FÍSICA

Criterios específicos de corrección y calificación
PAU-Selectividad

En la asignatura de **FÍSICA** se presentan al estudiante dos opciones de examen que se denominan **OPCIÓN A** y **OPCIÓN B**, cada una de ellas está constituida por **4 ejercicios**. El estudiante **deberá escoger solamente una de las dos opciones** y realizar los ejercicios planteados en la misma. Los ejercicios pueden consistir en simples cuestiones o problemas con apartados. La puntuación de cada ejercicio o apartado aparecerá al final del mismo y puede variar dependiendo del grado de dificultad o del tiempo de resolución estimado.

La corrección y calificación tendrá en cuenta los siguientes criterios:

- La respuesta a cada ejercicio será calificada con la puntuación máxima (indicada al final del mismo) cuando la solución del estudiante esté correctamente planteada, el desarrollo bien justificado y al final se obtenga la solución correcta.

- Se valorará positivamente la realización de esquemas, diagramas y/o dibujos, así como el razonamiento detallado de los diferentes pasos.

- Es importante presentar los resultados con las unidades adecuadas.

- Es importante respetar la naturaleza vectorial o escalar de las magnitudes con las que se operan.

- Penalizará una mala presentación de las respuestas a los ejercicios.

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

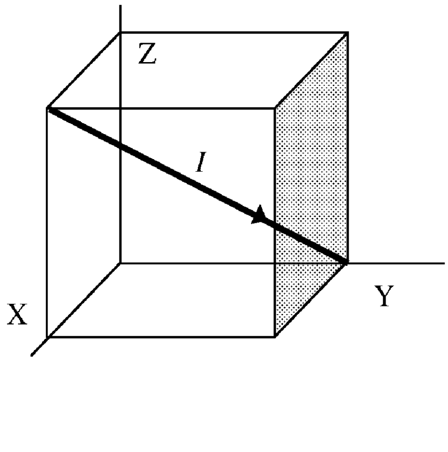
1. Se quiere poner un satélite en órbita circular alrededor de la Tierra. Para ello, se lanza desde la superficie de la Tierra con una velocidad de 5 km/s.

-Calcular la altura máxima alcanzada. **(1,5 puntos)**

-Cuando el satélite alcanza la altura máxima se le impulsa para que describa una órbita circular alrededor de la Tierra. Determinar la velocidad con la que se le debe impulsar para que tenga lugar el movimiento circular bajo la acción del campo gravitatorio terrestre. **(1,5 puntos)**

Datos: $R_T = 6370$ km. $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg. $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

2. Un segmento de alambre conductor por el que circula una corriente de intensidad I viene definido por la diagonal de un cubo imaginario de lado a, tal y como se muestra en la figura. Si se introduce en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\,\mathbf{k}$, encontrar el vector fuerza magnética ejercida por el campo sobre el segmento de hilo en función de los datos del enunciado. **(3 puntos)**



3. El ángulo límite de reflexión total para un rayo de luz monocromática que pasa de un determinado medio al aire es 42º. Calcular la velocidad de propagación de la luz en el medio. **(2 puntos)**
Datos: $n_{\text{aire}} = 1$. $c = 3\times10^{8}$ m/s.

4. Explicar muy brevemente la principal diferencia entre:
- Ondas transversales y ondas longitudinales. **(1 punto)**
- Ondas mecánicas y ondas electromagnéticas. **(1 punto)**

OPCIÓN B

1. En relatividad general, el horizonte de sucesos es una superficie imaginaria de forma esférica que rodea a un agujero negro, en la cual la velocidad de escape necesaria para alejarse del mismo coincide con la velocidad de la luz (3×10^{8} m/s). Por ello, ninguna cosa dentro de él, incluyendo los fotones (partículas que "componen" la luz), puede escapar debido a la atracción de un campo gravitatorio extremadamente intenso. Supongamos que en la etapa final de nuestro Sol, éste colapsa gravitatoriamente debido a la atracción gravitatoria provocada por su propia masa. Esto significa que su radio comienza a disminuir con el tiempo y su densidad aumenta. Sabiendo que la masa del Sol es aproximadamente de 2×10^{30} kg, calcular el radio máximo que debería tener el nuevo objeto (lo que podría identificarse con su horizonte de sucesos) para que pudiera considerarse como un agujero negro. **(2 puntos)**
Datos: $G = 6{,}67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

2. Un modelo muy simple de neutrón consiste en considerar a dicha partícula como una esfera de radio R_2 compuesta de dos partes. Por un lado tenemos un núcleo de radio R_1 $(R_1 < R_2)$ cargado positivamente con carga $+e$, rodeado por una corteza esférica de radio interno R_1 y radio externo R_2 con carga $-e$. En ambas partes la carga está distribuida uniformemente en el volumen que ocupa. Encuéntrese la magnitud y dirección del campo eléctrico creado por este "neutrón" para:
a) $0 < r \le R_1$ **(1 punto)**
b) $R_1 < r \le R_2$ **(1,5 puntos)**
c) $r > R_2$ **(0,5 puntos)**

3. Considérese un movimiento armónico simple de amplitud 5 cm, frecuencia 0,5 Hz y fase inicial π radianes (también denominada constante de fase).
- Obtener las ecuaciones de la posición x, la velocidad v y la aceleración a en función del tiempo. **(1 punto)**
- Representar gráficamente x, v y a en función de tiempo (no es necesario una representación exacta, basta simplemente con indicar los valores máximos y mínimos de cada función, los puntos de corte con los ejes y la forma de las funciones). **(1,5 puntos)**

4. Calcular la energía de enlace nuclear del ${}^{6}_{3}\mathrm{Li}$ sabiendo que la masa del núcleo es 6,01348 u. **(2,5 puntos)**
Datos: m_p = 1,00728 u, m_n = 1,00867 u, c^2 = 931,5 MeV/u.

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Se quiere poner un satélite en órbita circular alrededor de la Tierra. Para ello, se lanza desde la superficie de la Tierra con una velocidad de 5 km/s.

-Calcular la altura máxima alcanzada. **(1,5 puntos)**

-Cuando el satélite alcanza la altura máxima se le impulsa para que describa una órbita circular alrededor de la Tierra. Determinar la velocidad con la que se le debe impulsar para que tenga lugar el movimiento circular bajo la acción del campo gravitatorio terrestre. **(1,5 puntos)**

Datos: $R_T = 6370$ km. $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg. $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

<u>Solución</u>

Primero debemos averiguar cuál es la altura máxima alcanzada. Si elegimos el origen de energía potencial ($U = 0$) cuando $r = \infty$, la expresión de la energía potencial en función de la altura es

$$U = -G\frac{M_T m}{r}.$$

Por lo tanto, igualando energías en la superficie de la Tierra y en la altura máxima tenemos que:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = -G\frac{M_T m}{r},$$

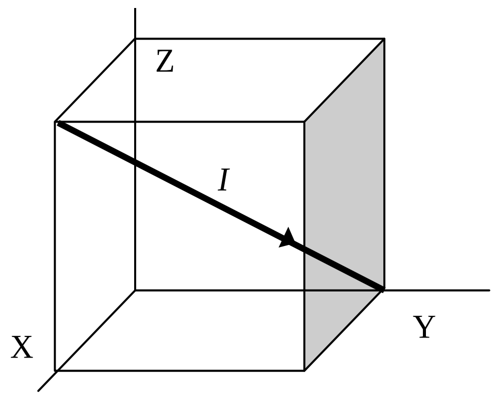
de donde despejamos la altura máxima $r = 7959$ km.

Una vez que el satélite está a la altura *r*, para que describa una órbita circular alrededor de la Tierra a esa distancia se debe cumplir:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{M_T m}{r^2},$$

de donde obtenemos la velocidad que debe tener en esa órbita $v = 7,079$ km/s.

2. Un segmento de alambre conductor por el que circula una corriente de intensidad I viene definido por la diagonal de un cubo imaginario de lado a, tal y como se muestra en la figura. Si se introduce en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\,\mathbf{k}$, encontrar el vector fuerza magnética ejercida por el campo sobre el segmento de hilo en función de los datos del enunciado. **(3 puntos)**



Solución

El vector que define el segmento diagonal es $(-a, a, -a)$, de módulo $a\sqrt{3}$. La fuerza magnética sobre éste es

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{L} \times \mathbf{B})$$

$$\vec{l} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a & a & -a \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = Ba(\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

Finalmente obtenemos

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{L} \times \mathbf{B}) = IBa(\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

3. El ángulo límite de reflexión total para un rayo de luz monocromática que pasa de un determinado medio al aire es 42º. Calcular la velocidad de propagación de la luz en el medio. **(2 puntos)**

Datos: $n_{\text{aire}} = 1$. $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Solución

La ley de la refracción establece que

$$n_i \sin\theta_i = n_r \sin\theta_r$$

o en términos de velocidad de propagación

$$\frac{\sin\theta_i}{v_i} = \frac{\sin\theta_r}{v_r}$$

En el caso de la reflexión total tenemos que $\theta_r = 90º$, así que despejando

$$v_i = v_{aire} \sin\theta_i^* = 2,007 \times 10^8 \text{ m/s}$$

4. Explicar muy brevemente la principal diferencia entre:
- Ondas transversales y ondas longitudinales. (**1 punto)**
- Ondas mecánicas y ondas electromagnéticas. (**1 punto)**

Solución

En las ondas transversales la perturbación que se propaga es perpendicular a la dirección de propagación, mientras que en las ondas longitudinales la perturbación tiene la misma dirección.

Para la propagación de las ondas mecánicas es necesario un medio material, mientras que en el caso de las ondas electromagnéticas no es necesario, estas se propagan en el vacío.

OPCIÓN B

1. En relatividad general, el horizonte de sucesos es una superficie imaginaria de forma esférica que rodea a un agujero negro, en la cual la velocidad de escape necesaria para alejarse del mismo coincide con la velocidad de la luz (3×10^8 m/s). Por ello, ninguna cosa dentro de él, incluyendo los fotones (partículas que "componen" la luz), puede escapar debido a la atracción de un campo gravitatorio extremadamente intenso. Supongamos que en la etapa final de nuestro Sol, éste colapsa gravitatoriamente debido a la atracción gravitatoria provocada por su propia masa. Esto significa que su radio comienza a disminuir con el tiempo y su densidad aumenta. Sabiendo que la masa del Sol es aproximadamente de 2×10^{30} kg, calcular el radio máximo que debería tener el nuevo objeto (lo que podría identificarse con su horizonte de sucesos) para que pudiera considerarse como un agujero negro. **(2 puntos)**

Datos: $G = 6,67\times10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.

