$ ①

$\frac{2}{7}$ A: $\frac{3}{4}$ n → $p(A,n) = \frac{2}{7}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{14}$ ②

$\frac{5}{7}$ B: $\frac{1}{2}$ m → $p(B,m) = \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{14}$ ③

$\frac{5}{7}$ B: $\frac{1}{2}$ n → $p(B,n) = \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{14}$ ④

1 o.k.

▶ $p(m)$? → fav: ① i ③ $\Rightarrow \boxed{p(m) = \frac{1}{14} + \frac{5}{14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}}$ //

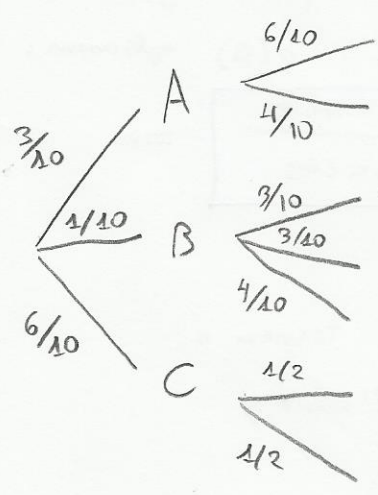
▶ $p(A|m)$?

1.- pos: ① i ③ → $p(pos) = 3/7$

2.- fav: ① → $p(fav) = 1/14$

3.- quocient: $\boxed{p(A|m) = \frac{p(fav)}{p(pos)} = \frac{1/14}{6/14} = \frac{1}{6}}$ //

3 «PROBLEMA de los DUES CIUTATS» (Ampliació)



$m \rightarrow p(A, m) = \frac{3}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{9}{50}$ (1)

$n \rightarrow p(A, n) = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{3}{25}$ (2)

$m \rightarrow p(B, m) = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{100}$ (3)

$n \rightarrow p(B, n) = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{100}$ (4)

$k \rightarrow p(B, k) = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{50}$ (5)

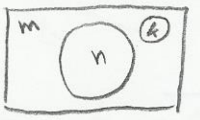
$m \rightarrow p(C, m) = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ (6)

$k \rightarrow p(C, k) = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ (7)

1 o.k.

a/ $p(m)$? → fav: (1), (3) i (6) ⟹ $\boxed{p(m) = \frac{9}{50} + \frac{3}{100} + \frac{3}{10} = \frac{51}{100}}$ //

• $p(n)$? → no són successos "complementaris"



$p(m) + p(n) \neq 1$ ⟹ busquem les branques fav: (2) i (4)

... també pot haver votat k!

$\boxed{p(n) = \frac{3}{25} + \frac{3}{100} = \frac{12+3}{100} = \frac{3}{20}}$ //

b/ $p(A|m)$?

1.- pos: (1), (3) i (6) ⟹ $p(pos) = 51/100$

2.- fav: (1) ⟹ $p(fav) = 9/50$

3.- quocient: $\boxed{p(A|m) = \frac{p(fav)}{p(pos)} = \frac{9/50}{51/100} = \frac{6}{17}}$ //

$p(C|m)$? → compte!! No són successos complementaris: també pot haver votat m i ser de B:

1.- pos: (1), (3) i (6) ⟹ $p(pos) = 51/100$

2.- fav: (6) ⟹ $p(fav) = 3/10$

3.- quocient:

$\boxed{p(C|m) = \frac{p(fav)}{p(pos)} = \frac{3/10}{51/100} = \frac{10}{17}}$ //

4 «PROBLEMA de les BOLES i la CAPSA» (Cas bàsic: amb reposició).

○○○●● , simbòlicament: $\begin{bmatrix} 3\,B \\ 2\,N \end{bmatrix}$

1ª BOLA   2ª BOLA

- $3/5$ B
  - $3/5$ B $\rightarrow$ $p(B, B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$ ①
  - $2/5$ N $\rightarrow$ $p(B, N) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$ ②
- $2/5$ N
  - $3/5$ B $\rightarrow$ $p(N, B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$ ③
  - $2/5$ N $\rightarrow$ $p(N, N) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$ ④

$\overline{\;1\;}$ o.k.

a/ fav: ② ; ④ $\Rightarrow$

$$\boxed{p(2^a N) = \frac{6}{25} + \frac{4}{25} = \frac{2}{5}} \;//$$

b/ fav: ② ; ③ $\Rightarrow$ $\boxed{p\left(\text{una de cada color}\right) = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}} \;//$

c/ Només cal mirar la 1a part de l'arbre: $\boxed{p(1^a N) = 2/5}$ //

d/ $p(1^a B \mid 2^a B)$?

