▶ "INTEGRALS INDEFINIDES (1)" Immediates (p.2.r).

Nomenclatura full:
/a ja fet
xa corregit
*a saltat

2.1) $\int 3x^2\,dx = x^3 + K$

2.2) $\int x^4\,dx = \frac{1}{5}x^5 + K$

2.3) $\int dx = \left(\int 1\,dx = \int x^0\,dx = \frac{1}{1}x^1 + K\right) = x + K$

2.4) $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = -\frac{1}{x} + K$

2.5) $\int \frac{3}{x^3}\,dx = -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2} + K$

2.6) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + K$

(!) barres valor absolut (!)

2.7) $\int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + K$

La diferencial ens diu sobre quina variable estem integrant.

2.8) $\int \frac{x^4}{5}\,dx = \frac{1}{25}x^5 + K$

2.9) $\int \sqrt{z}\,dz = \int z^{1/2}\,dz = \frac{2}{3}z^{3/2} + K = \frac{2}{3}\sqrt{z^3} + K$

2.10) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-1/2}\,dx = 2x^{1/2} + K = 2\sqrt{x} + K$

2.11) $\int \sqrt[3]{p^2}\,dp = \int p^{\frac{2}{3}}\,dp = \frac{3}{5}p^{5/3} + K \left(= \frac{3}{5}\sqrt[3]{p^5} + K\right)$

2.12) $\int x\sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{1+\frac{1}{3}}\,dx = \int x^{4/3}\,dx = \frac{3}{7}x^{7/3} + K$

2.13) $\int \frac{x^5}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{5-\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{9/2}\,dx = \frac{2}{11}x^{11/2} + K$

2.14) $\int (x+2)\,dx = \int x\,dx + \int 2\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + K$

(!) Fixa-te d'això, abans de seguir. $\int\Sigma = \Sigma\int$

ELS "EXTRA":

2.14 bis) Els proposo un a un, i l'estratègia és donar 1 minut de rellotge per cadascun, un passeig fins al fons, i després fer-los interactivament.

- Al final, comentar l'aplicació al MRUA ?

~~la fórmula general~~ :

[*] integrem dues vegades:

$v(x) = \int a \cdot dx \quad + \text{ctt}: K$

$r(x) = \int v(x) \cdot dx \quad + \text{ctt}: C$

dir que a és accel. d'un mòbil 1-D., ctt, i interpretar $v(x)$, $r(x)$, les ctts K i C, i fico exemples: moviment en camp grav. 1-d.

a) $$\int \left(5x^2 + \frac{1}{3}x\right) dx = 5\int x^2 dx + \frac{1}{3}\int x\, dx = \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + K$$

b) $$\int \left(\frac{6}{x} + \sqrt{x}\right) dx = 6\int \frac{1}{x} dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx = 6 \cdot \ln|x| + \frac{2}{3}x^{3/2} + K = 6 \cdot \ln|x| + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + K$$

c) $$\int (ax^2 + bx + c)\, dx = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + c \cdot x + K$$

d) → exemple M.R.U.A. (*)

EXERCICIS INTEGRALS

("INTS. INDEF (1)" Immediates)
(p. 2.R)

FALTA

2.15)

$$\int \frac{t^3 - 2t^2}{5t}\,dt = \frac{1}{5}\cdot\left[\int \frac{t^3}{t}\,dt - 2\int \frac{t^2}{t}\,dt\right] =$$

← NOTA: com que el denominador és de grau 1 i no té terme indep., no cal complicar-se amb divisió polinomis i es pot fer "a les braves".

$$= \frac{1}{5}\cdot\left[\int t^2\,dt - 2\int t\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 + k'\right] = \frac{1}{15}t^3 - \frac{1}{5}t^2 + k$$

(subtilesa de tipus notacional: $k' \neq k$, encara que les dues siguen cts., perquè $k = \frac{1}{5}\cdot k'$)

FALTA

2.16)

$$\int \frac{3t^2 + 1}{t}\,dt = \int 3t\,dt + \int \frac{1}{t}\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}t^2 + \ln|t| + k$$

2.17)

$$\int 7x^2\,dx = \frac{7}{3}x^3 + k$$

PRINCIPI de les TRIGONOMÈTRIQUES.

FALTA

2.18)

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + k$$

2.19)

$$\int 3\cos x\,dx = 3\operatorname{sen} x + k$$

2.20)

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{6}\,dx = -\frac{1}{6}\cos x + k$$

2.21) $\int \frac{-2}{\cos^2 x}\,dx = -2 \cdot tg\,x + K$

FALTA 2.22) $\int \frac{2+x^3}{x^2}\,dx = \int (2x^{-2} + x)\,dx =$

$= -2\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + K$

$\boxed{\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + K}$

hi ha la regla 11, xò com que jo no me'n recordo mai, ho faig així.

