[28-V-2013; dm]

IONA - PROBABILITAT

W: (∄ xi, xii) Xiii

UNA VISIÓ GEOMÈTRICA de les PROBABILITATS CONDICIONADES

a partir del problema "de les dues ciutats".

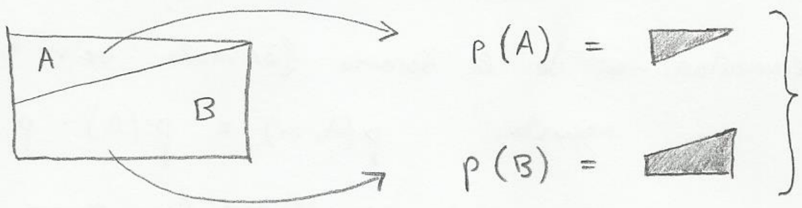
⊛ Ciutats A, B; partits m, n.

Experiment: triem persona a l'atzar i prenem nota de la seva ciutat i el partit a qui ha votat.

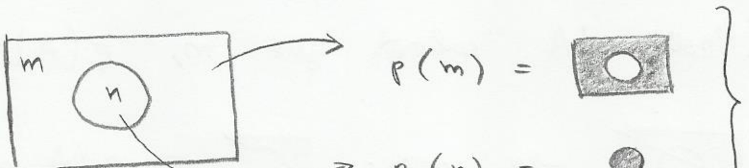
⊛ Anem a representar la probabilitat total de cada succés com l'àrea d'una figura plana:

- SUCCESSOS "NO ELEMENTALS"

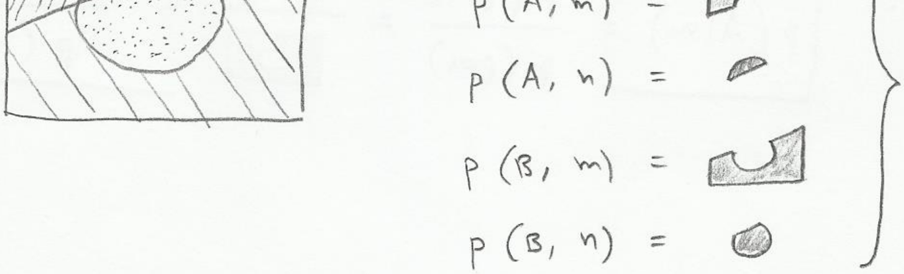
  - ser d'una ciutat determinada (independentment del partit)



  - haver votat a un partit concret (independentment de la ciutat)



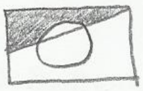
- SUCCESSOS "ELEMENTALS": ser d'una ciutat determinada i haver votat a un partit concret.

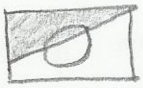


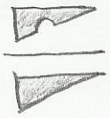
⊛ MÈTODE PER CALCULAR PROBABILITATS CONDICIONADES

1.- localitzar quina regió representa els resultats favorables.
2.- localitzar quina regió representa els resultats possibles.
3.- fer el quocient de les àrees

exemple 1: « Prob. d'm sabent que A, $p(m|A)$ »

(1) resultats favorables :  → àrea:  $= p(A, m)$

(2) resultats possibles :  → àrea:  $= p(A)$

(3) fem el quocient : $\boxed{p(m|A) = \frac{p(fav)}{p(pos)}}$ =  $= \boxed{\frac{p(A,m)}{p(A)}}$

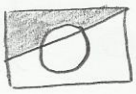
• comentari → de la darrera fòrmula se'n deriva

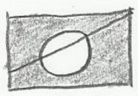
aquesta: $p(A, m) = p(A) \cdot p(m|A)$

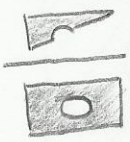
... que és el que fem quan construïm l'arbre.

exemple 2: Cas invers de l'anterior:

« Prob. d'A sabent que m, $p(A|m)$ »