1.- pos: ① ; ③ $\Rightarrow$ $p(\text{pos}) = \frac{9}{25} + \frac{6}{25} = \frac{3}{5}$

2.- fav: ① $\Rightarrow$ $p(\text{fav}) = 9/25$

3.- quocient: $\boxed{p(1^a B \mid 2^a B) = \frac{p(\text{fav})}{p(\text{pos})} = \frac{9/25}{3/5} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}}$ //

$p(1^a N \mid 2^a B)$? $\rightarrow$ és el succés complementari de l'anterior, per tant no cal fer els càlculs amb l'arbre:

$$\boxed{p(1^a N \mid 2^a B) = 1 - p(1^a B \mid 2^a B) = 1 - \frac{3}{5} = 2/5} \;//$$

$\boxed{5}$ « PROBLEMA de les BOLES i la CAPSA » (Cas sense reposició)

Utilitzarem la representació $\begin{bmatrix} 3B \\ 2N \end{bmatrix}$ per portar el control del nombre de boles de cada color que ens en queden a la capsa immediatament abans i després de la primera extracció. (Les que en queden després de la 2a no ens interessen).

1a extracció — 2a extracció

$$\begin{bmatrix} 3B \\ 2N \end{bmatrix} \xrightarrow{3/5} B \begin{bmatrix} 2B \\ 2N \end{bmatrix} \begin{cases} \xrightarrow{1/2} B \to p(B,B) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{10} & (1) \\ \xrightarrow{1/2} N \to p(B,N) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{10} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3B \\ 2N \end{bmatrix} \xrightarrow{2/5} N \begin{bmatrix} 3B \\ 1N \end{bmatrix} \begin{cases} \xrightarrow{3/4} B \to p(N,B) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{10} & (3) \\ \xrightarrow{1/4} N \to p(N,N) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{10} & (4) \end{cases}$$

1 o.k.

(Nota: donada una configuració d'x boles blanques a la capsa i y de negres, $\begin{bmatrix} xB \\ yN \end{bmatrix}$, les probabilitats les calculem amb la fórmula de $\boxed{p = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}}}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} p(B) = \frac{x}{x+y} \\ p(N) = \frac{y}{x+y} \end{cases}$$)

a/ (4) $\to$ $\boxed{p(N,N) = 1/10}$ //

b/ (1), (2) i (3) $\to$ $\boxed{p\left(\begin{smallmatrix}\text{al menys}\\ \text{una B}\end{smallmatrix}\right) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}}$ //

Una altra manera: és el complementari de l'anterior, i per tant $p = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$ o.k. //

c/ (2), (3) i (4) $\to$ $\boxed{p\left(\begin{smallmatrix}\text{al menys}\\ \text{una N}\end{smallmatrix}\right) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}}$ // $= 1 - p(B,B) = 1 - 3/10$ //

Una altra manera (són complementaris).

d/ (2) i (3) $\to$ $\boxed{p\left(\begin{smallmatrix}\text{una de}\\ \text{cada color}\end{smallmatrix}\right) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}}$ //

e/ (2) $\to$ $\boxed{p(B,N) = \frac{3}{10}}$ //

f/ $p(1^r B \mid 2^n B)$?

1.- pos: ① i ③ $\Rightarrow p(\text{pos}) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$

2.- fav: ① $\Rightarrow p(\text{fav}) = 3/10$

3.- quocient: $\boxed{p(1^r B / 2^n B) = \frac{p(\text{fav})}{p(\text{pos})} = \frac{3/10}{3/5} = \frac{1}{2}}$ //

$p(1^r N \mid 2^n B)$? $\longrightarrow$ és el succés complementari de l'anterior.

Per tant, $\boxed{p(1^r N \mid 2^n B) = 1 - p(1^r B \mid 2^n B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}}$ //

6 «PROBLEMA de les BOLES i la CAPSA» (Ampliació: cas mixt)

Les preguntes són les mateixes que probl. #4, només canviaran els números de l'arbre. Tornem a utilitzar la representació $\begin{bmatrix} 3B \\ 2N \end{bmatrix}$ per no perdre'ns.