(*) 2.23) $\int 4^x\,dx = \int (e^{\ln 4})^x\,dx =$

$= \int e^{x\ln 4}\,dx = \frac{1}{\ln 4} e^{x\ln 4} + K =$

$= \frac{1}{\ln 4} 4^x + K$

últim fet (I) [dm, 13-3-13]

2.24) $\int 3 \cdot 6^x\,dx = 3\frac{1}{\ln 6} 6^x + K$

2.25) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + K$

2.26) $\int px\,dx = p\frac{1}{2}x^2 + K$

2.27) $\int px\,dp = x\frac{1}{2}p^2 + K$

2.28) $\int z^2 x\,dx = z^2\frac{1}{2}x^2 + K$

2.29) $\int z^2 x\,dz = \frac{1}{3}z^3 x + K$

EXERCICIS INTEGRALS ^{xW}

("INTS. INDEF (1)" Immediates)
p.2.2

2.30) $\int \cos t \, dx = \cos(t) \cdot x + K$

2.31) $\int e^x \, dt = e^x \cdot t + K$

2.32) $\int \frac{x}{t} \, dx = \frac{1}{2t} x^2 + K$

2.33) $\int \frac{x}{t} \, dt = x \cdot \ln|t| + K$

2.34) $\int a x^k \, dx = \begin{cases} \frac{a}{k+1} x^{k+1} + C & \text{si } k \neq -1 \\ a \ln|x| + C & \text{altrament} \end{cases}$

2.35) $\int b \cdot (b-x) \, dx = b \cdot \left(bx - \frac{1}{2}x^2\right) + K$

2.36) $\int a x^{k+2} \, dx = \begin{cases} \frac{a}{k+3} x^{k+3} + C & \text{si } k \neq -3 \\ a \ln|x| + C & \text{altrament} \end{cases}$

2.37) $\int \frac{a}{x^k} \, dx = \int a x^{-k} \, dx =$

(en integrar, els exponents "baixen una unitat" si són en el denom.)

$= \begin{cases} = \frac{a}{1-k} x^{1-k} + K \equiv -\frac{a}{k-1} \frac{1}{x^{k-1}} + K & (\text{si } k = 1) \\ = a \cdot \ln|x| + K & (\text{altrament}) \end{cases}$

2.38) $\int \frac{1}{x+2}\,dx = \ln|x+2| + K$

2.39) $\int \frac{1}{x-3}\,dx = \ln|x-3| + K$

2.40) $\int \cos(x+2)\,dx = \operatorname{sen}(x+2) + K$

2.41) $\int \operatorname{sen}(x-4)\,dx = -\cos(x-4) + K$

2.42) $\int e^{x-6}\,dx = e^{x-6} + K$

2.43) $\int (x-4)^3\,dx = \frac{1}{4}(x-4)^4 + K$

2.44) $\int (x+4)^2\,dx = \frac{1}{3}(x+4)^3 + K$

2.45) $\int 5^{x+3}\,dx = \frac{1}{\ln 5}5^{x+3} + K$

2.46) $\int \left(7x^3 + 5x^2 - 3x + \frac{5}{7}\right)dx =$

$= \frac{7}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{7}x + K$

2.47) $\int (x^2-3)^2\,dx = \int \left[(x^2)^2 + 3^2 - 2\cdot 3\cdot x^2\right]dx =$

$= \frac{1}{5}x^5 + 9x - \frac{6}{3}x^3 + K = \frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + 9x + K$ //

2.48) $\int x\cdot(x+1)^2\,dx = \int x(x^2+1+2x)\,dx =$

$= \int (x^3 + x + 2x^2)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + K$ //

2.49) $\int \left(x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x| - \frac{1}{x} + K$ //

2.50) $\int \frac{6x^2}{5}\,dx = \frac{2}{5}x^3 + K$ //

("INTS INDEF (1)" Immediates)

p. 2.12

2.51)
$$\int \frac{(x^2-5x)^2}{7}\,dx = \frac{1}{7}\int (x^4 + 25x^2 - 10x^3)\,dx =$$
$$= \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{25}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^4\right) + K$$

2.52)
$$\int \frac{3x^3 - 5x + 6}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \left(3x^2 - 5 + \frac{6}{x}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(x^3 - 5x + 6\ln|x|\right) + K$$

2.53)
$$\int \frac{1-x}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(x^{-1/2} - x^{1/2}\right)dx =$$
$$= 2x^{1/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} + K$$

2.54)
$$\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \cos x\right)dx =$$
$$= \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x + K$$

2.55)
$$\int \frac{10}{1+x^2}\,dx = 10\cdot \operatorname{arctg} x + K$$

2.56)
$$\int \frac{8}{\sqrt{-x^2+1}}\,dx = 8 \operatorname{arc\,sen} x + K$$

2.57)
$$\int \frac{10}{1+(x-4)^2}\,dx = 10\cdot\operatorname{arctg}(x-4) + K$$

2.58) $\int \frac{10}{1+(x+1)^2}\,dx = 10 \cdot \operatorname{arctg}(x+1) + K$

2.59) $\int \frac{3}{\sqrt{1-(x-6)^2}} = 3 \cdot \operatorname{arcsen}(x-6) + K$

2.60) $\int \frac{3}{\sqrt{1-(x+3)^2}}\,dx = 3 \operatorname{arcsen}(x+3) + K$

2.61) $\int k\sqrt{x+k}\,dx = \int k\,(x+k)^{\frac{1}{2}}\,dx =$

$= \frac{2}{3} k\,(x+k)^{3/2} + K$

2.62) $\int \frac{e^{x-p}}{p}\,dx = \frac{e^{x-p}}{p} + K$

2.63) $\int a\sqrt[3]{x+b}\,dx = a\int (x+b)^{\frac{1}{3}}\,dx = a\,\frac{3}{4}\,(x+b)^{\frac{4}{3}} + K$

2.64) $\int \frac{kx+p}{a}\,dx = \frac{1}{a}\int (kx+p)\,dx = \frac{1}{a}\left(\frac{k}{2}x^2 + px\right) + K$

2.65) $\int \frac{p}{x-k}\,dx = p \cdot \ln|x-k| + K$

2.66) $\int \frac{2}{\operatorname{sen}^2(x+k)}\,dx = -2\operatorname{cotg}(x+k) + K$

