Pepe Ródenas Borja

[dc; 18-III-2015]

WW8f'15

1/3

FÍSICA (2º BACH)

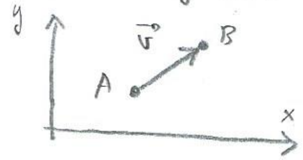
"VECTORES y CAMPO GRAVITATORIO":

- repaso de teoría
- ejercicios básicos
- soluciones

1. REPASO de TEORÍA

1.A VECTORES

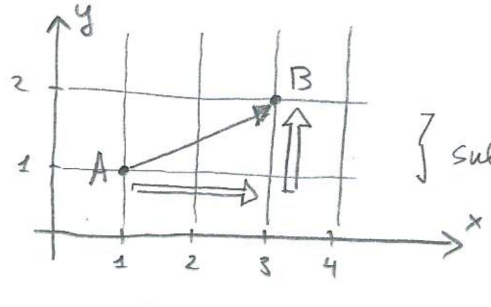
: podemos imaginar que un vector es una flecha que une dos puntos del espacio:



A es el "origen" del vector $\vec{v}$

B es el "extremo" de $\vec{v}$

▶ COMPONENTES de $\vec{v}$: usamos los ejes X, Y para hacer una cuadrícula por todo el plano. Con la cuadrícula sabemos las coordenadas de los puntos (como en un mapa, o en el juego de "barquitos"), y también sabemos las componentes de un vector: lo que avanzamos en horizontal para ir de A hasta B, y lo que subimos en vertical:



} subimos 1

avanzamos 2

coordenadas de A y B:
A (1,1)
B (3,2)

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{v} : (2\,,\,1)}$

componente horizontal (v_x)

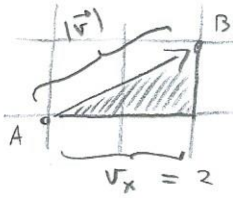
componente vertical (v_y)

SIGNOS: si para ir de A a B "bajamos", v_y es negativa. (↓)
si "retrocedemos", v_x es negativa (←)

▶ MÓDULO de $\vec{v}$: es la longitud de la flecha, $|\vec{v}|$. (También: v, a secas).

Lo calculamos si sabemos (v_x, v_y) con teorema Pitágoras:

HIPOTENUSA



$\} \; v_y = 1$

CATETOS

$v_x = 2$

$$\Rightarrow |\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 \Rightarrow$$

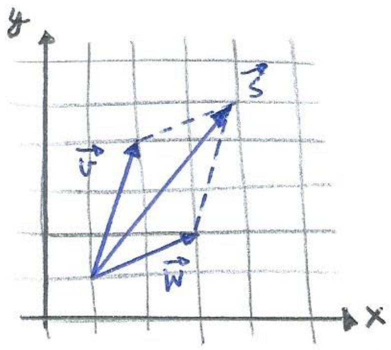
$$\Rightarrow \boxed{|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

▶ SUMA de VECTORES: $\boxed{\text{se hace componente a componente}}$:

$$(1,3) + (8,5) = (\underset{1+8}{9}, \underset{3+5}{8})$$

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO: si sumamos los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, y el resultado es $\vec{s}$, o sea:

$\vec{v} + \vec{w} = \vec{s}$, entonces $\vec{s}$ se interpreta como la diagonal del paralelogramo que definen $\vec{v}$ y $\vec{w}$:



$\vec{v}: (1,3)$

$\vec{w}: (2,1)$

$\Rightarrow (1,3) + (2,1) = (3,4)$

$$\vec{s}: \begin{cases} s_x = v_x + w_x = 1+2 = 3 \\ s_y = v_y + w_y = 3+1 = 4 \end{cases}$$

