[3-VI-2013; idel] notes per a **RESUM** «VARIABLE ALEATÒRIA CONTÍNUA» i/ii

▶ variable discreta:

X pot prendre un conjunt "discret" de valors $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$

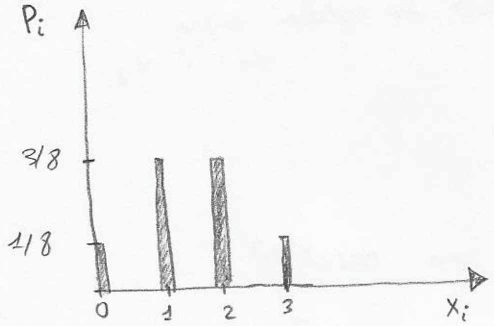
p. exemple: en l'experiment de llançar una moneda tres vegades seguides, X és «el nombre total de creus que obtenim».
→ els únics valors possibles de X són 0, 1, 2 i 3.

▶ funció de probabilitat:

$p[X = x_j]$ → ens diu la probabilitat de trobar el resultat x_j si fem l'experiment.

el seu gràfic és un "diagrama de barres"

p. exemple, en el cas de la moneda:



▶ variable contínua:

X pot prendre tots els valors d'un interval real, $X \in [a, b] \subset \mathbb{R}$

p. exemple: en l'experiment d'agafar un nadó a l'atzar i pesar-lo, el resultat segur que està entre 0 i 4 kg, però a dins d'aquest interval pot prendre un valor qualsevol.

▶ funció de densitat [de probabilitat]:

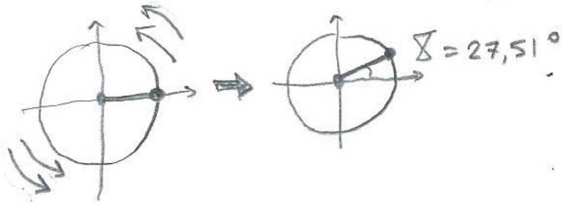
⚠ amb variable aleatòria contínua **no té sentit** tractar d'utilitzar una **"funció de probabilitat"!**

PER QUÈ? → per a entendre-ho, anem a imaginar l'exemple de la ruleta i el punt:

· Pintem un punt a la vora d'un disc.

· El posem a girar ràpidament al voltant del seu eix, com un dels antics discs de vinil, i esperem fins que s'aturi.

· Quin angle formarà el segment que uneix el punt amb el centre del disc respecte del que formava inicialment?



☞ És evident que $X \in [0°, 360°)$ i que, a dins d'aquest interval, pot prendre tots els valors possibles. ⇒

⇒ podríem, doncs, tractar

de fer igual que amb variable discreta quan hi ha equiprobabilitat: $P = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}}$.

Però si tractem d'aplicar això al valor $x = 10°$, per exemple, tenim que: $\left.\begin{cases} \text{casos fav.} \to 1 \\ \text{casos pos.} \to \infty \end{cases}\right\} \to \boxed{\text{prob} = \frac{1}{\infty} \to \text{zero!!}}$

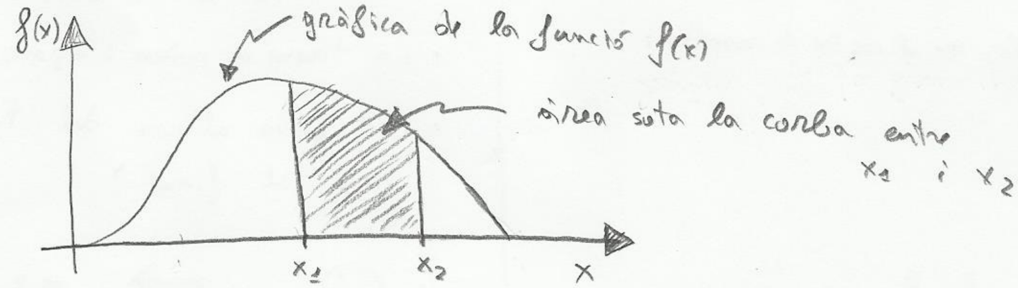
- El problema, doncs, és que tenim un infinit al denominador.

Per a solucionar-ho, recordem de límits que, de vegades, un infinit al denominador es pot compensar amb un altre al numerador (!).

➡ «En variable contínua, renunciem a parlar de la probabilitat d'un únic resultat, i parlem de la probabilitat que el resultat estigui a un cert interval $x \in [x_1, x_2]$»

<u>per exemple:</u> al problema de la ruleta i el punt, és evident que la probabilitat que el punt acabi entre 0° i 90° és 1/4; la probabilitat que acabi entre 0° i 45° és 1/8; la prob. que estigui entre 0° i 30° és 1/12, etc.