WSWDY'13

EXERCICIS INTEGRALS ^{xw}

(Els 20 primers "amb solució") (p.1.a)

---

1. 1) $\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 + K$

1. 2) $\int (x + \sqrt{x})\, dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + K$

1. 3) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx = \int \left(3\, x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\, x^{3/2} \right) dx =$

$= 6 \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}\,\frac{1}{4} \cdot x^{5/2} + K = 6\sqrt{x} - \frac{1}{10}\sqrt{x^5} + K$

1\. 4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx = \int x^{3/2} dx = \frac{2}{5} x^{5/2} + K$

1\. 5) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right) dx = \int \left(x^{-2} + 4\, x^{-\frac{3}{2}} + 2 \right) dx =$

$= -x^{-1} + -8\, x^{-\frac{1}{2}} + 2x + K =$

$= -\frac{1}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + 2x + K$

1\. 6) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{4}} dx = \frac{4}{3} x^{+3/4} + K$

1\. 7) $\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} + K$

1\. 8) $\int \cos 5x\, dx = \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5x + K$

1\. 9) $\int \operatorname{sen} ax\, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + K$

1\. 10) $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{"}\frac{d(\ln x)}{dx}} \cdot \ln x \right) dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + K$

(NOTA: $x>0$)

1.11) $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 3x}\,dx = -\frac{1}{3}\operatorname{cotg} 3x + k$

1.12) $\int \frac{1}{\cos^2 7x}\,dx = \frac{1}{7}\operatorname{tg} 7x + k$

1.13) $\int \frac{1}{3x-7}\,dx = \frac{1}{3}\cdot \ln|3x-7| + k$

1.14) $\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln|1-x| + k$

1.15) $\int \frac{1}{5-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|5-2x| + k$

1.16) $\int \operatorname{tg} 2x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}\,dx =$

$$= -\frac{1}{2}\int 2\,\frac{(-\operatorname{sen} 2x)}{\cos 2x}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + k$$

$$\left\{\begin{array}{l} (\ln t)' = 1/t \\ (\cos t)' = -\operatorname{sen} t \\ (2t)' = 2 \end{array}\right\}$$

1.17) $\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + k$

1.18) $\int \cos^3 x \cdot \operatorname{sen} x\,dx = -\frac{1}{4}\cos^4 x + k$

1.19) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,dx =$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}(x^2+1)^{3/2} + k = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + k$$

1.20) $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}\,dx = \frac{1}{4}\int 2\cdot 2x\,(2x^2+3)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$

$$= \frac{1}{4}\,2\,(2x^2+3)^{\frac{1}{2}} + k = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3} + k$$

EXERCICIS INTEGRALS ^{XW}

(Ex's § "INTEGRALS INDEF. (2) - QUASIIMMEDIATES")
[p.3]

3.1) $\int 2\,\text{sen}(2x)\,dx = -\cos 2x + K$

3.2) $\int \text{sen}(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + K$

3.3) $\int \text{sen}(6x-7)\,dx = -\frac{1}{6}\cos(6x-7) + K$

3.4) $\int x\cdot \text{sen}(7-3x^2)\,dx = \frac{1}{6}\cos(7-3x^2) + K$

[a] 3.5) $\int e^x\cdot \text{sen}(e^x+2)\,dx = -\cos(e^x+2) + K$

3.6) $\int x\cdot \underbrace{e^{x^2}}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + K$ //

$\left(= e^{(x^2)}\right.$, no: $\left.(e^x)^2 = e^{2x}\right)$

3.7) $\int e^{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x+1} + K$

3.8) $\int 2^{5x-6}\,dx = \int (e^{\ln 2})^{5x-6}\,dx =$

$= \int e^{(\ln 2)\cdot(5x-6)}\,dx =$

$= \frac{1}{5\ln 2}\,e^{(\ln 2)\cdot(5x-6)} + K =$

$= \frac{1}{5\ln 2}\,2^{5x-6} + K$ //

3.9) $\int 200\,e^{-\frac{x}{5}}\,dx = -200\cdot 5\,e^{-\frac{x}{5}} + K = -1000\,e^{-x/5} + K$

[a] 3.10) $\int \frac{2}{4x+3}\,dx = 2\int \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{4x+3}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\ln|4x+3| + K$

3.11) $\int x\cdot\cos(x^2+4)\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\cos(x^2+4)\,dx =$

$= \frac{1}{2}\,\text{sen}(x^2+4) + K$ //

3.12) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(2x-1)}\,dx = \frac{1}{2}\,tg(2x-1) + k$

3.13) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cdot \cos x \, dx = (*)$

Dues possibilitats <u>vàlides</u>:

$[*] = \begin{cases} a/ \quad \operatorname{sen} x = (-\cos x)' \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow [*] = -\frac{1}{2}\cos^2 x + k \quad // \\ b/ \quad \cos x = (\operatorname{sen} x)' \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow [*] = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C \end{cases}$

Per què són compatibles? $\Rightarrow$ gràcies a la constant !!

$$\boxed{-\frac{1}{2}\cos^2 x + k} \overset{?}{=} \frac{1}{2}\underbrace{\operatorname{sen}^2 x}_{= 1-\cos^2 x} + C =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2 x + C =$$

$$\boxed{= -\frac{1}{2}\cos^2 x + \left(C + \frac{1}{2}\right)}$$

si $K = C + \frac{1}{2}$, aleshores ambdues solucions són la mateixa.