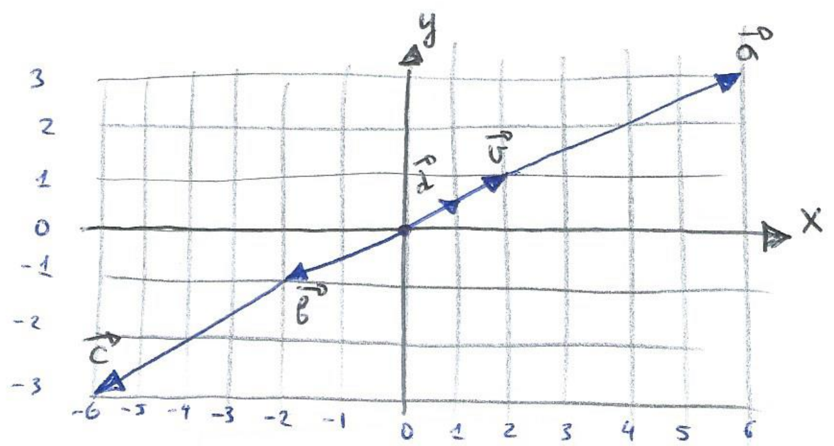
▶ MULTIPLICACIÓN "NÚMERO POR VECTOR": el número multiplica las dos componentes:

(también se le llama "escalar")

$\vec{v}: (2,1)$

	ejemplo	efecto geométrico:
a)	$3 \cdot (2,1) = (6,3)$	la longitud de $\vec{v}$ se multiplica por 3
b)	$-1 \cdot (2,1) = (-2,-1)$	la orientación de $\vec{v}$ se invierte
c)	$-3 \cdot (2,1) = (-6,-3)$	longitud por 3, orientación se invierte
d)	$0'5 \cdot (2,1) = (1, 0'5)$	la longitud de $\vec{v}$ se reduce a la mitad

representación gráfica



... en resumen:

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO:

«La longitud del vector se multiplica por el valor absoluto del número, y además su orientación se invierte si el número es negativo»

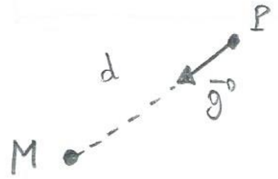
NOTACIÓN: $\vec{a} = 3\vec{v}$; $\vec{b} = -1 \cdot \vec{v}$;

$\vec{c} = -3\vec{v}$; $\vec{d} = 0'5 \cdot \vec{v}$

las cinco flechas salen del punto central, (0,0).

Pepe Ródenas Borja

1.B CAMPO GRAVITATORIO (sin $\vec{u}_r$)



La masa M crea en el punto P un campo gravitatorio $\vec{g}$ que se calcula así:

- Módulo de $\vec{g}$: $\boxed{g = G\dfrac{M}{d^2}}$ (m/s²)
- Orientación de $\vec{g}$: $\boxed{P \rightarrow M}$ (ó "dirección y sentido")

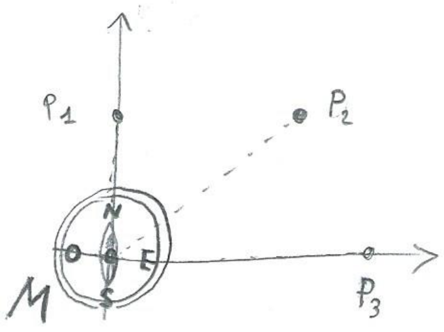
— Principio de superposición: si hay dos masas, M_1 y M_2, $\boxed{\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2}$

— Fuerza gravitatoria: si en P colocamos una masa m, $\boxed{\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}}$

(Nota: para N masas, $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \ldots + \vec{g}_N$).

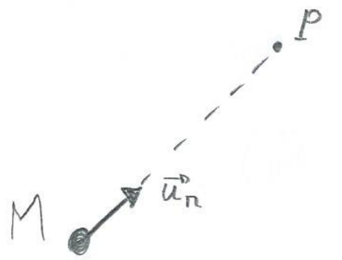
1.C CAMPO GRAVITATORIO con $\vec{u}_r$ (vector "brújula").