Solución:

La velocidad de escape de un campo gravitatorio creado por una masa M, a una distancia R de la misma, tiene la forma:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}\ ,$$

En nuestro caso, para calcular el horizonte de sucesos tenemos que considerar que esa partícula es un fotón que se mueve a la velocidad de la luz c. Así pues tenemos:

$$c = \sqrt{\frac{2GM_{Sol}}{R}}\ .$$

Despejando obtenemos el radio de nuestra estrella convertida en agujero negro:

$$R \approx 3\ \mathrm{km}$$

2. Un modelo muy simple de neutrón consiste en considerar a dicha partícula como una esfera de radio R_2 compuesta de dos partes. Por un lado tenemos un núcleo de radio R_1 $(R_1 < R_2)$ cargado positivamente con carga $+e$, rodeado por una corteza esférica de radio interno R_1 y radio externo R_2 con carga $-e$. En ambas partes la carga está distribuida uniformemente en el volumen que ocupa. Encuéntrese la magnitud y dirección del campo eléctrico creado por este "neutrón" para:

a) $0 < r \le R_1$ **(1 punto)**

b) $R_1 < r \le R_2$ **(1,5 puntos)**

c) $r > R_2$ **(0,5 puntos)**

Solución

Este problema se resuelve de forma muy sencilla aplicando el teorema de Gauss

$$\phi = \oint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA = 4\pi k Q_{\text{interior}}\ ,$$

y considerando superficies esféricas concéntricas de radio r, ya que en este caso tenemos

$$\mathbf{E}(r) = \frac{kQ_{\text{interior}}(r)}{r^2}\,\hat{\mathbf{n}}$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario normal a la superficie de la esfera considerada apuntando hacia afuera (también considerado como vector radial) .

a) Cuando $0 < r \le R_1$ tenemos que

$$Q_{\text{interior}}(r) = V(r) \times \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} = \frac{r^3}{R_1^3} e$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{ke}{R_1^3} r\ \hat{\mathbf{n}}$$

b) Cuando $R_1 < r \le R_2$ tenemos que

$$Q_{\text{interior}}(r) = e - \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_1^3\right)\frac{e}{\frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)} = e\left(1 - \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\right)$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{ke}{r^2}\left(\frac{R_2^3 - r^3}{R_2^3 - R_1^3}\right)\ \hat{\mathbf{n}}$$

c) Cuando $r > R_2$ tenemos que

$$Q_{\text{interior}}(r) = e - e = 0$$
$$\mathbf{E}(r) = 0\ \hat{\mathbf{n}}$$

3. Considérese un movimiento armónico simple de amplitud 5 cm, frecuencia 0,5 Hz y fase inicial π radianes (también denominada constante de fase).

- Obtener las ecuaciones de la posición *x*, la velocidad *v* y la aceleración *a* en función del tiempo. **(1 punto)**
- Representar gráficamente *x*, *v* y *a* en función de tiempo (no es necesario una representación exacta, basta simplemente con indicar los valores máximos y mínimos de cada función, los puntos de corte con los ejes y la forma de las funciones). **(1,5 puntos)**

<u>Solución</u>

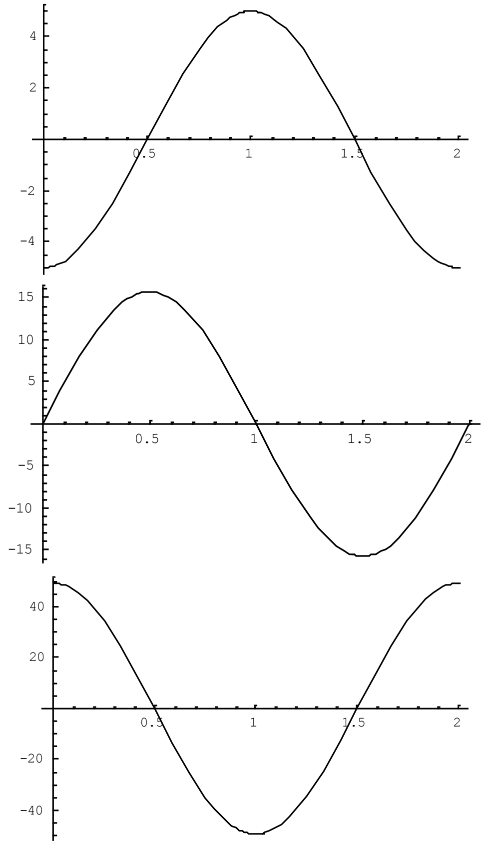
La solución general de la ecuación del movimiento armónico simple es

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$
$$v = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$$
$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta)$$

En nuestro caso tenemos que la frecuencia angular es $\omega = \pi$ rad/s y las ecuaciones del movimiento tendrán la forma:

$$x = 5\cos(\pi t + \pi)\ \text{cm}$$
$$v = -15{,}7\sin(\pi t + \pi)\ \text{cm/s}$$
$$a = -49{,}3\cos(\pi t + \pi)\ \text{cm/s}^2$$

Se trata de funciones sinusoidales de periodo $T = 2$ s.



4. Calcular la energía de enlace nuclear del ${}^{6}_{3}\mathrm{Li}$ sabiendo que la masa del núcleo es 6,01348 u. **(2,5 puntos)**

Datos: m_p = 1,00728 u, m_n = 1,00867 u, c^2 = 931,5 MeV/u.

Solución

La energía liberada es obtenida a partir del defecto másico:

$$E = -\Delta m \times c^2 = \left(3 \times m_p + 3 \times m_n - m_{\mathrm{Li}}\right) c^2 = 32,02 \text{ MeV}$$

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Para poner un satélite en órbita circular alrededor de la Tierra se lanza desde su superficie con una velocidad de 7 km/s.
-Calcular la altura máxima alcanzada. **(1,5 puntos)**
-Cuando el satélite alcanza la altura máxima se le impulsa para que describa una órbita circular alrededor de la Tierra. Determinar la velocidad con la que se le debe impulsar para que tenga lugar el movimiento circular bajo la acción del campo gravitatorio terrestre. **(1,5 puntos)**
Datos: $R_T = 6370$ km. $M_T = 5,98\times10^{24}$ kg. $G = 6,67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

2. Tenemos un tubo que podemos considerar infinitamente largo, cuya sección tiene 2 cm de radio interior y 3 cm de radio exterior. En el tubo se distribuye uniformemente una carga de $3\ \mu\text{C}$ por metro lineal de tubo (densidad lineal de carga $\lambda = 3\ \mu\text{C m}^{-1}$).
Datos: $k = 9\times10^9\ \text{Nm}^2\text{C}^{-2}$.
- ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto situado a 1 cm del eje del tubo? **(1 punto)**
- ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto situado a 10 cm del eje del tubo? **(1,5 puntos)**

3. Un objeto oscila en el eje X con un movimiento armónico simple de frecuencia angular 8,0 rad/s alrededor de su posición de equilibrio ($x = 0$ cm). Sabiendo que en el instante inicial el objeto se encuentra en $x = 4$ cm con una velocidad v = -25 cm/s, obtener la ecuación completa de la posición en función del tiempo. **(2,5 puntos)**

4. Un cuerpo tiene una masa de $6{,}63\times10^{-6}$ g y se mueve a una velocidad de 10^{-6} m/s. La longitud de onda de De Broglie asociada a esta partícula es:
a) menor que el tamaño de los núcleos atómicos.
b) mayor que el tamaño de los núcleos atómicos.
c) aproximadamente igual.
Escoger la opción correcta y justificar la elección sabiendo que el radio de un núcleo atómico es del orden de 10^{-15} m. **(2 puntos)**
Datos: $h = 6{,}63\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s} = 4{,}14\times10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s}$.

OPCIÓN B

1. Un proyectil es lanzado verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de 20 km/s. Explicar razonadamente qué sucederá con el proyectil y calcular el estado final de su movimiento despreciando la interacción con otros astros. **(2,5 puntos)**
Datos: $G = 6{,}67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2. $R_T = 6370$ km. $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg.

2. En una misma región del espacio coexisten un campo eléctrico uniforme de módulo $0{,}5\times10^{4}$ V/m y un campo magnético uniforme de valor 0,3 T, siendo sus direcciones perpendiculares entre sí. ¿Cuál debería ser la energía cinética de un protón que penetra en esa región con dirección perpendicular a ambos campos para que pase a través de la misma sin ser desviado? **(2 puntos)**
Datos: $m_p = 1{,}7\times10^{-27}$ kg

3. Supongamos que hacemos oscilar verticalmente el extremo izquierdo (origen de coordenadas) de una cuerda tensa, situada horizontalmente, realizando un movimiento armónico simple de frecuencia 10 Hz y amplitud 5 cm. En el instante inicial ($t = 0$) el desplazamiento vertical del extremo que oscila es nulo y se mueve hacia abajo. Obtener la ecuación de la onda armónica transversal generada y la velocidad de propagación, sabiendo que la distancia entre dos picos consecutivos es de 20 cm. **(2,5 puntos)**

4. Responder a las siguientes cuestiones sobre física nuclear:

- Explicar razonadamente por qué a medida que aumenta el número atómico en átomos estables, aumenta la fracción entre el número de neutrones y el número de protones. **(1 punto)**

- Complétese los números atómicos y másicos de los elementos que intervienen en la siguiente secuencia de desintegraciones radiactivas. Los elementos están representados mediante la pareja $\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix}$. Recordamos que en la desintegración β^- se emiten electrones. **(2 puntos)**

$$\begin{pmatrix} 227 \\ 89 \end{pmatrix} \xrightarrow{\beta^-} \ldots \xrightarrow{\alpha} \ldots \xrightarrow{\alpha} \ldots \xrightarrow{\gamma} \ldots \xrightarrow{\alpha} \ldots$$

$$\xrightarrow{\alpha} \ldots \xrightarrow{\beta^-} \ldots \xrightarrow{\alpha} \ldots \xrightarrow{\gamma} \ldots \xrightarrow{\beta^-} \begin{pmatrix} 207 \\ 82 \end{pmatrix}$$

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Para poner un satélite en órbita circular alrededor de la Tierra se lanza desde su superficie con una velocidad de 7 km/s.

-Calcular la altura máxima alcanzada. **(1,5 puntos)**

-Cuando el satélite alcanza la altura máxima se le impulsa para que describa una órbita circular alrededor de la Tierra. Determinar la velocidad con la que se le debe impulsar para que tenga lugar el movimiento circular bajo la acción del campo gravitatorio terrestre. **(1,5 puntos)**

Datos: $R_{\mathrm{T}} = 6370$ km. $M_{\mathrm{T}} = 5,98 \times 10^{24}$ kg. $G = 6,67 \times 10^{-11}$ $\mathrm{Nm^2/kg^2}$.

Solución

Primero debemos averiguar cuál es la altura máxima alcanzada. Si elegimos el origen de energía potencial ($U = 0$) cuando $r = \infty$, la expresión de la energía potencial en función de la altura es

$$U = -G\frac{M_T m}{r}.$$

Por lo tanto, igualando energías en la superficie de la Tierra y en la altura máxima tenemos que:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = -G\frac{M_T m}{r},$$

de donde despejamos la altura máxima $r = 10464$ km.

Una vez que el satélite está a la altura *r*, para que describa una órbita circular alrededor de la Tierra a esa distancia se debe cumplir:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{M_T m}{r^2},$$

de donde obtenemos la velocidad que debe tener en esa órbita $v = 6{,}174$ km/s.