Heus aquí un altre exemple de la importància de les cts. d'integració

WTW87'13

EXERCICIS INTEGRALS ×W

(Els d' "INTEGRALS INDEF. (2)
[0.3] - Quasiimmediates")

3.14) $\int x \cdot 3^{-x^2} dx = \frac{1}{-2} \frac{1}{\ln 3} 3^{-x^2} + K$

[d] 3.15) $\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{4} \sin^4 x + K$

3.16) $\int \sin x \cos^2 x \, dx = -\frac{1}{3} \cos^3 x + K$

3.17) $\int \frac{2x}{6x^2+4} dx = \frac{1}{6} \ln|6x^2+4| + K$

3.18) $\int \frac{5x^2}{6x^3+4} dx = \frac{5}{18} \ln|6x^3+4| + K$

3.19) $\int \frac{x^5}{1+x^6} dx = \frac{1}{6} \ln|1+x^6| + K$

[d] 3.20) $\int \frac{e^x}{2+e^x} dx = \ln|2+e^x| + K$

3.21) $\int x \cdot \sqrt{x^2+1} \, dx = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}}{3} \int (2x) \cdot \frac{3}{2} (x^2+1)^{\frac{1}{2}} dx =$

$$= \frac{1}{3} (x^2+1)^{3/2} + K$$

3.22) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} \int (-2x) \cdot \frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx =$

$$= - (1-x^2)^{1/2} + K = - \sqrt{1-x^2} + K$$

3.23) $\int \frac{2x}{\sqrt[3]{1-2x^2}}\,dx = \int 2x\cdot(1-2x^2)^{-\frac{1}{3}}\,dx =$

$= -\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,(1-2x^2)^{2/3} + k = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1-2x^2)^2} + k$

3.24) $\int \sqrt{(1+\cos x)^3}\ \operatorname{sen} x\, dx =$

$= -\int -\operatorname{sen} x\ (1+\cos x)^{3/2}\, dx =$

$= -\frac{2}{5}(1+\cos x)^{5/2} + k$

[d] 3.25) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-3x^3}}\,dx = \int x^2\,(1-3x^3)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$

$= -\frac{1}{9}\,2\,(1-3x^3)^{1/2} + k$

3.26) $\int e^x\cdot\cos(e^x)\cdot dx = \operatorname{sen}(e^x) + k$

3.27) $\int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = -2\int\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\operatorname{sen}(\sqrt{x})\,dx =$

$= -2\cos\sqrt{x} + k$

WSWRH'13

Exercicis Integrals ×W

8/17

(Els d'integrals indef. (2)
[p.3] 1=0 - Quasiimmediates)

3.28 $\int \frac{1}{x} \ln x \, dx \rightarrow$ és com el (10) de p. 1.

3.29 $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \frac{1}{4} \ln^4 x + K$

3.30 $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \ln(\ln x) + K$

3.31 $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx = 2 e^{\sqrt{x}} + K$

3.32 $\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x + K$

3.33 $\int \frac{1}{1+5x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\sqrt{5}\, dx}{1+(\sqrt{5}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}(\sqrt{5}x) + K$

3.34 $\int \frac{1}{4+x^2} dx = \int \frac{1}{4} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1/2}{1+\left(\frac{1}{2}x\right)^2} dx =$

$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}x\right) + K$

[BII] 3.35 $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2x}}{1+(e^{2x})^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(e^{2x}) + K$

3.36 $\int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+(x^2)^2} dx =$

$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x^2)$ //

3.37

$$\int \frac{1}{4+9x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\int \frac{3/2}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\,\text{arctg}\left(\frac{3}{2}x\right) + K$$

3.38

$$\int \frac{1}{a^2+b^2x^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\,\frac{a}{b}\int \frac{b/a}{1+\left(\frac{b}{a}x\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{ab}\,\text{arctg}\left(\frac{b}{a}x\right) + K$$

3.39

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{arcsen}(2x) + K$$

[d^{II}] 3.40

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\,\text{arcsen}(x^2) + K$$

RECORDATORI:

REGLA CADENA: $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$$\boxed{\left(\text{arcsen}(x^2)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot 2x}$$

...en aquest exemple, qui són "f" i "g"?

$f(z) = \text{arcsen}\, z$

$g(x) = x^2$

3.41

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = 3\cdot\frac{1}{3}\int \frac{1/3}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,dx =$$

$$= \text{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right) + K$$

Exercicis Integrals

Els d'INTEGRALS INDEF. (2) – Quasiimmediatos

[p.3]

3. (42) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx = \frac{1}{\cancel{3}}\frac{\cancel{3}}{2}\int \frac{2/3}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x\right)^2}}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{2}{3}x\right) + K$$

3. (43) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\,dx = \frac{1}{\cancel{a}}\frac{\cancel{a}}{b}\int \frac{b/a}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}x\right)^2}}\,dx =$

$$= \frac{1}{b}\,\mathrm{arsen}\left(\frac{b}{a}x\right) + K$$

3. (44) $\displaystyle\int K\cdot e^{-px}\,dx = K\,\frac{1}{-p}\,e^{-px} + C$

[d^{II}] 3. (45) $\displaystyle\int \frac{1}{2+e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^x}{e^x}\cdot\frac{1}{2+e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^x}{2e^x+1}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2e^x}{2e^x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|2e^x+1\right| + K$$

3. (46) $\displaystyle\int \frac{kx}{1+kx^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2kx}{1+kx^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|kx^2+1\right| + K$