▶ Para calcular el campo en P no sólo hay que saber a qué distancia d se encuentra P, sino también en qué dirección hay que caminar para llegar a P desde M: hacia el Norte, el Sur, el Este, el Suroeste ...



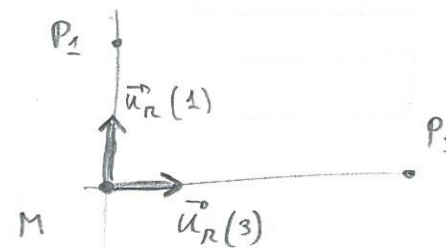
P_1 está hacia el Norte
P_2 está hacia el Nordeste
P_3 está hacia el Este

▶ Para expresar matemáticamente hacia dónde hay que caminar para llegar de M al punto P, nos imaginamos que la brújula que tiene M es un vector de módulo uno (longitud = 1) que llamamos $\vec{u}_r$, o "vector brújula":



$$\boxed{\vec{u}_r : \begin{cases} \text{- módulo: } |\vec{u}_r| = 1 \quad (\text{"unitario"}) \\ \text{- orientación: } M \rightarrow P \end{cases}}$$

p. ejemplo: en la página anterior, para ir a P_1, $\vec{u}_r(1) = (0, 1)$ y para ir a P_3, $\vec{u}_r(3) = (1, 0)$:



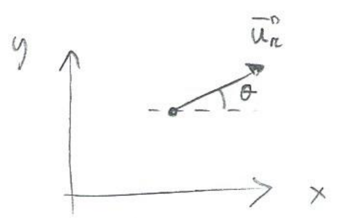
Otro ejemplo: para avanzar hacia el Sur, $\vec{u}_r(\text{SUR}) = (0, -1)$. $\downarrow \vec{u}_r$

▶ Los dos vectores-brújula más importantes son justamente $(1, 0)$ "ESTE" y $(0, 1)$ "NORTE", y tienen una notación especial:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{j} = (0, 1) & \text{"NORTE"} \\ \vec{i} = (1, 0) & \text{"ESTE"} \end{array}}$$

← el conjunto $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ se llama "base canónica".

Si sabemos el «ángulo θ con la horizontal» (eje X), cualquier vector-brújula se calcula así:

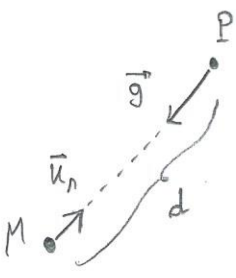


$$\boxed{\vec{u}_r = (\cos\theta, \ \text{sen}\,\theta)}$$

p. ejemplo: en pág. anterior, para ir a P_2 (NORDESTE):

$$\vec{u}_r(2) = (\cos 45°, \text{sen}\, 45°) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

▶ Con el lenguaje del $\vec{u}_r$, la expresión matemática del campo $\vec{g}$ que M crea en P se escribe:



$$\boxed{\vec{g} = -G \frac{M}{d^2} \vec{u}_r}$$

Pepe Ródenas Borja

[ac; 18-III-2015]

Física (2º BACH)

2/2014'15

$\vec{u}_n = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

3/3

"Vectores y Campo Gravit."

2. EJERCICIOS BÁSICOS

* VECTORES:

si: $\vec{a} = (1, 0)$; $\vec{b} = (-3, 2)$;

$\vec{c} = (2, 1)$; $\vec{d} = (0, 0)$;

$\vec{e} = (-5, 2)$; $\vec{f} = (0, -2)$;

V.a Calcula: $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{c}$, $\vec{d} + \vec{f}$, $\vec{e} + \vec{f}$,

$\vec{a} - \vec{c}$, $\vec{f} - \vec{a}$, $\vec{e} - \vec{b}$, $\vec{e} - \vec{f}$.

V.b Calcula: $3\vec{a}$, $5\vec{c}$, $6\vec{d}$, $0'3\,\vec{e}$, $-4\vec{a}$,

$-5\vec{b}$, $-\vec{c}$, $-\vec{d}$, $-0'2\,\vec{b}$.