- En la pràctica, utilitzem un **procediment gràfic** per calcular les probabilitats en experiments aleatoris de variable contínua. Representem una certa funció $f(x)$



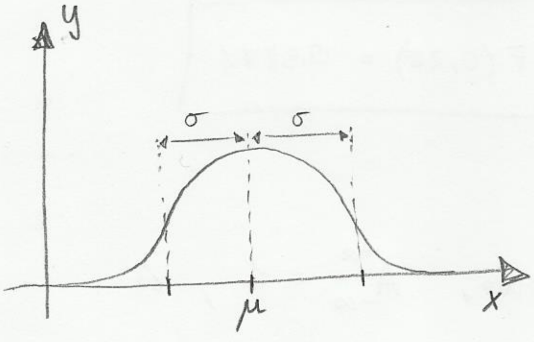
i per saber la probabilitat d'obtindre un resultat contingut a un cert interval, $X = x \in [x_1, x_2]$, només hem de calcular l'àrea sota la corba $f(x)$ entre els valors extrems, x_1 i x_2.

- La funció $f(x)$ rep el nom de "funció de densitat".

▶ LA CAMPANA de GAUSS:

- funció de densitat:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}$$



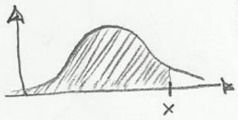
corba normal o "campana de Gauss"

paràmetres: $\mu \longrightarrow$ mitjana
$\sigma \longrightarrow$ desviació típica (o "estàndard")

▶ Distribució normal $N(\mu,\sigma)$:

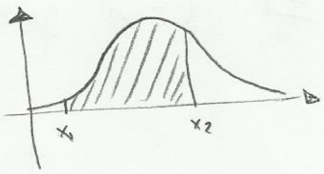
- és la distribució associada a la campana de Gauss de paràmetres μ, σ.

- $$\boxed{F(x) = p\left[X \le x\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{c}\text{Àrea entre } -\infty \text{ i } x \\ \text{sota la campana de Gauss}\end{array}\right]}_{= A_{-\infty}^{x}} =}$$



▶ Com usem la $N(\mu,\sigma)$?

- Volem calcular $p\left[x_1 \le X \le x_2\right] = A_{x_1}^{x_2}$



- Calculem els valors "tipificats" dels extrems x_1, x_2:

$$\boxed{Z = \frac{X-\mu}{\sigma}} \longrightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{x_1-\mu}{\sigma} \\ z_2 = \dfrac{x_2-\mu}{\sigma} \end{cases}$$

- Calculem $p\left[z_1 \le Z \le z_2\right]$ utilitzant la taula

$$\Longrightarrow \boxed{p\left[x_1 \le X \le x_2\right] = p\left[z_1 \le Z \le z_2\right]}$$

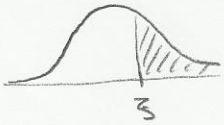
INDICACIONS per usar la taula:

i]

z	0	1	2	...
0,0	~	~	~	
0,1	~	~	~	...
0,2	~	~	0,5871	
⋮		⋮		

← centèsimes

$$\boxed{F(0{,}22) = 0{,}5871}$$

ii] Com que l'àrea sota tota la corba, $A_{-\infty}^{+\infty} = 1$, és la unitat, aleshores si necessitem $A_{z}^{+\infty}$ 

$$\Rightarrow \boxed{A_{z}^{+\infty} = 1 - A_{-\infty}^{z}} \quad (*)$$

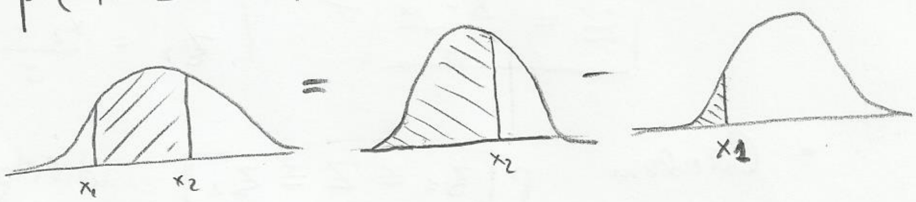
$$\left(\underbrace{A_{-\infty}^{z} + A_{z}^{+\infty}}_{A_{-\infty}^{+\infty}} = \right.$$  + 

$$A_{-\infty}^{+\infty} =$$  $\left. = 1 \right)$

iii] Com que és simètrica (la campana), $A_{-\infty}^{0} = A_{0}^{+\infty} \Rightarrow$ [*]

$$\Rightarrow \boxed{A_{-\infty}^{0} = A_{0}^{+\infty} = 0{,}5}$$

iv] Recordem que: $p(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$



v] Recordem que per passar a percentatges, multipliquem per 100 la prob.