3. (47) $\displaystyle\int \frac{k}{1+kx^2}\,dx = \sqrt{k}\int \frac{\sqrt{k}}{1+\left(\sqrt{k}\,x\right)^2}\,dx =$

$$= \sqrt{k}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{k}\,x\right) + K$$

3. 48 $\displaystyle\int \frac{kx}{\sqrt{1+kx^2}}\,dx = \int kx\cdot(1+kx^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$

[arcsen? → sembla que aquí necessitaríem un signe ⊖; a més a més, al numerador tenim una "x" que ens molesta ...]

$$= \frac{1}{2}\int 2kx\cdot(1+kx^2)^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(1+kx^2)^{1/2} + K =$$

$$= \sqrt{1+kx^2} + K$$

a comparar amb 22

3. 49 $\displaystyle\int \frac{kx}{\sqrt{1-kx^2}}\,dx = -\sqrt{1-kx^2} + K$

[ara sí que tenim el signe ⊖, però la x del numerador ens continua molestant de cara a buscar un arcsen]

[d II] 3. 50 $\displaystyle\int \frac{k}{\sqrt{1-kx^2}}\,dx = \sqrt{k}\int \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{1-(\sqrt{k}\,x)^2}}\,dx =$

[ara ja tenim el que necessitem: el signe menys i al num. no hi ha cap "x" → pensem en un arcsen]

$$= \sqrt{k}\,\arcsen(\sqrt{k}\,x) + K$$

[NOTA sobre 46, 47, 48, 49 i 50:

→ si tinguéssim $\displaystyle\int \frac{k}{\sqrt{1+kx^2}}\,dx$, seria un ⊕!!

"arcsinus hiperbòlic", però crec que aquestes funcions no les coneixen encara.]

EXERCICIS INTEGRALS

Els d'INTEGRALS INDEF. (2)

[p.3] - Quasiimmediates

3. 51 $\int \frac{3x}{(x^2+4)^3}\,dx = \int 3x\cdot(x^2+4)^{-3}\,dx =$

$= -3\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{2}(x^2+4)^{-2} + K = -\frac{3}{4(x^2+4)^2} + K$ //

3. 52 $\int \frac{3x^2+4x}{x^3+2x^2-5}\,dx = \ln|x^3+2x^2-5| + K$ //

"polinomi / polinomi" ⟶ com que el del num. és de menor grau, no podem buscar simplificacions fent una divisió de polinomis. Abans de buscar tècniques sofisticades, però, sempre cal preguntar-se si és immediata o semiimmediata: el num. és la derivada del denom, o proporcional a la derivada del denom? ⟶ sí ⟹ busquem un logaritme.

3. 53 $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x}\,dx = \frac{1}{3}\int\frac{3x^2+3}{x^3+3x}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+3x| + K$ //

Veure comentari de 52: aquí el num. no és deriv. del denom, però sí proporcional a ella: també és immediata i logarítmica

3. 54 $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + K$ //

[d^II] 3. 55 $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx \Rightarrow$ 54 //

3. 56 $\int \cot g(anx)\,dx = \int \frac{1}{tg(anx)}\,dx = \int \frac{\cos(anx)}{sen(anx)}\,dx =$

$= \frac{1}{an} \ln|sen(anx)| + K$

NOTA: crec que és un error tipogràfic i l'exercici era $\int \cot g\, x\, dx = \ln|sen\, x| + K$

3. 57 $\int \frac{tg\, x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{sen\, x / \cos x}{\cos^2 x}\,dx =$

$= \int \frac{sen\, x}{\cos^3 x}\,dx = \int sen\, x \cdot \cos^{-3} x\, dx =$

$= +\frac{1}{2}\cos^{-2} x + K = \frac{1}{2}\sec^2 x + K$

3. 58 $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + K$

3. 59 $\int \frac{1}{(x+3)^4}\,dx = -\frac{1}{3}\frac{1}{(x+3)^3} + K$

[d^{II}] 3. 60 $\int \frac{sen\, x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = -\int (-sen\, x)\cdot(\cos x)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$

$= -2(\cos x)^{1/2} + K = -2\sqrt{\cos x} + K$

3. 61 $\int \frac{arctg\, x}{1+x^2}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{f'} \cdot \underbrace{arctg\, x}_{f}\,dx = \frac{1}{2} arctg^2 x + K$

Recordem: $\int f'(x)\cdot f(x)\,dx = \frac{1}{2}(f(x))^2 + K$ (regla cadena!!)

(Ex.s d'INTEGRALS INDEF. (2)
[p. 3] ⇒ - Quasiimmediates)

3. 62 $$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,dx =$$

$$= \operatorname{arctg}(e^x) + K$$

3. 63 $$\int \operatorname{sen}(2x)\cdot\cos^2(2x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\cos^3(2x) + K$$

(és més sistemàtic, però, fer-la "per parts")

▷ Extra:

$$I = \int \cos^2 x\,dx = \underbrace{\int \cos 2x\,dx}_{+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x + C} + \int \underbrace{\operatorname{sen}^2 x}_{= 1-\cos^2 x}\,dx =$$

[identitat trigonomètrica coneguda:

$$\boxed{\cos^2 x = \cos 2x + \operatorname{sen}^2 x}$$
]

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\operatorname{sen}2x}_{=2\cos x\operatorname{sen}x} + C + \underbrace{\int dx}_{= x + ctt} - \underbrace{\int \cos^2 x\,dx}_{= I} \Rightarrow$$

[una altra ident. trigon. coneguda]

Aïllem la "I" en la darrera equació; fem $K = (C + ctt)\cdot\frac{1}{2}$

⇒ $$2I = \cos x\operatorname{sen}x + x + (C + ctt) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\cos x\operatorname{sen}x + \frac{x}{2} + K}$$