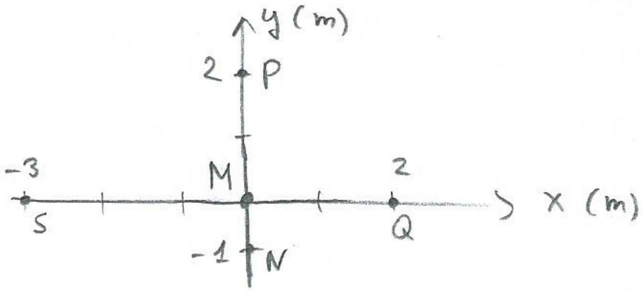
V.c Calcula: $5\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - 2\vec{b}$, $6\vec{f} - 2\vec{c}$,

$\vec{a} + \vec{b} - \vec{f}$, $0'5\,\vec{c} + 0'5\,\vec{e}$.

* CAMPO $\vec{g}$ (sin $\vec{u}_n$):

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot kg^{-2} \cdot m^2$

G.a Halla el campo creado en P, Q, N, S por la masa $M = 2$ kg



G.b Calcula la fuerza que siente en P, Q, N y S del ejercicio (a) una masa de $m = 0{,}5$ kg

G.c Ponemos una $M_1 = 1$ kg en P y otra $M_2 = 3$ kg en Q. ¿Cuánto vale $\vec{g}$ en (0,0)? ¿Qué fuerza siente en (0,0) una $m = 10$ kg?

⊛ CAMPO $\vec{g}$ CON $\vec{u}_r$: ⟵ HAZ UN ESQUEMA REPRESENTANDO LOS VECTORES QUE SE PIDEN EN CADA EJERCICIO !!

$\boxed{U.a}$ Escribe los cuatro vectores-brújula $\vec{u}(P)$, $\vec{u}(Q)$, $\vec{u}(N)$, $\vec{u}(S)$ que necesitaríamos para calcular el campo que M crea en los cuatro puntos del ejercicio $\boxed{G.a}$.

$\boxed{U.b}$ Calcula, usando los vectores brújula de $\boxed{U.a}$, el campo que crea $M = 3$ kg en P, Q, N y S. Después calcula la fuerza que siente en esos puntos una $m = 0,9$ kg.

$\boxed{U.c}$ Considera los puntos P, Q, N y S de $\boxed{G.a}$. Di cuál sería el $\vec{u}_r$ en los siguientes casos:

i) ponemos M en S y queremos calcular $\vec{g}$ en Q
ii) " " " Q " " " " " S
iii) " " " P " " " " " N
iv) " " " N " " " " " P

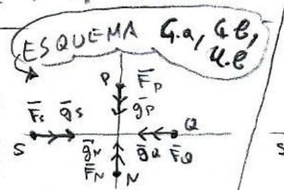
$\boxed{U.d}$ En (0,0) hay $M = 6$ kg. Calcula $\vec{g}$ en P(2,2), Q(2,-2), N(-2,2). Todas las distancias están expresadas en metros.

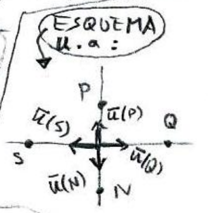
(3). SOLUCIONES. ⟶ NOTACIÓN con la base CANÓNICA: $\left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = (-2,5) = -2\vec{i} + 5\vec{j} \\ (v_x, v_y) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \end{array} \right\}$

V.a.- $(-2,2)$; $(3,1)$; $(0,-2)$; $(-5,0)$; [2º LÍNEA:] $\vec{a}-\vec{c} = (-1,-1)$; $(-1,-2)$; $(-2,0)$; $(-5,4)$.

V.b.- $(3,0)$; $(10,5)$; $(0,0)$; $(-1'5, 0'6)$; $(-4,0)$; [2º LÍNEA:] $-5\vec{b} = (15,-10)$; $(-2,-1)$; $(0,0)$; $(0'6, -0'4)$.