2. Tenemos un tubo que podemos considerar infinitamente largo, cuya sección tiene 2 cm de radio interior y 3 cm de radio exterior. En el tubo se distribuye uniformemente una carga de 3 μC por metro lineal de tubo (densidad lineal de carga $\lambda = 3\ \mu\text{C m}^{-1}$).

Datos: $k = 9\times10^9\ \text{Nm}^2\text{C}^{-2}$.

- ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto situado a 1 cm del eje del tubo? **(1 punto)**
- ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto situado a 10 cm del eje del tubo? **(1,5 puntos)**

Solución

Podemos calcular el campo eléctrico de forma muy sencilla aplicando el teorema de Gauss

$$\phi = \oint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA = 4\pi k Q_{\text{interior}},$$

y considerando superficies cilíndricas de radio r y longitud L coaxiales con el tubo. Como consecuencia de la simetría del problema, el campo será perpendicular a la dirección del tubo y su módulo dependerá exclusivamente de la distancia radial r del punto de observación al eje del tubo. Como el campo será perpendicular al vector superficie de las dos bases de la superficie cilíndrica considerada, sólo la superficie lateral, de área $A = 2\pi r L$, contribuirá al flujo, por lo que obtenemos

$$\mathbf{E}(r) = \frac{2kQ_{\text{interior}}}{Lr}\,\hat{\mathbf{n}}$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario normal a la dirección del tubo en el punto considerado.

En el interior de un cilindro de radio 1 cm la carga encerrada es nula, por lo que

$$\mathbf{E}(1\ \text{cm}) = 0\ \hat{\mathbf{n}}$$

Si consideramos un cilindro de radio 10 cm, la carga encerrada será

$$Q_{\text{interior}} = \lambda L,$$

de modo que obtenemos

$$\mathbf{E}(r) = \frac{2k\lambda}{r}\hat{\mathbf{n}} = 5{,}4\times10^5\,\hat{\mathbf{n}}\ \ \text{N/C}$$

3. Un objeto oscila en el eje X con un movimiento armónico simple de frecuencia angular 8,0 rad/s alrededor de su posición de equilibrio ($x = 0$ cm). Sabiendo que en el instante inicial el objeto se encuentra en $x = 4$ cm con una velocidad v = -25 cm/s, obtener la ecuación completa de la posición en función del tiempo. **(2,5 puntos)**

Solución

La solución general de la ecuación del movimiento armónico simple es

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$

En nuestro caso tenemos ω = 8,0 rad/s. Sustituimos las condiciones iniciales

$$x(0) = 4 = A\cos(\delta) \text{ cm}$$
$$v(0) = -25 = -8A\sin(\delta) \text{ cm/s}$$

Si dividimos ambas ecuaciones y despejamos obtenemos la fase

$$\frac{v(0)}{x(0)} = \frac{-25}{4} = -8\tan(\delta) \quad \rightarrow \quad \delta = \arctan\left(\frac{25}{32}\right) = 0{,}663 \text{ rad}$$

Ahora podemos calcular la amplitud

$$x(0) = 4 = A\cos(\delta) \text{ cm} \quad \rightarrow \quad A = \frac{4}{\cos\delta} = 5{,}08 \text{ cm}$$

por lo que la ecuación del movimiento será

$$x = 5{,}08\cos(8t + 0{,}663) \text{ cm}$$

4. Un cuerpo tiene una masa de $6{,}63\times10^{-6}$ g y se mueve a una velocidad de 10^{-6} m/s. La longitud de onda de De Broglie asociada a esta partícula es:

a) menor que el tamaño de los núcleos atómicos.

b) mayor que el tamaño de los núcleos atómicos.

c) aproximadamente igual.

Escoger la opción correcta y justificar la elección sabiendo que el radio de un núcleo atómico es del orden de 10^{-15} m. **(2 puntos)**

Datos: $h = 6{,}63\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s} = 4{,}14\times10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s}$.

<u>Solución</u>

Todas las partículas que viajan con un momento lineal p tienen asociada una onda cuya longitud de onda viene determinada por la longitud de onda de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = 10^{-19}\,\text{m}.$$

OPCIÓN B

1. Un proyectil es lanzado verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de 20 km/s. Explicar razonadamente qué sucederá con el proyectil y calcular el estado final de su movimiento despreciando la interacción con otros astros. **(2,5 puntos)**

Datos: $G = 6,67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2. $R_\mathrm{T} = 6370$ km. $M_\mathrm{T} = 5,98\times10^{24}$ kg.

<u>Solución</u>

La velocidad de escape del campo gravitatorio terrestre desde la superficie de la Tierra es

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11,2 \text{ km/s}$$

Como la velocidad inicial es mayor, el proyectil escapará del campo terrestre y se alejará indefinidamente siguiendo una trayectoria rectilínea dada por la dirección inicial del lanzamiento. Su movimiento será decelerado tendiendo a una velocidad límite constante (ya que no actúan más fuerzas sobre el proyectil). Aplicando conservación de la energía mecánica podemos obtener la velocidad límite:

$$E_{c,i} + U_i = E_{c,f} + U_f$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_Tm}{R_T} = \frac{1}{2}mv_f^2 + 0$$

Despejando se obtiene $v_f = \sqrt{v_0^2 - \dfrac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{v_0^2 - v_e^2} = 16,57$ km/s

2. En una misma región del espacio coexisten un campo eléctrico uniforme de módulo $0,5\times10^4$ V/m y un campo magnético uniforme de valor 0,3 T, siendo sus direcciones perpendiculares entre sí. ¿Cuál debería ser la energía cinética de un protón que penetra en esa región con dirección perpendicular a ambos campos para que pase a través de la misma sin ser desviado? **(2 puntos)**

Datos: $m_p = 1,7\times10^{-27}$ kg

<u>Solución</u>

Cuando el protón penetra dentro de esta región se verá sometido a las fuerzas producidas por los dos campos. Al ser *v* perpendicular a ambos campos, ambas fuerzas tendrán la misma dirección. Para que la carga no se desvíe las dos fuerzas deberán tener sentidos opuestos y mismo módulo. Igualando módulos

$$F_e = F_m \quad \rightarrow \quad qE = qvB$$

obtenemos que el módulo de la velocidad debe ser:

$$v = \frac{E}{B} = 1,67\times10^4 \text{ m/s}$$

y su energia cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 2,36\times10^{-19} \text{ J}$$

3. Supongamos que hacemos oscilar verticalmente el extremo izquierdo (origen de coordenadas) de una cuerda tensa, situada horizontalmente, realizando un movimiento armónico simple de frecuencia 10 Hz y amplitud 5 cm. En el instante inicial ($t = 0$) el desplazamiento vertical del extremo que oscila es nulo y se mueve hacia abajo. Obtener la ecuación de la onda armónica transversal generada y la velocidad de propagación, sabiendo que la distancia entre dos picos consecutivos es de 20 cm. (**2,5 puntos)**

<u>Solución</u>

La ecuación general de una función de onda armónica que se propaga en el sentido positivo del eje X es

$$y(x,t) = A\text{sen}(kx - \omega t + \delta)\ .$$

Ahora debemos calcular cada magnitud a partir de los datos del enunciado:

$$A = 0{,}05 \text{ m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}2} = 31{,}4 \text{ rad/m}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 10 = 62{,}8 \text{ rad/s}$$

δ=0 rad (porque se mueve hacia abajo, velocidad negativa)

por lo que la función de onda será

$$y(x,t) = 0{,}05 \text{ sen}(31{,}4x - 62{,}8t) \text{ m}\ .$$

La velocidad de propagación será

$$v = \lambda f = 2 \text{ m/s}\ .$$

4. Responder a las siguientes cuestiones sobre física nuclear:

- Explicar razonadamente por qué a medida que aumenta el número atómico en átomos estables, aumenta la fracción entre el número de neutrones y el número de protones. **(1 punto)**

<u>Solución</u>

La relación entre el número de protones y el de neutrones es clave para la estabilidad del núcleo. A medida que los átomos son más pesados (Z aumenta), es necesario un mayor número de neutrones para conseguir que las fuerzas atractivas hadrónicas compensen las fuerzas de repulsión eléctrica entre los protones, y de esa forma conseguir que el núcleo sea estable.

- Complétese los números atómicos y másicos de los elementos que intervienen en la siguiente secuencia de desintegraciones radiactivas. Los elementos están representados mediante la pareja $\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix}$. Recordamos que en la desintegración β^- se emiten electrones. **(2 puntos)**

$$\binom{227}{89} \xrightarrow{\beta^-} \ldots \xrightarrow{\alpha} \ldots \xrightarrow{\alpha} \ldots \xrightarrow{\gamma} \ldots \xrightarrow{\alpha} \ldots$$

$$\xrightarrow{\alpha} \ldots \xrightarrow{\beta^-} \ldots \xrightarrow{\alpha} \ldots \xrightarrow{\gamma} \ldots \xrightarrow{\beta^-} \binom{207}{82}$$

Solución

Debemos tener en cuenta que:

$$\text{Desintegración } \alpha: \quad \binom{A}{Z} \to \binom{A-4}{Z-2}$$

$$\text{Desintegración } \beta^-: \quad \binom{A}{Z} \to \binom{A}{Z+1}$$

$$\text{Desintegración } \gamma: \quad \binom{A}{Z} \to \binom{A}{Z}$$

$$\binom{227}{89} \xrightarrow{\beta^-} \binom{227}{90} \xrightarrow{\alpha} \binom{223}{88} \xrightarrow{\alpha} \binom{219}{86} \xrightarrow{\gamma} \binom{219}{86} \xrightarrow{\alpha} \binom{215}{84}$$

$$\xrightarrow{\alpha} \binom{211}{82} \xrightarrow{\beta^-} \binom{211}{83} \xrightarrow{\alpha} \binom{207}{81} \xrightarrow{\gamma} \binom{207}{81} \xrightarrow{\beta^-} \binom{207}{82}$$

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Se quiere poner un satélite en órbita circular alrededor de la Tierra a una distancia de 10000 km de su centro. Calcular la velocidad con la que debemos lanzarlo desde la superficie de la Tierra para que la altura máxima coincida con el radio de la órbita. **(2 puntos)**

Datos: $R_T = 6370$ km. $M_T = 5,98\times10^{24}$ kg. $G = 6,67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

2. Un modelo muy simple de neutrón consiste en considerar a dicha partícula como una esfera de radio R_2 compuesta de dos partes. Por un lado tenemos un núcleo de radio R_1 $(R_1 < R_2)$ cargado positivamente con carga $+e$, rodeado por una corteza esférica de radio interno R_1 y radio externo R_2 con carga $-e$. En ambas partes la carga está distribuida uniformemente en el volumen que ocupa. Encuéntrese la magnitud y dirección del campo eléctrico creado por este "neutrón" para:

a) $0 < r \le R_1$ **(1 punto)**

b) $R_1 < r \le R_2$ **(1,5 puntos)**

c) $r > R_2$ **(0,5 puntos)**

3. Tenemos una fuente de luz roja de longitud de onda λ=700 nm en el aire. Sabiendo que el ángulo límite de reflexión total de esa luz cuando pasa de un determinado medio al aire es 42º, calcular la longitud de onda de esa luz cuando se propaga en el medio. **(2,5 puntos)**

Datos: $n_{\text{aire}} = 1$. $c = 3\times10^8$ m/s.