"INTS. INDEF. (3) – Per parts" (p.3. revers)

▶ MÈTODE "per parts":

• Motivació: quan hem d'integrar e^x, ja sabem que l'exponencial es queda igual i només cal afegir-li la ctt. aditiva:

$$\int e^x\,dx = e^x + k.$$ [és l'exercici (Pparts.1)]

Si tenim $2x\cdot e^{x^2}$, podem aplicar la tècnica de la regla de la cadena: $\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}\cdot f'(x)$

i identifiquem $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$, d'on sabem que:

$$\begin{cases} \int e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + k & \text{(en general)} \\ \int e^{x^2}\cdot 2x\,dx = e^{x^2} + k & \text{(nostre cas)} \end{cases}$$

Què passa si tenim $\int x\cdot e^x\,dx$? → Tenim un producte de dos funcions, x i e^x, que no sabem integrar. Però sí que sabem integrar una de les dues per separat i derivar l'altra:

$$e^x \xrightarrow{\text{int}} e^x$$
$$x \xrightarrow{\text{der}} 1$$

↳ En casos com aquest, pot ser útil intentar la tècnica d'integració per parts.

- Descripció del MÈTODE ("per parts"):

i) Siguin $u(x)$, $v(x)$ dues funcions d' x.

ii) Per definició d'integral, és evident que

$$(*) \quad \int (u \cdot v)' \, dx = u \cdot v + k$$

nota: d'ara endavant, prescindirem de les ctt. d'integració per simplicitat. Les afegirem al final.

iii) Desenvolupem el membre esquerre de l'equació [*] aplicant la regla de la derivada del producte: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $\xRightarrow{[*]}$

$$\Rightarrow \int u' v \, dx + \int u v' \, dx = u \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (*,*) \quad \boxed{\int u v' \, dx = u \cdot v - \int u' v \, dx}$$

la versió de la FÓRMULA per a INTEGRAR PER PARTS.

iv) Interpretem aquesta fórmula: en el membre esquerre tenim la integral del producte de la funció u, que sempre sabem derivar, amb la funció v', que és la derivada de v. Suposarem que coneixem aquesta v, és a dir, que sabem fer la integral $\int v' dx = v$.

$\Rightarrow$ Aleshores, sempre podem escriure l'expressió del membre dret, i haurem reduït el càlcul de la integral inicial, $\int u v' dx$, al d'una altra, $\int u' v \, dx$.

"INTS. INDEF. (3) – Per parts" (p.3. revers)

• <u>Exemple d'aplicació del MÈTODE</u> ("per parts"):

Tornem a l'exercici (<u>Pparts.1</u>):

$$\begin{cases} \int x\cdot e^x\,dx = \left\| \begin{matrix} u=x \to u'=1 \\ v'=e^x \to v=e^x \end{matrix} \right\| = x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx \quad (*,*,*) \\ \int u\cdot v'\,dx = (\text{apliquem } [*,*]) = u\cdot v - \int u' v\,dx \end{cases}$$

☞ Notem que hem triat $u=x$ perquè u és la que derivem, i $(x)'=1$ dóna un resultat "poc problemàtic"; anàlogament, $v'=e^x$ és el que integrem, $v=e^x$, també amb un resultat senzill.

Notem que la integral del membre de la dreta de $[*,*,*]$ ara sí és immediata, i llavors podem concloure que:

$$\boxed{\int x\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - e^x + k = e^x(x-1)+k} \;//$$

• <u>NOTACIÓ COMPACTA i MNEMOTÈCNIA</u> ("per parts"):

Si tenim una funció d'x, $f(x)$, la notació df es llegeix "diferencial d'efa" i vol dir, de manera compacta, $\boxed{df = f'(x)\cdot dx}$.

Així, $du = u'dx$ i $dv = v'dx$, i reescrivim $[*,*]$:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

FÓRMULA de la INTEGRAL per PARTS (2a versió)

« <u>Un</u> <u>día</u> <u>vi</u> <u>una</u> <u>vaca</u> <u>flaca</u> <u>vestida</u> <u>de</u> <u>uniforme</u> » //

▶ SOLUCIONS EXERCICIS "per parts" (p.3-r)

Resum mètode:

$$\boxed{\begin{gathered}\int u\,dv = uv - \int v\,du \\ df = f'\,dx\end{gathered}}$$

P. parts 1

$$\int x\cdot e^x\,dx = \left\| \begin{array}{l} u = x \rightarrow u' = 1 \\ v' = e^x \rightarrow v = e^x \end{array} \right\| =$$

$$= xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + K = e^x(x-1) + K \,//$$

P parts. 2

$$\int x\cdot\cos x\,dx = \left\| \begin{array}{l} u = x \rightarrow u' = 1 \\ v' = \cos x \rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{array} \right\| =$$

$$= x\cdot\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\cdot\operatorname{sen} x + \cos x + K \,//$$

P parts. 3

$$\int x\cdot\operatorname{sen} x\,dx = \left\| \begin{array}{l} u = x \rightarrow u' = 1 \\ v' = \operatorname{sen} x \rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\| =$$

$$= -x\cdot\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cdot\cos x + \operatorname{sen} x + K \,//$$

P parts. 4

$$\int x\cdot\ln x\,dx = \left\| \begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow u' = 1/x \\ v' = x \rightarrow v = \frac{1}{2}x^2 \end{array} \right\| = (*)$$

(→ ves a pàg. següent)