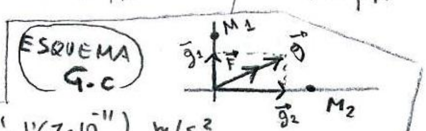
V.c.- $(2,2)$; $(7,-4)$; $(-4,-14)$; [2º LÍNEA] $\vec{a}+\vec{b}-\vec{g} = (-2,4)$; $(-1'5, 1'5)$.





G.a.- $\left\{ \begin{array}{l} \vec{g}_P = (0, -3'34\cdot10^{-11})\ m/s^2;\quad \vec{g}_Q = (-3'34\cdot10^{-11}, 0)\ m/s^2 \\ \vec{g}_N = (0, 1'33\cdot10^{-10})\ m/s^2;\quad \vec{g}_S = (1'48\cdot10^{-11}, 0)\ m/s^2 \end{array} \right\}$

G.b.- $\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_P = (0, -1'67\cdot10^{-11})\ N;\quad \vec{F}_Q = (-1'67\cdot10^{-11}, 0)\ N \\ \vec{F}_N = (0, 6'65\cdot10^{-11})\ N;\quad \vec{F}_S = (7'40\cdot10^{-12}, 0)\ N \end{array} \right\}$



G.c.- $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = (0, 1'67\cdot10^{-11}) + (5'00\cdot10^{-11}, 0) = (5'00\cdot10^{-11}, 1'67\cdot10^{-11})\ m/s^2$

$\Rightarrow \vec{F} = m\cdot\vec{g} = (5'00\cdot10^{-10}, 1'67\cdot10^{-10})\ N$

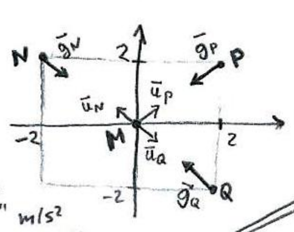
U.a.- $\vec{u}(P) = (0,1) = \vec{j}$; $\vec{u}(Q) = (1,0) = \vec{i}$; $\vec{u}(N) = -\vec{j}$; $\vec{u}(S) = -\vec{i}$.

U.b.- $\vec{g}_P = -G\frac{M}{d_P^2}\vec{u}(P) = -6,67\cdot10^{-11}\frac{3}{2^2}\vec{j} = (0, -5'00\cdot10^{-11})\ m/s^2 \Rightarrow \vec{F}_P = m\cdot\vec{g}_P = (0, -4'50\cdot10^{-11})\ N$

$\vec{g}_Q = -5,00\cdot10^{-11}\,\vec{i}\ m/s^2$; $\vec{g}_N = 2,00\cdot10^{-10}\,\vec{j}\ m/s^2$; $\vec{g}_S = 2,22\cdot10^{-11}\,\vec{i}\ m/s^2$

$\vec{F}_Q = -4,50\cdot10^{-11}\,\vec{i}\ N$; $\vec{F}_N = 1,80\cdot10^{-10}\,\vec{j}\ N$; $\vec{F}_S = 2,00\cdot10^{-11}\,\vec{i}\ N$.

U.c.- (i) S⟶ •Q $\vec{u}_r = \vec{i}$; (ii) S• ⟵•Q $\vec{u}_r = -\vec{i}$; (iii) P↓N $\vec{u}_r = -\vec{j}$; (iv) P↑N $\vec{u}_r = \vec{j}$.



U.d.- $\theta_P = 45°$, $\theta_N = 135°$, $\theta_Q = -45° \Rightarrow \vec{u}_P = (0'7, 0'7)$, $\vec{u}_N = (-0'7, 0'7)$, $\vec{u}_Q = (0'7, -0'7)$

$d_P = d_N = d_Q = \sqrt{2^2+2^2} = 2,8$ m; $\vec{g}_P = (-m, -m)$; $\vec{g}_N = (m, -m)$; $\vec{g}_Q = (-m, m)$, siendo: $m = 3,54\cdot10^{-11}\ m/s^2$