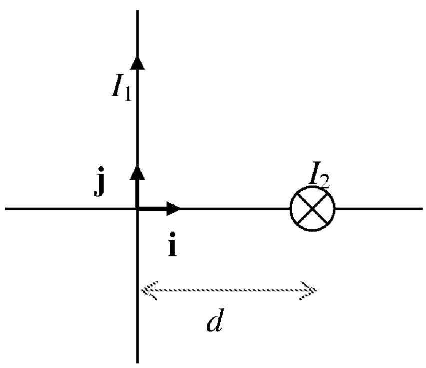
4. Supongamos que hacemos oscilar verticalmente el extremo izquierdo (origen de coordenadas) de una cuerda tensa, situada horizontalmente, realizando un movimiento armónico de amplitud 10 cm y 10 oscilaciones por segundo. En el instante inicial ($t = 0$) el desplazamiento vertical del extremo que oscila es máximo. Obtener la ecuación de la onda armónica transversal generada sabiendo que en 5 s la onda recorre una distancia de 10 m. **(2,5 puntos)**

OPCIÓN B

1. El radio de la órbita terrestre alrededor del Sol es de $1{,}46\times10^{11}$ m y el de Urano es de $2{,}87\times10^{12}$ m. Aplicar la tercera Ley de Kepler para calcular el período de la órbita de Urano. **(2 puntos)**

2. Dos conductores rectilíneos infinitamente largos están situados en planos perpendiculares tal y como se muestra en la figura. La dirección del conductor 1 coincide con el eje Y, y por él circula una corriente en el sentido positivo de intensidad I_1. La corriente que circula por el conductor 2 es I_2 y tiene la dirección del eje Z y sentido negativo (entrando en el papel), cortando al eje X a una distancia d del origen. Calcular el vector inducción magnética en el punto $(d/2,0,0)$ en función de los datos del enunciado. **(2,5 puntos)**

Datos: El módulo del campo magnético producido por un conductor rectilíneo infinitamente largo por el que circula una corriente *I*, a una distancia *r* perpendicular al mismo es $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$.



3. Tenemos dos masas idénticas de 1 kg. Cada una se encuentra sujeta a un muelle fijo que descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Los muelles son iguales y de constante $k = 100$ N/m . Un muelle se estira 10 cm y el otro 5 cm. Si se dejan en libertad al mismo tiempo ($t = 0$ s)

- ¿Cuál de las dos masas pasará primero por la posición de equilibrio? Razonar la respuesta. **(1 punto)**
- Representar en la misma gráfica la posición de ambos objetos en función del tiempo (no es necesario una representación exacta, basta simplemente con indicar los valores máximos y mínimos de cada función, los puntos de corte con los ejes y la forma de las funciones) **(2 puntos)**

4. Calcular la energía liberada en la reacción de fusión de cuatro núcleos de hidrógeno para formar un núcleo de helio:

$$4\,{}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + 2e^{+},$$

sabiendo que la masa del núcleo ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ es 4,0015 u, la masa del núcleo ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$ es 1,0073 u y la masa del positrón e^{+} es $5{,}49\times10^{-4}$ u. **(2,5 puntos)**

Datos: $c^2 = 931{,}5$ MeV / u .

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Se quiere poner un satélite en órbita circular alrededor de la Tierra a una distancia de 10000 km de su centro. Calcular la velocidad con la que debemos lanzarlo desde la superficie de la Tierra para que la altura máxima coincida con el radio de la órbita. **(2 puntos)**

Datos: $R_T = 6370$ km. $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg. $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

<u>Solución</u>

Si elegimos el origen de energía potencial ($U = 0$) cuando $r = \infty$, la expresión de la energía potencial en función de la altura es

$$U = -G\frac{M_T m}{r}.$$

Si aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica podemos igualar la energía del satélite en la superficie de la Tierra y en la altura máxima:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = -G\frac{M_T m}{R}.$$

de donde despejamos la velocidad inicial del lanzamiento $v = 6,74$ km/s.

2. Un modelo muy simple de neutrón consiste en considerar a dicha partícula como una esfera de radio R_2 compuesta de dos partes. Por un lado tenemos un núcleo de radio R_1 $(R_1 < R_2)$ cargado positivamente con carga $+e$, rodeado por una corteza esférica de radio interno R_1 y radio externo R_2 con carga $-e$. En ambas partes la carga está distribuida

uniformemente en el volumen que ocupa. Encuéntrese la magnitud y dirección del campo eléctrico creado por este "neutrón" para:

a) $0 < r \le R_1$ **(1 punto)**

b) $R_1 < r \le R_2$ **(1,5 puntos)**

c) $r > R_2$ **(0,5 puntos)**

Solución

Este problema se resuelve de forma muy sencilla aplicando el teorema de Gauss

$$\phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = 4\pi k Q_{\text{interior}},$$

y considerando superficies esféricas concéntricas de radio r, ya que en este caso tenemos

$$\mathbf{E}(r) = \frac{kQ_{\text{interior}}(r)}{r^2}\,\hat{\mathbf{n}}$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario normal a la superficie de la esfera considerada apuntando hacia afuera (también considerado como vector radial) .

a) Cuando $0 < r \le R_1$ tenemos que

$$Q_{\text{interior}}(r) = V(r) \times \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} = \frac{r^3}{R_1^3} e$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{ke}{R_1^3} r\ \hat{\mathbf{n}}$$

b) Cuando $R_1 < r \le R_2$ tenemos que

$$Q_{\text{interior}}(r) = e - \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_1^3\right)\frac{e}{\frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)} = e\left(1 - \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\right)$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{ke}{r^2}\left(\frac{R_2^3 - r^3}{R_2^3 - R_1^3}\right)\hat{\mathbf{n}}$$

c) Cuando $r > R_2$ tenemos que

$$Q_{\text{interior}}(r) = e - e = 0$$

$$\mathbf{E}(r) = 0\ \hat{\mathbf{n}}$$

3. Tenemos una fuente de luz roja de longitud de onda λ=700 nm en el aire. Sabiendo que el ángulo límite de reflexión total de esa luz cuando pasa de un determinado medio al aire es 42º, calcular la longitud de onda de esa luz cuando se propaga en el medio. **(2,5 puntos)**

Datos: $n_{\text{aire}} = 1$. $c = 3\times10^8$ m/s.

Solución

Necesitamos calcular la velocidad de propagación de la luz en el medio o bien el índice de refracción del medio. La ley de la refracción de Snell en términos de la velocidad de propagación es

$$\frac{\sin\theta_i}{v_i} = \frac{\sin\theta_r}{v_r}$$

En el caso de la reflexión total tenemos que $\theta_r = 90°$, así que despejando

$$v_i = v_{aire} \sin\theta_i^* = 2{,}01\times 10^8 \text{ m/s} .$$

La longitud de onda de la luz en el medio será

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{c / v_i} = 334{,}6 \text{ nm}$$

Resolviendo el problema en términos del índice de refracción tenemos

$$n_i \sin\theta_i = n_r \sin\theta_r$$

y

$$n_i = \frac{1}{\sin\theta_i^*} = 1{,}495$$

La longitud de onda de la luz en el medio será

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n_i} = 334{,}6 \text{ nm}$$

4. Supongamos que hacemos oscilar verticalmente el extremo izquierdo (origen de coordenadas) de una cuerda tensa, situada horizontalmente, realizando un movimiento armónico de amplitud 10 cm y 10 oscilaciones por segundo. En el instante inicial ($t = 0$) el desplazamiento vertical del extremo que oscila es máximo. Obtener la ecuación de la onda armónica transversal generada sabiendo que en 5 s la onda recorre una distancia de 10 m. **(2,5 puntos)**

Solución

La ecuación general de una función de onda armónica que se propaga en el sentido positivo del eje X es

$$y(x,t) = A\text{sen}(kx - \omega t + \delta) .$$

Ahora debemos calcular cada magnitud a partir de los datos del enunciado:

$$A = 0{,}1 \text{ m}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 10 = 62{,}8 \text{ rad/s}$$

$$\delta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Para calcular el número de onda k necesitamos la longitud de onda, dato que podemos calcular a partir de la velocidad de la onda

$$v = \frac{s}{t} = \frac{10}{5} = 2 \text{ m/s}$$

Como $v = \lambda f$ tenemos que

$$\lambda = \frac{v}{f} = 0{,}2 \text{ m} \quad \rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}2} = 31{,}4 \text{ rad/m}$$

por lo que la función de onda será

$$y(x,t) = 0{,}1 \text{ sen}(31{,}4x - 62{,}8t + \frac{\pi}{2}) \text{ m} .$$

OPCIÓN B

1. El radio de la órbita terrestre alrededor del Sol es de $1,46\times10^{11}$ m y el de Urano es de $2,87\times10^{12}$ m. Aplicar la tercera Ley de Kepler para calcular el período de la órbita de Urano. **(2 puntos)**

<u>Solución</u>

La Tercera Ley de Kepler se formula de la siguiente forma

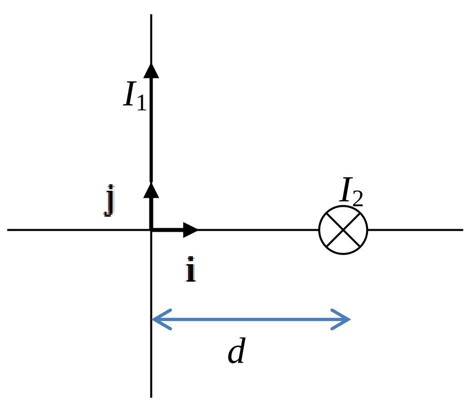
$$T^2 \propto R^3 .$$

Entonces tenemos

$$T_{Urano} = T_{Tierra}\sqrt{\frac{R^3_{Urano}}{R^3_{Tierra}}} = 87,16 \text{ años}$$

2. Dos conductores rectilíneos infinitamente largos están situados en planos perpendiculares tal y como se muestra en la figura. La dirección del conductor 1 coincide con el eje Y, y por él circula una corriente en el sentido positivo de intensidad I_1. La corriente que circula por el conductor 2 es I_2 y tiene la dirección del eje Z y sentido negativo (entrando en el papel), cortando al eje X a una distancia d del origen. Calcular el vector inducción magnética en el punto $(d/2, 0, 0)$ en función de los datos del enunciado. **(2,5 puntos)**

Datos: El módulo del campo magnético producido por un conductor rectilíneo infinitamente largo por el que circula una corriente I, a una distancia r perpendicular al mismo es $B = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I}{r}$.