1a extracció		2a extracció			
$\begin{bmatrix} 3B \\ 2N \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{3/5}$ B $\begin{bmatrix} 2B \\ 2N \end{bmatrix}$	$\xrightarrow{1/2}$	B	$\to$	$p(B,B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$	①
	$\xrightarrow{1/2}$	N	$\to$	$p(B,N) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$	②
$\xrightarrow{2/5}$ N $\begin{bmatrix} 3B \\ 2N \end{bmatrix}$	$\xrightarrow{3/5}$	B	$\to$	$p(N,B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$	③
	$\xrightarrow{2/5}$	N	$\to$	$p(N,N) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$	④
				1 O.K.	

a/ fav: ② i ④ $\Rightarrow \boxed{p(2^n N) = \frac{3}{10} + \frac{4}{25} = \frac{15}{50} + \frac{8}{50} = \frac{23}{50}}$ //

b/ fav: ② i ③ $\Rightarrow \boxed{p(1 \text{ de cada}) = \frac{3}{10} + \frac{6}{25} = \frac{15+12}{50} = \frac{27}{50}}$ //

c/ FÀCIL!! $\to$ igual que problema #4, $\boxed{p(1^r N) = 2/5}$ //

d/ $p(1^r B \mid 2^n B)$?

1.- pos: ① i ③ $\Rightarrow p(\text{pos}) = \frac{3}{10} + \frac{6}{25} = \frac{27}{50}$

2.- fav: ① $\Rightarrow p(\text{fav}) = 3/10$

3.- quocient: $\boxed{p(1^r B \mid 2^n B) = \frac{3/10}{27/50} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}}$ //

$\boxed{p(2^n B \mid 2^n B) = 1 - p(1^r B \mid 2^n B) = 1 - \frac{5}{9} = 4/9}$ (són complementaris) //

7 « PROBLEMA dels ALUMNES » (Cas bàsic)

POT SORGIR EL DUBTE de si és important saber si els alumnes s'agafen els dos alhora o primer un i després l'altre. En el problema de les boles i la capsa, per exemple, està clar quina és la 1a bola i quina la 2a bola, i sembla important. En aquest problema, però, és indiferent pensar que els agafem primer un i després l'altre o els dos alhora. Nosaltres el resoldrem suposant que els agafem els dos alhora, i ordenarem la informació usant el truc de "alumne que hem agafat amb l'esquerra" i "alumne que hem agafat amb la dreta", però es pot veure que si es construeix l'arbre pensant en "1r alumne que hem agafat" i "2n alumne que hem agafat" els números són exactament els mateixos.

mà esquerra — mà dreta

$1/35$ SÍ $\xrightarrow{1}$ NO $\longrightarrow$ $p(S,N) = \frac{1}{35}$ ①

$34/35$ NO, $1/34$ SÍ $\longrightarrow$ $p(N,S) = \frac{34}{35}\cdot\frac{1}{34} = \frac{1}{35}$ ②

$34/35$ NO, $33/34$ NO $\longrightarrow$ $p(N,N) = \frac{34}{35}\cdot\frac{33}{34} = \frac{33}{35}$ ③

$\overline{1}$ o.k.

(branques finals favorables: ① i ②)

$$\boxed{p\left(\begin{matrix}\text{un dels dos}\\ \text{sigui m}\end{matrix}\right) = p(S,N) + p(N,S) = \frac{1}{35} + \frac{1}{35} = \frac{2}{35}}$$ //

8 « PROBLEMA dels ALUMNES » (Ampliació)

- Torna a ser indiferent si els agafem alhora o no.
- Farem, de bell nou, el truc de "mà esq." i "mà dreta" per dibuixar l'arbre.
- Notació: $\begin{cases} \text{O} \rightarrow \text{és un dels alumnes del paper.} \\ \text{X} \rightarrow \text{no és un dels alumnes del paper.}\end{cases}$

[29-V-2017] SOLS. PROBLEMES PROBAB. COND. 5/5

mà esq. — mà dr.

$\frac{2}{35}$ O:

- $\frac{1}{34}$ O $\rightarrow p(O,O) = \frac{2}{35}\cdot\frac{1}{34} = \frac{1}{35\cdot 17}$ (1)
- $\frac{33}{34}$ X $\rightarrow p(O,X) = \frac{2}{35}\cdot\frac{33}{34} = \frac{33}{35\cdot 17}$ (2)

$\frac{33}{35}$ X:

- $\frac{2}{34}$ O $\rightarrow p(X,O) = \frac{33}{35}\cdot\frac{2}{34} = \frac{33}{35\cdot 17}$ (3)
- $\frac{32}{34}$ X $\rightarrow p(X,X) = \frac{33}{35}\cdot\frac{32}{34} = \frac{33\cdot 16}{35\cdot 17}$ (4)

1 o.k.