(1) fav :  → àrea :  $= p(A, m)$

(2) pos :  → àrea :  $= p(m)$

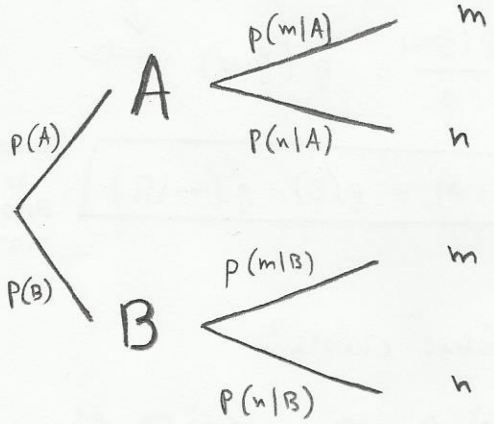
(3) quocient : $\boxed{p(A|m) = \frac{p(fav)}{p(pos)}}$ =  $= \boxed{\frac{p(A,m)}{p(m)}}$

«MÈTODE de l'ARBRE» per a problemes de probabilitat condicionada.

⊛ TIPUS de PROBLEMA:

- successos A, B incompatibles i tals que $p(A) + p(B) = 1$.
- successos m, n incompatibles i tals que $p(m) + p(n) = 1$.
- coneixem les dades → probs. totals: $p(A)$, $p(B)$.
  → probs. condicionades: $p(m|A)$, $p(n|A)$, $p(m|B)$, $p(n|B)$.

⊛ CONSTRUCCIÓ de l'ARBRE: dibuixem el següent arbre i calculem les prob. de les branques finals.



$m \to \boxed{p(A, m) = p(A) \cdot p(m|A)}$ ①

$n \to \boxed{p(A, n) = p(A) \cdot p(n|A)}$ ②

$m \to \boxed{p(B, m) = p(B) \cdot p(m|B)}$ ③

$n \to \boxed{p(B, n) = p(B) \cdot p(n|B)}$ ④

⊛ MÈTODE GENERAL de RESOLUCIÓ: d'acord amb allò que l'enunciat demana...

1.- Seleccionem les branques finals possibles i sumem les seues probabilitats → $\boxed{p(pos)}$

2.- Seleccionem les branques finals favorables i sumem les seues probabilitats → $\boxed{p(fav)}$

3.- Fem el seu quocient → $\boxed{P = \dfrac{p(fav)}{p(pos)}}$

(Nota: evidentment, si totes les branques finals són possibles donarà $p(pos) = 1$. Per això, en la pràctica, si no ens demanen una probab. condic. podrem aplicar directament el segon pas.)

exemple 1: Siga el problema "de les dues ciutats".

Quina ès la probabilitat que algú triat a l'atzar haja votat m ?

SOLUCIÓ:

1.- branques finals possibles:

$$\left\langle \begin{array}{l} A < \begin{array}{l} m \quad ① \\ n \quad ② \end{array} \\ B < \begin{array}{l} m \quad ③ \\ n \quad ④ \end{array} \end{array} \right\} \text{ TOTES !!}$$

... no hi ha cap condicionant a l'enunciat

$$\boxed{p(pos) = 1}$$

2.- branques finals favorables: la ① i la ③

$$\Rightarrow \boxed{p(fav)} = p(A,m) + p(B,m) =$$

$$= \boxed{p(A)\cdot p(m|A) + p(B)\cdot p(m|B)}$$

3.- quocient: com que $p(pos) = 1$, aleshores

$$p(m) = \frac{p(fav)}{p(pos)} = \frac{p(fav)}{1} = p(fav) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p(m) = p(A)\cdot p(m|A) + p(B)\cdot p(m|B)}$$ (TEOREMA de la PROBAB. TOTAL)

(*)

exemple 2: Siga el problema "de les dues ciutats". Triem algú a l'atzar i sabem que ha votat a m. Quina ès la probabilitat que siga de la ciutat A ?

SOLUCIÓ:

1.- branques finals possibles: la ① i la ③

$$\Rightarrow \boxed{p(pos) = p(m)}$$ ja la coneixem per [*] !!

2.- branques finals favorables: la ① només

$$\Rightarrow \boxed{p(fav)} = p(A,m) = \boxed{p(A)\cdot p(m|A)}$$

3.- quocient: usem [*]

$$\boxed{p(A|m)} = \frac{p(fav)}{p(pos)} = \boxed{\frac{p(A)\cdot p(m|A)}{p(A)\cdot p(m|A) + p(B)\cdot p(m|B)}}$$ (TEOREMA de BAYES)