<u>Solución</u>

El campo magnético en el punto $(d/2, 0, 0)$ producido por el conductor 1 vale:

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_0 I_1}{\pi d}\mathbf{k} ,$$

donde hemos aplicado la regla de la mano derecha para obtener la dirección y sentido.

Para el conductor 2 tenemos

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{\pi d}\,\mathbf{j}$$

El campo magnético resultante será

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{\pi d}\left(-I_1\mathbf{k} + I_2\mathbf{j}\right)$$

3. Tenemos dos masas idénticas de 1 kg. Cada una se encuentra sujeta a un muelle fijo que descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Los muelles son iguales y de constante $k = 100$ N/m. Un muelle se estira 10 cm y el otro 5 cm. Si se dejan en libertad al mismo tiempo ($t = 0$ s)

- ¿Cuál de las dos masas pasará primero por la posición de equilibrio? Razonar la respuesta. **(1 punto)**

- Representar en la misma gráfica la posición de ambos objetos en función del tiempo (no es necesario una representación exacta, basta simplemente con indicar los valores máximos y mínimos de cada función, los puntos de corte con los ejes y la forma de las funciones) **(2 puntos)**

Solución

El periodo de la oscilación sólo depende de k y de m, pero no de la amplitud de la oscilación, por lo que los periodos serán iguales y los objetos tardarán el mismo tiempo en pasar por la posición de equilibrio. El primer objeto tiene que recorrer una distancia doble pero también tiene una velocidad media doble.

De las condiciones del enunciado está claro que las masas realizarán un movimiento armónico simple, cuya ecuación de movimiento es

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

con $\omega = 2\pi / T$. En nuestro caso tenemos que

$$\omega = \sqrt{k/m} = 10 \text{ rad/s}$$

en ambos casos y fase inicial

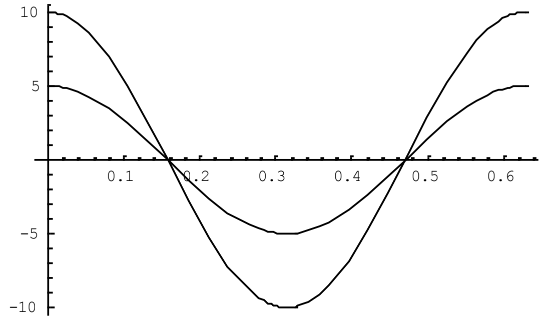
$$\delta = 0$$

ya que $x(0) = A$. Por consiguiente, las funciones a representar serán

$$x_1 = 10\cos(10t) \text{ cm}$$

$$x_2 = 5\cos(10t) \text{ cm}$$

ambas con el mismo periodo $T = \pi/5 = 0,63$ s. Serán dos funciones sinusoidales con el mismo periodo pero distinta amplitud.



4. Calcular la energía liberada en la reacción de fusión de cuatro núcleos de hidrógeno para formar un núcleo de helio:

$$4\,{}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + 2e^{+},$$

sabiendo que la masa del núcleo ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ es 4,0015 u, la masa del núcleo ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$ es 1,0073 u y la masa del positrón e^{+} es 5,49×10^{-4} u. **(2,5 puntos)**

Datos: $c^2 = 931{,}5\ \mathrm{MeV/u}$.

Solución

$$Q = -\Delta m \times c^2 = (m_i - m_f)c^2 = \left(4m_p - m_{{}^{4}_{2}\mathrm{He}} - 2m_{e^{+}}\right)c^2 = 24{,}7\ \mathrm{MeV}$$

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

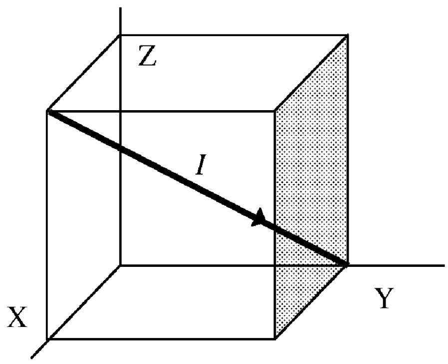
En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Queremos poner un satélite en una órbita circular alrededor de la Tierra con radio 8000 km. Calcular la velocidad con la que debemos lanzarlo desde la superficie de la Tierra para que la altura máxima coincida con el radio de la órbita. **(2 puntos)**
Datos: $R_T = 6370$ km. $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg. $G = 6{,}67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

2. Un segmento de alambre conductor por el que circula una corriente de intensidad I viene definido por la diagonal de un cubo imaginario de lado a, tal y como se muestra en la figura. Si se introduce en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\,\mathbf{k}$, encontrar el vector fuerza magnética ejercida por el campo sobre el segmento de hilo en función de los datos del enunciado. **(3 puntos)**



3. Supongamos que tensamos una cuerda de masa 200 g y longitud 40 cm sujetando el extremo izquierdo y tirando del extremo derecho con una fuerza de 2 N. Ahora hacemos oscilar verticalmente el extremo izquierdo (origen de coordenadas) con un movimiento armónico simple de periodo 0,1 s y amplitud 5 cm. En el instante inicial ($t = 0$) el desplazamiento vertical del extremo que oscila es nulo moviéndose hacia abajo. Obtener la ecuación de la onda armónica transversal generada. (**2,5 puntos)**
Datos: La velocidad v de una onda en una cuerda de densidad de masa lineal μ (masa por unidad de longitud) sometida a una tensión F es $v = \sqrt{F / \mu}$.

4. Calcular la energía de enlace nuclear del ${}^{6}_{3}\mathrm{Li}$ sabiendo que la masa del núcleo es 6,01348 u. **(2,5 puntos)**
Datos: m_p = 1,00728 u, m_n = 1,00867 u, c^2 = 931,5 MeV/u.

OPCIÓN B

1. Según la tercera Ley de Kepler, el cuadrado del periodo orbital de un planeta es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica o distancia media. Suponiendo que estamos tratando de órbitas circulares, calcular el factor de proporcionalidad entre el cuadrado del periodo T^2 y el cubo del radio de la órbita R^3 para los planetas del sistema solar que orbitan alrededor del Sol. **(2 puntos)**

2. Tenemos un tubo que podemos considerar infinitamente largo, cuya sección tiene 2 cm de radio interior y 3 cm de radio exterior. En el tubo se distribuye uniformemente una carga de $3\ \mu\mathrm{C}$ por metro lineal de tubo (densidad lineal de carga $\lambda = 3\ \mu\mathrm{C\ m^{-1}}$).
Datos: $k = 9 \times 10^9\ \mathrm{Nm^2C^{-2}}$.
- ¿Calcular la densidad volumétrica de carga del tubo (carga por unidad de volumen)? **(1 punto)**
- ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto situado a 2,5 cm del eje del tubo? **(2 puntos)**

3. Una masa oscila con un movimiento armónico simple en la dirección del eje X alrededor de su posición de equilibrio ($x = 0$ cm) con un periodo de 10 s. Sabiendo que en el instante inicial el objeto se encuentra en $x = 1\,\mathrm{cm}$ con una velocidad v= -15 cm/s, obtener la ecuación completa de la posición en función del tiempo. **(2,5 puntos)**

4. La radiación de frenado o Bremsstrahlung es la radiación electromagnética producida por la deceleración de una partícula cargada. En los tubos de los televisores antiguos los electrones son acelerados desde la fuente hasta la pantalla mediante una diferencia de potencial de 1000 V. Al llegar a la pantalla frenan bruscamente. Si suponemos que toda la energía que tenían es emitida durante el frenado en forma de Bremsstrahlung, calcular la frecuencia de la radiación de frenado de los electrones. **(2,5 puntos)**

Datos: $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s} = 4{,}14 \times 10^{-15}\ \mathrm{eV \cdot s}$; $e = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$; $\mathrm{eV} = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$.

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Queremos poner un satélite en una órbita circular alrededor de la Tierra con radio 8000 km. Calcular la velocidad con la que debemos lanzarlo desde la superficie de la Tierra para que la altura máxima coincida con el radio de la órbita. **(2 puntos)**

Datos: $R_{\mathrm{T}} = 6370$ km. $M_{\mathrm{T}} = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg. $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $\mathrm{Nm^2/kg^2}$.

Solución

Si elegimos el origen de energía potencial $(U = 0)$ cuando $r = \infty$, la expresión de la energía potencial en función de la altura es

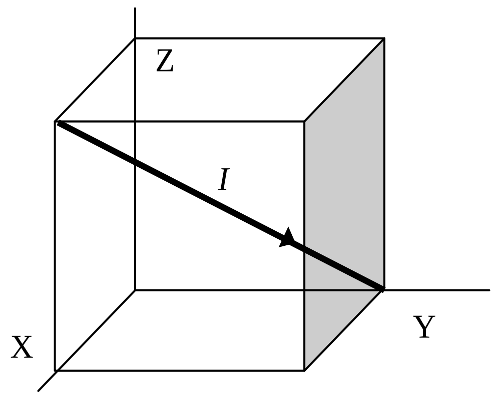
$$U = -G\frac{M_T m}{r}.$$

Si aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica podemos igualar la energía del satélite en la superficie de la Tierra y en la altura máxima:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = -G\frac{M_T m}{R}.$$

de donde despejamos la velocidad inicial del lanzamiento $v = 5{,}05$ km/s.

2. Un segmento de alambre conductor por el que circula una corriente de intensidad I viene definido por la diagonal de un cubo imaginario de lado a, tal y como se muestra en la figura. Si se introduce en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\,\mathbf{k}$, encontrar el vector fuerza magnética ejercida por el campo sobre el segmento de hilo en función de los datos del enunciado. **(3 puntos)**



Solución

El vector que define el segmento diagonal es $(-a, a, -a)$, de módulo $a\sqrt{3}$. La fuerza magnética sobre éste es

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{L} \times \mathbf{B})$$

$$\vec{l} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a & a & -a \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = Ba(\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

Finalmente obtenemos

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{L} \times \mathbf{B}) = IBa(\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

3. Supongamos que tensamos una cuerda de masa 200 g y longitud 40 cm sujetando el extremo izquierdo y tirando del extremo derecho con una fuerza de 2 N. Ahora hacemos oscilar verticalmente el extremo izquierdo (origen de coordenadas) con un movimiento armónico simple de periodo 0,1 s y amplitud 5 cm. En el instante inicial ($t = 0$) el desplazamiento vertical del extremo que oscila es nulo moviéndose hacia abajo. Obtener la ecuación de la onda armónica transversal generada. (**2,5 puntos)**

Datos: La velocidad v de una onda en una cuerda de densidad de masa lineal μ (masa por unidad de longitud) sometida a una tensión F es $v = \sqrt{F/\mu}$.