Volem que al menys un dels dos que hem agafat tingui el nom al paper. Les branques (2) i (3) ens volen, perquè es corresponen amb què només un dels dos és del paper. La branca (1) també, perquè els dos ho són. La (4) no ens vol.

▶ Per tant, fav: (1), (2) i (3) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{p\left(\text{al menys un}\right) = \frac{1}{35\cdot 17} + \frac{33}{35\cdot 17} + \frac{33}{35\cdot 17} = \frac{67}{35\cdot 17}}$$

▶ Manera alternativa (més ràpida):

"al menys un" és el succés complementari de "no cap", (X,X), que es correspon amb la branca (4).

Per tant,

$$\boxed{p\left(\text{al menys un}\right)} = 1 - p(X,X) = 1 - \frac{33\cdot 16}{35\cdot 17} =$$

$$= \frac{35\cdot 17 - 33\cdot 16}{35\cdot 17} = \boxed{\frac{67}{35\cdot 17}}$$

9 «PROBLEMA dels CARAMELS» (Ampliació: condicionant compost)

Tornem a utilitzar la representació de "les matrius" $\rightarrow \begin{bmatrix} 4\ ma \\ 2\ ll \\ 3\ me \end{bmatrix}$ per portar el control dels caramels que hi ha a la capsa immediatament <u>abans</u> i <u>després</u> de la primera extracció.

(**Nota**: per a una config $\begin{bmatrix} x & ma \\ y & ll \\ z & me \end{bmatrix}$, calculem les probs. amb casos fav / casos pos; p. ex: $p(ma) = \frac{x}{x+y+z}$, etc.)

(com hem fet el probl. #5)

$\begin{bmatrix} 4\ ma \\ 2\ ll \\ 3\ me \end{bmatrix}$ TOTAL = 9

- $4/9$ ma $\begin{bmatrix} 3\ ma \\ 3\ ll \\ 3\ me \end{bmatrix}$ TOT = 9
  - $1/3$ ma $\rightarrow p(ma, ma) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$ ①
  - $1/3$ ll $\rightarrow p(ma, ll) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$ ②
  - $1/3$ me $\rightarrow p(ma, me) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$ ③
- $2/9$ ll $\begin{bmatrix} 6\ ma \\ 1\ ll \\ 4\ me \end{bmatrix}$ TOT = 11
  - $6/11$ ma $\rightarrow p(ll, ma) = \frac{2}{9} \cdot \frac{6}{11} = \frac{4}{33}$ ④
  - $1/11$ ll $\rightarrow p(ll, ll) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{11} = \frac{2}{99}$ ⑤
  - $4/11$ me $\rightarrow p(ll, me) = \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{11} = \frac{8}{99}$ ⑥
- $3/9$ me $\begin{bmatrix} 4\ ma \\ 2\ ll \\ 2\ me \end{bmatrix}$ Tot = 8
  - $1/2$ ma $\rightarrow p(me, ma) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ ⑦
  - $1/4$ ll $\rightarrow p(me, ll) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ ⑧
  - $1/4$ me $\rightarrow p(me, me) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ ⑨

$\overline{1}$ O.K.

(!) ÉS MOLT ÚTIL escriure sota cada matriu el total de caramels, per no equivocar-nos.

a/ fav: ②, ⑤ i ⑧ $\Rightarrow$ $\boxed{p(2^{on}\ ll) = \frac{4}{27} + \frac{2}{99} + \frac{1}{12} \cong 0{,}252}$ //

b/ (notació: "no maduixa")

$p(1r\ me \mid 2n\ \overline{ma})$?

1.- pos: el condicionant compost "el 2n caramel no és de maduixa" se satisfà a les branques ②, ③, ⑤, ⑥, ⑧ i ⑨ $\Rightarrow$

$$\boxed{p(pos) = \frac{4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{2}{99} + \frac{8}{99} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \cong 0{,}564}$$

2.- fav: d'aquestes sis branques possibles, només a les ⑧ i ⑨ el primer caramel serà de menta $\Rightarrow$ $\boxed{p(fav) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}}$

3.- quocient: $\boxed{p(1r\ me \mid 2n\ \overline{ma}) = \frac{p(fav)}{p(pos)} \cong \frac{1/6}{0{,}564} \cong 0{,}296}$ //