Nota: fins ara, hem triat $u=x$ perquè estava multiplicat per una altra funció que sabíem integrar, i la integral no era massa lletja i ara tenim un logaritme, que en principi no sabem integrar (de fet: s'integra per parts també, veure P parts. 14), però sí derivar.

$$[*] = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \int \frac{1}{2}x^{\cancel{2}} \frac{1}{\cancel{x}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 + K =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\left(\ln x - 1/2\right) + K$$

Pparts. 5

$$\int x \cdot e^{3x}\,dx = \left\| \begin{matrix} u = x \to u' = 1 \\ v' = e^{3x} \to v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right\| =$$

És molt semblant a (Pparts. 1)

$$= \frac{1}{3}x e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}x e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + K =$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) + K$$

Pparts. 6

$$\int x \cdot 2^x\,dx = \left\| \begin{matrix} u = x \to u' = 1 \\ v' = 2^x \to v = \frac{1}{\ln 2}2^x \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\cdot x \cdot 2^x - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x\,dx = \frac{1}{\ln 2}\cdot x \cdot 2^x - \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{\ln 2}2^x + K =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}2^x\left(x - \frac{1}{\ln 2}\right) + K$$

Pparts. 7

$$\int x \cdot \sin 6x\,dx = \left\| \begin{matrix} u = x \to u' = 1 \\ v' = \sin 6x \to v = -\frac{1}{6}\cos 6x \end{matrix} \right\| =$$

$$= -\frac{1}{6}x\cos 6x + \frac{1}{6}\int \cos 6x\,dx = -\frac{1}{6}x\cos 6x + \frac{1}{6}\frac{1}{6}\sin 6x + K =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\operatorname{sen} 6x - x\cdot\cos 6x\right) + K$$

Pparts. 8

$$\int x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \left\| \begin{array}{l} u = x \rightarrow u' = 1 \\ v' = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow v = \operatorname{tg} x \end{array} \right\| =$$

$$= x\cdot\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx = x\operatorname{tg} x - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx =$$

$$= x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + K$$

Pparts. 9 = **Pparts 8**

Pparts. 10

$$\int x\cdot e^{-x}\,dx = \left\| \begin{array}{l} u = x \rightarrow u' = 1 \\ v' = e^{-x} \rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right\| =$$

$$= -x e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -x e^{-x} - e^{-x} + K =$$

$$= -e^{-x}(x+1) + K$$

Pparts. 11

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = \left\| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \rightarrow u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = 1 \rightarrow v = x \end{array} \right\| =$$

$$= x\cdot\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + K$$

Pparts. 12

$$\int x^2\cdot e^x\,dx = \left\| \begin{array}{l} u = x^2 \rightarrow u' = 2x \\ v' = e^x \rightarrow v = e^x \end{array} \right\| = (*, *)$$

(cont. pàg. següent) →

Les d'aquest tipus no són immediates, però una integració per parts amb $u = x^p$ ens permet "anar baixant-li el grau al monomi"

"INTS. INDEF. (3) – Per parts" (p.3 revers)

$$[*,*] = x^2e^x - 2\underbrace{\int x e^x}_{\text{" } e^x(x-1)} = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + k =$$

(és Pparts-1, ja l'hem feta)

$$= e^x(x^2 - 2x + 2) + K$$

Pparts. 13

$$\int x^2 \cdot \cos 2x \, dx = \left\| \begin{matrix} u = x^2 \rightarrow u' = 2x \\ v' = \cos 2x \rightarrow v = \frac{1}{2}\sen 2x \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \sen 2x - \underbrace{\int x \sen 2x \, dx}_{I} = (*)$$

Fem apart I:

$$\boxed{I =} \int x \sen 2x \, dx = \left\| \begin{matrix} u = x \rightarrow u' = 1 \\ v' = \sen 2x \rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix} \right\| =$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\sen 2x + K \quad (3*)$$

$$[*] = \frac{1}{2}x^2 \sen 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sen 2x + K$$

Pparts. 14

$$\int \ln x \, dx = \left\| \begin{matrix} u = \ln x \rightarrow u' = 1/x \\ v' = 1 \rightarrow v = x \end{matrix} \right\| =$$

$$= x\ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x\ln x - x + k =$$

$$= x \cdot (\ln x - 1) + k$$

Pparts. 15

$$\int x^2 \cdot \ln x \, dx = \left\| \begin{matrix} u = \ln x \rightarrow u' = 1/x \\ v' = x^2 \rightarrow v = \frac{1}{3}x^3 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\frac{1}{3}x^3 + K =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \cdot (\ln x - 1/3) + K$$

Pparts. 16

$$\int \ln^2 x \, dx = \left\| \begin{matrix} u = \ln^2 x \rightarrow u' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \\ v' = 1 \rightarrow v = x \end{matrix} \right\| =$$

$$= x \cdot \ln^2 x - 2 \underbrace{\int \ln x \cdot \cancel{\frac{1}{x}} \cdot \cancel{x} \, dx}_{= x \cdot (\ln x - 1) + K} = x \ln^2 x - 2x(\ln x - 1) - 2K =$$

es faria també per parts, però nosaltres ja la coneixem: és "Pparts. 14"

$$= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$$

($C = -2K$, són constants d'integració indeterminades).

Pparts. 17

compte amb aquesta

$$\int x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = \left\| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x \rightarrow u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = x \rightarrow v = \frac{1}{2}x^2 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = (4.*)$$

(pàg següent)

quan tenim un quocient de polinomis $\frac{Q(x)}{P(x)}$ i $g(Q) \geq g(P)$, hem de fer la divisió de polinomis. Després s'apliquen les tècniques d'integració racional, però en aquest cas és senzill.