Solución

La ecuación general de una función de onda armónica que se propaga en el sentido positivo del eje X es

$$y(x,t) = A\text{sen}(kx - \omega t + \delta).$$

Ahora debemos calcular cada magnitud a partir de los datos del enunciado:

$A = 0{,}05$ m

$\omega = 2\pi / T = 2\pi / 0{,}1 = 62{,}8$ rad/s

δ=0 rad (porque se mueve hacia abajo, velocidad negativa)

Para calcular el número de onda k necesitamos la longitud de onda, dato que podemos calcular a partir de la velocidad de la onda

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{LF}{m}}=2\text{ m/s}$$

Como $v=\lambda f$ tenemos que

$$\lambda=\frac{v}{f}=0{,}2\text{ m}\quad\rightarrow\quad k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{0{,}2}=31{,}4\text{ rad/m}$$

por lo que la función de onda será

$$y(x,t)=0{,}05\text{ sen}(31{,}4x-62{,}8t)\text{ m}.$$

4. Calcular la energía de enlace nuclear del ${}^{6}_{3}\text{Li}$ sabiendo que la masa del núcleo es 6,01348 u. **(2,5 puntos)**

Datos: m_p = 1,00728 u, m_n = 1,00867 u, c^2 = 931,5 MeV/u.

Solución

La energía liberada es obtenida a partir del defecto másico:

$$E=-\Delta m\times c^2=\left(3\times m_p+3\times m_n-m_{\text{Li}}\right)c^2=32{,}02\text{ MeV}$$

OPCIÓN B

1. Según la tercera Ley de Kepler, el cuadrado del periodo orbital de un planeta es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica o distancia media. Suponiendo que estamos tratando de órbitas circulares, calcular el factor de proporcionalidad entre el cuadrado del periodo T^2 y el cubo del radio de la órbita R^3 para los planetas del sistema solar que orbitan alrededor del Sol. **(2 puntos)**

Solución

Como la fuerza de atracción gravitatoria del Sol es la responsable del movimiento orbital de los planetas del sistema solar podemos escribir:

$$G\frac{mM_S}{R^2} = m\omega^2 R = m\frac{4\pi^2}{T^2}R \quad \rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S}R^3$$

de modo que el factor de proporcionalidad será $\dfrac{4\pi^2}{GM_S}$.

2. Tenemos un tubo que podemos considerar infinitamente largo, cuya sección tiene 2 cm de radio interior y 3 cm de radio exterior. En el tubo se distribuye uniformemente una carga de $3\ \mu\text{C}$ por metro lineal de tubo (densidad lineal de carga $\lambda = 3\ \mu\text{C m}^{-1}$).

Datos: $k = 9\times10^9\ \text{Nm}^2\text{C}^{-2}$.

- ¿Calcular la densidad volumétrica de carga del tubo (carga por unidad de volumen)? **(1 punto)**
- ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto situado a 2,5 cm del eje del tubo? **(2 puntos)**

Solución

En 1 m de tubo tenemos una carga total de $3\ \mu\text{C}$. El volumen del tubo con esa longitud será

$$V = \pi\left(R_2^2 - R_1^2\right) = 1,57\times10^{-3}\text{m}^3,$$

por lo que la densidad de carga volumétrica será:

$$\rho = \frac{q}{V} = 1,91\times10^{-3}\ \text{C/m}^3.$$

Podemos calcular el campo eléctrico de forma muy sencilla aplicando el teorema de Gauss

$$\phi = \oint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA = 4\pi k Q_{\text{interior}},$$

y considerando superficies cilíndricas de radio r y longitud L coaxiales con el tubo. Como consecuencia de la simetría del problema, el campo será perpendicular a la dirección del tubo y su módulo dependerá exclusivamente de la distancia radial r del punto de observación al eje del tubo. Como el campo será perpendicular al vector superficie de las dos bases de la superficie cilíndrica considerada, sólo la superficie lateral, de área $A = 2\pi r L$, contribuirá al flujo, por lo que obtenemos

$$\mathbf{E}(r) = \frac{2kQ_{\text{interior}}}{Lr}\hat{\mathbf{n}}$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario normal a la dirección del tubo en el punto considerado.
Si consideramos un cilindro de radio 2,5 cm, la carga encerrada estará comprendida entre el radio interior R_1 de 2 cm y el radio r del cilindro 2,5 cm:

$$Q_{\text{interior}} = \rho V = \rho\pi\left(r^2 - R_1^2\right)L\,,$$

de modo que obtenemos

$$\mathbf{E}(r) = \frac{2k\rho\pi\left(r^2 - R_1^2\right)}{r}\hat{\mathbf{n}} = 9,72\times10^5\hat{\mathbf{n}}\ \text{ N/C}$$

3. Una masa oscila con un movimiento armónico simple en la dirección del eje X alrededor de su posición de equilibrio ($x = 0$ cm) con un periodo de 10 s. Sabiendo que en el instante inicial el objeto se encuentra en $x = 1$ cm con una velocidad v= -15 cm/s, obtener la ecuación completa de la posición en función del tiempo. **(2,5 puntos)**

Solución

La solución general de la ecuación del movimiento armónico simple es

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$

En nuestro caso tenemos $\omega = 2\pi/10$ rad/s. Sustituimos las condiciones iniciales

$$x(0) = 1 = A\cos(\delta)\ \text{cm}$$

$$v(0) = -15 = -\frac{2\pi}{10}A\sin(\delta)\ \text{cm/s}$$

Si dividimos ambas ecuaciones y despejamos obtenemos la fase

$$\frac{v(0)}{x(0)} = \frac{-15}{1} = -\frac{2\pi}{10}\tan(\delta) \quad\rightarrow\quad \delta = \arctan\left(\frac{150}{2\pi}\right) = 1,53\ \text{rad}$$

Ahora podemos calcular la amplitud

$$x(0) = 1 = A\cos(\delta)\ \text{cm} \quad\rightarrow\quad A = \frac{1}{\cos\delta} = 23,89\ \text{cm}$$

por lo que la ecuación del movimiento será

$$x = 23,89\cos\left(\frac{2\pi}{10}t + 1,53\right)\ \text{cm}$$

4. La radiación de frenado o Bremsstrahlung es la radiación electromagnética producida por la deceleración de una partícula cargada. En los tubos de los televisores antiguos los electrones son acelerados desde la fuente hasta la pantalla mediante una diferencia de potencial de 1000 V. Al llegar a la pantalla frenan bruscamente. Si suponemos que toda la energía que tenían es emitida durante el frenado en forma de Bremsstrahlung, calcular la frecuencia de la radiación de frenado de los electrones. **(2,5 puntos)**

Datos: $h = 6,63\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s} = 4,14\times10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s}$; $e = 1,60\times10^{-19}$ C; $\text{eV} = 1,60\times10^{-19}$ J .

Solución

Un electrón atravesando una diferencia de potencial de 1000 V adquiere una energía de

$$\Delta E_c = -\Delta U = -q\Delta V = 1000 \text{ eV}$$

Según la ley de Planck, la energía de los fotones emitidos será

$$E = h\nu \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{\Delta E_c}{h} = 2,4 \times 10^{17} \text{ Hz}$$

Esta frecuencia corresponde a los rayos X de baja frecuencia.

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Se quiere poner un satélite en una órbita circular estacionaria alrededor de la Tierra bajo la acción de su campo gravitatorio con un periodo de 2 horas.
-Calcular el radio de la órbita. **(1,5 puntos)**
-Calcular la velocidad con la que debemos lanzarlo desde la superficie de la Tierra para que la altura máxima coincida con el radio de la órbita. **(1,5 puntos)**
Datos: $R_T = 6370$ km. $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg. $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

2. En una misma región del espacio coexisten un campo eléctrico uniforme de módulo $0,5 \times 10^4$ V/m y un campo magnético uniforme de valor 0,3 T, siendo sus direcciones perpendiculares entre sí. ¿Cuál debería ser la energía cinética de un protón que penetra en esa región con dirección perpendicular a ambos campos para que pase a través de la misma sin ser desviado? **(2 puntos)**
Datos: $m_p = 1,7 \times 10^{-27}$ kg

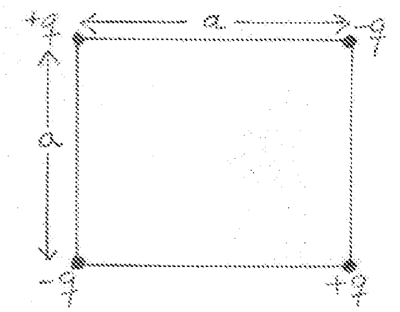
3. Considérese un movimiento armónico simple de amplitud 10 cm, frecuencia 0,25 Hz y fase inicial $\pi / 2$ radianes (también denominada constante de fase).
- Obtener las ecuaciones de la posición x, la velocidad v y la aceleración a en función del tiempo. **(1 punto)**
- Representar gráficamente x, v y a en función de tiempo (no es necesario una representación exacta, basta simplemente con indicar los valores máximos y mínimos de cada función, los puntos de corte con los ejes y la forma de las funciones). **(1,5 puntos)**

4. La radiación de frenado o Bremsstrahlung es la radiación electromagnética producida por la deceleración de una partícula cargada. En los tubos de los televisores antiguos los electrones son acelerados desde la fuente hasta la pantalla mediante una diferencia de potencial de 1000 V. Al llegar a la pantalla frenan bruscamente. Si suponemos que toda la energía que tenían es emitida durante el frenado en forma de Bremsstrahlung, calcular la frecuencia de la radiación de frenado de los electrones. **(2,5 puntos)**
Datos: $h = 6{,}63\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s} = 4{,}14\times10^{-15}\ \mathrm{eV\cdot s}$; $e = 1{,}60\times10^{-19}\ \mathrm{C}$; $\mathrm{eV} = 1{,}60\times10^{-19}\ \mathrm{J}$.

OPCIÓN B

1. Supongamos que sólo conocemos el radio de la Tierra ($R_T = 6370\ \mathrm{km}$), la distancia Tierra-Luna ($r = 60R_T$) y el valor de la gravedad en la superficie terrestre ($g_0 = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$), calcular la velocidad de la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra en función de estas magnitudes. **(2,5 puntos)**

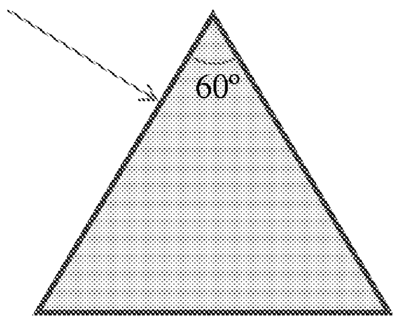
2. Tomando como origen de energía potencial la configuración en la que las cargas se encuentran infinitamente alejadas entre sí, determínese el trabajo mínimo necesario para deshacer el cuadrupolo eléctrico de lado a que se muestra en la figura, de modo que las cargas queden separadas por distancias infinitas entre sí. **(2,5 puntos)**



3. Explicar muy brevemente la principal diferencia entre:
- Ondas transversales y ondas longitudinales. (**1 punto**)
- Ondas mecánicas y ondas electromagnéticas. (**1 punto**)

4. Un rayo de luz monocromática incide desde el aire perpendicularmente sobre la superficie lateral de un prisma triangular con índice de refracción 1,1 (ver figura).
- Hacer un esquema con la trayectoria del rayo y calcular el ángulo de refracción con el que el rayo sale del prisma de nuevo al aire. **(2 puntos)**
- Calcular la desviación del rayo, al salir del prisma, respecto a la dirección inicial. **(1 punto)**

Datos: $n_{\text{aire}} = 1$.



NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Se quiere poner un satélite en una órbita circular estacionaria alrededor de la Tierra bajo la acción de su campo gravitatorio con un periodo de 2 horas.

-Calcular el radio de la órbita. **(1,5 puntos)**

-Calcular la velocidad con la que debemos lanzarlo desde la superficie de la Tierra para que la altura máxima coincida con el radio de la órbita. **(1,5 puntos)**

Datos: $R_T = 6370$ km. $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg. $G = 6{,}67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Solución

Como la fuerza de atracción gravitatoria es la responsable del movimiento orbital podemos escribir:

$$G\frac{mM_T}{R^2} = m\omega^2 R = m\frac{4\pi^2}{T^2}R \quad \rightarrow \quad R = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 8061\text{ km}$$

Ahora podemos calcular la velocidad de lanzamiento a partir del principio de conservación de la energía mecánica. Si elegimos el origen de energía potencial ($U = 0$) cuando $r = \infty$, la expresión de la energía potencial en función de la altura es

$$U = -G\frac{M_T m}{r}.$$

Igualando la energía del satélite en la superficie de la Tierra y en la altura máxima tenemos:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = -G\frac{M_T m}{R}.$$

de donde despejamos la velocidad inicial del lanzamiento $v = 5{,}13$ km/s.

2. En una misma región del espacio coexisten un campo eléctrico uniforme de módulo $0{,}5\times10^4$ V/m y un campo magnético uniforme de valor 0,3 T, siendo sus direcciones perpendiculares entre sí. ¿Cuál debería ser la energía cinética de un protón que penetra en esa región con dirección perpendicular a ambos campos para que pase a través de la misma sin ser desviado? **(2 puntos)**

Datos: $m_p = 1{,}7\times10^{-27}$ kg

<u>Solución</u>

Cuando el protón penetra dentro de esta región se verá sometido a las fuerzas producidas por los dos campos. Al ser v perpendicular a ambos campos, ambas fuerzas tendrán la misma dirección. Para que la carga no se desvíe las dos fuerzas deberán tener sentidos opuestos y mismo módulo. Igualando módulos

$$F_e = F_m \quad \rightarrow \quad qE = qvB$$

obtenemos que el módulo de la velocidad debe ser:

$$v = \frac{E}{B} = 1{,}67\times10^4 \text{ m/s}$$

y su energia cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 2{,}36\times10^{-19} \text{ J}$$

3. Considérese un movimiento armónico simple de amplitud 10 cm, frecuencia 0,25 Hz y fase inicial $\pi/2$ radianes (también denominada constante de fase).

- Obtener las ecuaciones de la posición x, la velocidad v y la aceleración a en función del tiempo. **(1 punto)**
- Representar gráficamente x, v y a en función de tiempo (no es necesario una representación exacta, basta simplemente con indicar los valores máximos y mínimos de cada función, los puntos de corte con los ejes y la forma de las funciones). **(1,5 puntos)**

<u>Solución</u>

La solución general de la ecuación del movimiento armónico simple es

$$x = A\cos(\omega t+\delta)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t+\delta)$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t+\delta)$$

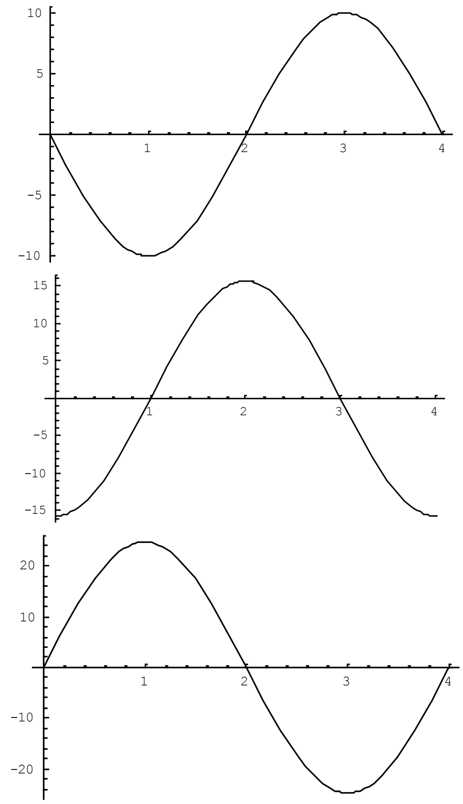
En nuestro caso tenemos que la frecuencia angular es $\omega = \pi/2$ rad/s y las ecuaciones del movimiento tendrán la forma:

$$x = 10\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}$$

$$v = -15{,}7\sin\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{2}\right) \text{ cm/s}$$

$$a = -24{,}7\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{2}\right) \text{ cm/s}^2$$

Se trata de funciones sinusoidales de periodo $T = 4$ s.



4. La radiación de frenado o Bremsstrahlung es la radiación electromagnética producida por la deceleración de una partícula cargada. En los tubos de los televisores antiguos los electrones son acelerados desde la fuente hasta la pantalla mediante una diferencia de potencial de 1000 V. Al llegar a la pantalla frenan bruscamente. Si suponemos que toda la energía que tenían es emitida durante el frenado en forma de Bremsstrahlung, calcular la frecuencia de la radiación de frenado de los electrones. **(2,5 puntos)**

Datos: $h = 6,63 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} = 4,14 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s}$; $e = 1,60 \times 10^{-19}\ \text{C}$; $\text{eV} = 1,60 \times 10^{-19}\ \text{J}$.

Solución

Un electrón atravesando una diferencia de potencial de 1000 V adquiere una energía de

$$\Delta E_c = -\Delta U = -q\Delta V = 1000\ \text{eV}$$

Según la ley de Planck, la energía de los fotones emitidos será

$$E = h\nu \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{\Delta E_c}{h} = 2,4 \times 10^{17}\ \text{Hz}$$

Esta frecuencia corresponde a los rayos X de baja frecuencia.

OPCIÓN B

1. Supongamos que sólo conocemos el radio de la Tierra ($R_T = 6370$ km), la distancia Tierra-Luna ($r = 60R_T$) y el valor de la gravedad en la superficie terrestre ($g_0 = 9{,}81$ m/s^2), calcular la velocidad de la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra en función de estas magnitudes. **(2,5 puntos)**

Solución

Sabiendo que la fuerza de atracción gravitatoria de la Tierra es la responsable del movimiento orbital de la luna tenemos que:

$$G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{GM_T}{r}.$$

Ahora necesitamos calcular el término GM_T, para lo cual podemos utilizar el dato de la gravedad en la superficie terrestre:

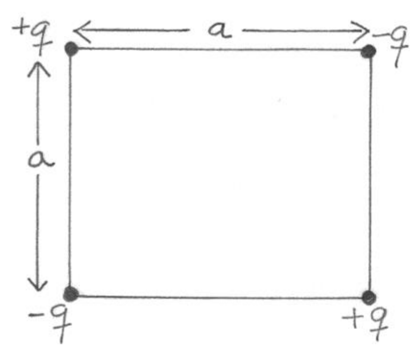
$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^{\ 2}} \quad \rightarrow \quad GM_T = g_0 R_T^{\ 2}.$$

Sustituyendo en la ecuación de arriba llegamos a:

$$v^2 = \frac{g_0 R_T^{\ 2}}{r} = \frac{g_0 R_T}{60} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{g_0 R_T}{60}} = 1{,}02 \text{ km/s}$$

2. Tomando como origen de energía potencial la configuración en la que las cargas se encuentran infinitamente alejadas entre sí, determínese el trabajo mínimo necesario para deshacer el cuadrupolo eléctrico de lado a que se muestra en la figura, de modo que las cargas queden separadas por distancias infinitas entre sí. **(2,5 puntos)**

Solución



Solución

Para deshacer esta configuración podemos ir separando carga a carga. Si comenzamos por la carga situada en la esquina superior de la izquierda, tenemos que el trabajo necesario para alejarla es igual a la variación de su energía potencial

$$W_1 = \Delta U = U_f - U_i = 0 - kq\left(\frac{-q}{a} + \frac{q}{a\sqrt{2}} + \frac{-q}{a}\right) = kq^2\,\frac{2\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}} \text{ J}.$$

Ahora separamos la carga de la esquina superior derecha

$$W_2 = \Delta U = U_f - U_i = 0 + qk\left(\frac{-q}{a\sqrt{2}} + \frac{q}{a}\right) = kq^2\,\frac{\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}} \text{ J}.$$

Finalmente, alejamos la carga en la esquina inferior izquierda

$$W_2 = \Delta U = U_f - U_i = 0 + qk\left(\frac{q}{a}\right) = \frac{kq^2}{a} \text{ J}.$$

El trabajo total será la suma de los trabajos:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = kq^2\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}} + \frac{1}{a}\right) = \frac{kq^2}{a}\left(4-\sqrt{2}\right) = 2,6\,\frac{kq^2}{a} \text{ J}$$

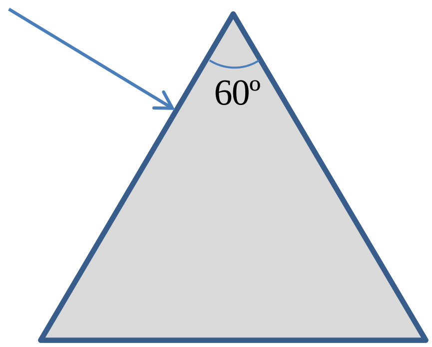
3. Explicar muy brevemente la principal diferencia entre:
- Ondas transversales y ondas longitudinales. (**1 punto)**
- Ondas mecánicas y ondas electromagnéticas. (**1 punto)**

Solución

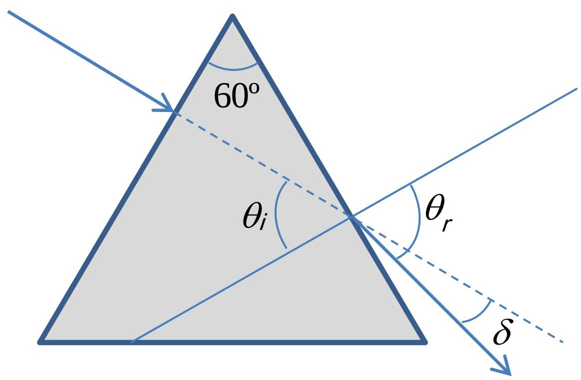
En las ondas transversales la perturbación que se propaga es perpendicular a la dirección de propagación, mientras que en las ondas longitudinales la perturbación tiene la misma dirección.
Para la propagación de las ondas mecánicas es necesario un medio material, mientras que en el caso de las ondas electromagnéticas no es necesario, estas se propagan en el vacío.