"INTS. INDEF. (3) – Per parts" (p. 3 revers)

$\boxed{4.x}$ $= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\left(\frac{-1}{x^2+1}+1\right)dx =$

... hem dividit els polinomis:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2+1 \\ \hline -x^2-1 & 1 \\ -1 & \end{array} \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{-1}{x^2+1}+1}$$

$$\left(\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline R & c \end{array} \Rightarrow \frac{D}{d} = c + \frac{R}{d}\right)$$

$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\left[-\operatorname{arctg} x + x\right] + K =$

$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + K$ //

Pparts. 18 $\int \operatorname{arcsen} x \, dx = \left\| \begin{array}{l} u = \operatorname{arcsen} x \rightarrow u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = 1 \rightarrow v = x \end{array} \right\| =$

$= x \cdot \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \cdot \operatorname{arcsen} x + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}(1-x^2)^{1/2} + K$

$= x \cdot \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + K$ //

Pparts. 19 $\underbrace{\int e^x \cdot \cos x \, dx}_{=J} = \left\| \begin{array}{l} u = \cos x \rightarrow u' = -\sin x \\ v' = e^x \rightarrow v = e^x \end{array} \right\| =$

$= e^x \cos x + \underbrace{\int e^x \sin x \, dx}_{=I} = (*)$

← hem de fer, apart, I per parts:

$$I = \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \left\| \begin{array}{l} u = \operatorname{sen} x \to u' = \cos x \\ v' = e^x \to v = e^x \end{array} \right\| =$$

$$= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$[*] = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \underbrace{\int e^x \cos x \, dx}_{= J} \; ;$$

Això és justament la int. que volem calcular !!

⟹ Veiem que tenim una equació en J:

$$J = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) - J \implies$$

$$\implies 2J = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) \implies$$

$$\implies \int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \operatorname{sen} x) + K \quad //$$

(no oblidem afegir "a mà" la ctt. d'integració).

INTEGRAL extra: Anem a tornar a resoldre aquella de $\cos^2 x$, per parts; el mecanisme de tipus "recursiu" és molt semblant al que acabem de fer amb [Pparts.19]:

$$\boxed{I = \int \cos^2 x \, dx} = \left\| \begin{array}{l} u = \cos x \to u' = -\operatorname{sen} x \\ v' = \cos x \to v = \operatorname{sen} x \end{array} \right\| = \cos x \cdot \operatorname{sen} x + \int \operatorname{sen}^2 x \, dx =$$

$$= \cos x \cdot \operatorname{sen} x + \int (1 - \cos^2 x)\, dx =$$

$$= \cos x \cdot \operatorname{sen} x + \int dx - \underbrace{\int \cos^2 x \, dx}_{= I} \iff (*,*)$$

pàg. següent

$[*,*] \Leftrightarrow \quad 2I = \cos x \cdot \sin x + \int dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad I = \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(\cos x \cdot \sin x + x) + K$

P.parts. 20

$\int e^x \cdot \sin x \, dx = \left\| \begin{matrix} u = \sin x \to u' = \cos x \\ v' = e^x \to v = e^x \end{matrix} \right\| =$

(molt semblant a [P.parts. 19])

$= e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \cos x \, dx}_{\cancel{I_0 = \left\| \begin{matrix} u = c \to u' = -s \\ v' = e^x \to v = e^x \end{matrix} \right\| = e^x c + \int e^x s \, dx}} = e^x(s - c) - \int e^x \sin x \, dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + K$

P.parts 21

$\int \cos(\ln x) \, dx = \left\| \begin{matrix} u = \cos(\ln x) \to u' = -\frac{1}{x} \sin(\ln x) \\ v' = 1 \to v = x \end{matrix} \right\| =$

$= x \cdot \cos(\ln x) + \int \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} \cdot \sin(\ln x) \, dx =$

$= \left\| \begin{matrix} u = \sin(\ln x) \to u' = \frac{1}{x} \cos(\ln x) \\ v' = 1 \to v = x \end{matrix} \right\| = x \cdot (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) +$

$- \int \frac{x}{x} \cdot \cos(\ln x) \, dx \Leftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \quad 2\int \cos(\ln x)\,dx = x\cdot\left[\cos(\ln x) + \operatorname{sen}(\ln x)\right]$$

[li afegim "a mà" la ctt.]

$$\Longrightarrow \int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}\cdot\left[\cos(\ln x) + \operatorname{sen}(\ln x)\right] + K$$

COMENTARI SOBRE PER QUÈ AFEGIM "a mà" LES ctt's:

El nostre conveni de notació és que

$$\int f(x)\,dx = \text{"qualsevol primitiva de } f\text{"},$$

i això significa, com sabem, haver de considerar una ctt. d'integració indeterminada.

En alguns dels darrers exemples d'integració "per parts" hem fet:

$$\int f(x)\,dx = g(x) - \int f(x)\,dx \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 2\int f(x)\,dx = g(x) \quad \Longrightarrow \int f(x) = \frac{1}{2}\,g(x),$$

i hem hagut d'afegir-hi "a mà" la ctt.

On l'hem perduda? En aquest pas:

la $\int f(x)\,dx$ de la dreta i la de l'esquerra podem veure-les com que donen $F(x) + K$ i $F(x) + C$, respectivament, sent-hi $F(x)$ una primitiva qualsevol de f. Així, les cts. K i C són en general diferents, i la seva suma en dóna una altra: $K + C = $ ctt. //