4. Un rayo de luz monocromática incide desde el aire perpendicularmente sobre la superficie lateral de un prisma triangular con índice de refracción 1,1 (ver figura).
- Hacer un esquema con la trayectoria del rayo y calcular el ángulo de refracción con el que el rayo sale del prisma de nuevo al aire. **(2 puntos)**
- Calcular la desviación del rayo, al salir del prisma, respecto a la dirección inicial. **(1 punto)**

Datos: $n_{\text{aire}} = 1$.



Solución



Si la luz incide perpendicularmente sobre la superficie de separación de los dos medios, seguirá propagándose en la misma dirección. Por la geometría del problema tenemos que el ángulo de incidencia en la cara derecha del prisma es $\theta_i = 60º$. Aplicando la ley de la refracción tenemos

$$n_i \sin\theta_i = n_r \sin\theta_r$$

Despejando

$$\theta_r = \arcsin\left(\sin\theta_i \frac{n_{prisma}}{n_{aire}}\right) = 72,3º$$

La desviación del rayo con respecto a la dirección inicial será

$$\delta = \theta_r - 60º = 12,3º$$

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Queremos poner un satélite en una órbita circular estacionaria alrededor de la Tierra bajo la acción de su campo gravitatorio con un periodo de 4 horas.

-Calcular el radio de la órbita. **(1,5 puntos)**

-Calcular la velocidad con la que debemos lanzarlo desde la superficie de la Tierra para que la altura máxima coincida con el radio de la órbita. **(1,5 puntos)**

Datos: $R_T = 6370$ km. $M_T = 5,98\times10^{24}$ kg. $G = 6,67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

2. Se disponen 4 cargas puntuales en los vértices de un cuadrado centrado en el origen: una carga q en el punto $(-1,1)$, una carga $2q$ en $(1,1)$, una carga $-3q$ en $(+1,-1)$ y otra de $6q$ en $(-1,-1)$. Calcular el campo eléctrico en el origen. **(2,5 puntos)**

3. Calcular la velocidad de propagación de un rayo de luz monocromática en un determinado medio sabiendo que el ángulo límite de reflexión total cuando la luz pasa del medio al aire es de 30º. **(2 puntos)**

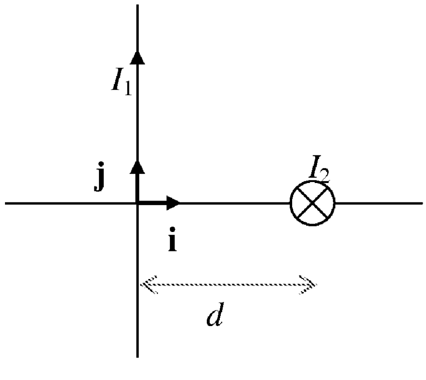
Datos: $n_{aire} = 1$. $c = 3\times10^8$ m/s.

4. El extremo izquierdo (origen de coordenadas) de una cuerda oscila con un movimiento armónico simple de amplitud 20 cm. La cuerda, de masa 400 g y longitud 80 cm, se haya en tensión al tirar del otro extremo un fuerza de 2 N. En el instante inicial ($t = 0$) el desplazamiento vertical del extremo que oscila es nulo y se mueve hacia abajo. Sabiendo que la distancia entre dos puntos consecutivos que oscilan en fase es de 20 cm, obtener la ecuación de la onda armónica transversal generada. (**2,5 puntos**)
Datos: La velocidad v de una onda en una cuerda de densidad de masa lineal μ (masa por unidad de longitud) sometida a una tensión F es $v = \sqrt{F / \mu}$.

OPCIÓN B

1. Según la tercera Ley de Kepler, el cuadrado del periodo orbital de un planeta es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica o distancia media. Suponiendo que estamos tratando de órbitas circulares, calcular el factor de proporcionalidad entre el cuadrado del periodo T^2 y el cubo del radio de la órbita R^3 para los planetas del sistema solar que orbitan alrededor del Sol. **(2 puntos)**

2. Dos conductores rectilíneos infinitamente largos están situados en planos perpendiculares tal y como se muestra en la figura. La dirección del conductor 1 coincide con el eje Y, y por él circula una corriente en el sentido positivo de intensidad I_1. La corriente que circula por el conductor 2 es I_2 y tiene la dirección del eje Z y sentido negativo (entrando en el papel), cortando al eje X a una distancia d del origen. Calcular el vector inducción magnética en el punto $(d, d, 0)$ en función de los datos del enunciado. **(2,5 puntos)**
Datos: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2. El módulo del campo magnético producido por un conductor rectilíneo infinitamente largo por el que circula una corriente I, a una distancia r perpendicular al mismo es $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$.



3. Tenemos dos masas idénticas de 1 kg. Cada una se encuentra sujeta a un muelle fijo que descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Los muelles son iguales y de constante $k = 100$ N/m . Un muelle se estira 10 cm y el otro 5 cm. Si se dejan en libertad al mismo tiempo ($t = 0$ s), representar en la misma gráfica la posición de ambos objetos en función del tiempo (no es necesario una representación exacta, basta simplemente con indicar los valores máximos y mínimos de cada función, los puntos de corte con los ejes y la forma de las funciones) **(2,5 puntos)**

4. Responder a las siguientes cuestiones sobre física nuclear:

- Explicar razonadamente por qué la inestabilidad de los núcleos aumenta, de forma general, con el número atómico. **(1 punto)**

- Complétese los números atómicos y másicos de los elementos que intervienen en la siguiente secuencia de desintegraciones radiactivas. Los elementos están representados mediante la pareja $\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix}$. Recordamos que en la desintegración β^- se emiten electrones. **(2 puntos)**

$$\begin{pmatrix} 222 \\ 86 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \ldots \xrightarrow{\gamma} \ldots \xrightarrow{\alpha} \ldots \xrightarrow{\gamma} \ldots \xrightarrow{\beta^-} \ldots$$

$$\xrightarrow{\beta^-} \ldots \xrightarrow{\alpha} \ldots \xrightarrow{\beta^-} \ldots \xrightarrow{\beta^-} \ldots \xrightarrow{\alpha} \begin{pmatrix} 206 \\ 82 \end{pmatrix}$$

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Queremos poner un satélite en una órbita circular estacionaria alrededor de la Tierra bajo la acción de su campo gravitatorio con un periodo de 4 horas.

-Calcular el radio de la órbita. **(1,5 puntos)**

-Calcular la velocidad con la que debemos lanzarlo desde la superficie de la Tierra para que la altura máxima coincida con el radio de la órbita. **(1,5 puntos)**

Datos: $R_T = 6370$ km. $M_T = 5,98\times10^{24}$ kg. $G = 6,67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Solución

Como la fuerza de atracción gravitatoria es la responsable del movimiento orbital podemos escribir:

$$G\frac{mM_T}{R^2} = m\omega^2 R = m\frac{4\pi^2}{T^2}R \quad\rightarrow\quad R = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 12796 \text{ km}$$

Ahora podemos calcular la velocidad de lanzamiento a partir del principio de conservación de la energía mecánica. Si elegimos el origen de energía potencial ($U = 0$) cuando $r = \infty$, la expresión de la energía potencial en función de la altura es

$$U = -G\frac{M_T m}{r}.$$

Igualando la energía del satélite en la superficie de la Tierra y en la altura máxima tenemos:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = -G\frac{M_T m}{R}.$$

de donde despejamos la velocidad inicial del lanzamiento $v = 7,93$ km/s.

2. Se disponen 4 cargas puntuales en los vértices de un cuadrado centrado en el origen: una carga q en el punto $(-1,1)$, una carga $2q$ en (1,1), una carga $-3q$ en (+1, −1) y otra de $6q$ en (−1, −1). Calcular el campo eléctrico en el origen. **(2,5 puntos)**

Solución

Para calcular el campo eléctrico en cualquier punto es necesario aplicar el principio de superposición. Por la simetría del problema vemos que el campo resultante en el origen tendrá componente nula en la dirección Y. En cuanto a la dirección X tenemos

$$\mathbf{E} = k\left(\frac{q}{2}-\frac{2q}{2}+\frac{3q}{2}+\frac{6q}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{i}\ \text{N/C} = kq2\sqrt{2}\ \mathbf{i}\ \text{N/C}$$

3. Calcular la velocidad de propagación de un rayo de luz monocromática en un determinado medio sabiendo que el ángulo límite de reflexión total cuando la luz pasa del medio al aire es de 30º. **(2 puntos)**

Datos: $n_{\text{aire}} = 1$. $c = 3\times 10^8$ m/s.

Solución

La ley de la refracción establece que

$$n_i \sin\theta_i = n_r \sin\theta_r$$

o en términos de velocidad de propagación

$$\frac{\sin\theta_i}{v_i} = \frac{\sin\theta_r}{v_r}$$

En el caso de la reflexión total tenemos que $\theta_r = 90º$, así que despejando

$$v_i = v_{aire}\sin\theta_i^* = 1,5\times 10^8 \text{ m/s}$$

4. El extremo izquierdo (origen de coordenadas) de una cuerda oscila con un movimiento armónico simple de amplitud 20 cm. La cuerda, de masa 400 g y longitud 80 cm, se haya en tensión al tirar del otro extremo un fuerza de 2 N. En el instante inicial ($t = 0$) el desplazamiento vertical del extremo que oscila es nulo y se mueve hacia abajo. Sabiendo que la distancia entre dos puntos consecutivos que oscilan en fase es de 20 cm, obtener la ecuación de la onda armónica transversal generada. (**2,5 puntos)**

Datos: La velocidad v de una onda en una cuerda de densidad de masa lineal μ (masa por unidad de longitud) sometida a una tensión F es $v = \sqrt{F/\mu}$.

Solución

La ecuación general de una función de onda armónica que se propaga en el sentido positivo del eje X es

$$y(x,t) = A\text{sen}(kx - \omega t + \delta)\ .$$

Ahora debemos calcular cada magnitud a partir de los datos del enunciado:

$A = 0,2$ m

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,2} = 31,4$ rad/m

δ=0 rad (porque se mueve hacia abajo, velocidad negativa)

Para calcular la frecuencia angular ω necesitamos el periodo o la frecuencia de la oscilación, dato que podemos calcular a partir de la velocidad de la onda

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{LF}{m}} = 2 \text{ m/s}$$

Como $v = \lambda f$ tenemos que

$$f = \frac{v}{\lambda} = 10 \text{ Hz} \quad \rightarrow \ \omega = 2\pi f = 2\pi 10 = 62,8 \text{ rad/s}$$

por lo que la función de onda será

$$y(x,t) = 0,2 \text{ sen}(31,4x - 62,8t) \text{ m} .$$

OPCIÓN B

1. Según la tercera Ley de Kepler, el cuadrado del periodo orbital de un planeta es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica o distancia media. Suponiendo que estamos tratando de órbitas circulares, calcular el factor de proporcionalidad entre el cuadrado del periodo T^2 y el cubo del radio de la órbita R^3 para los planetas del sistema solar que orbitan alrededor del Sol. **(2 puntos)**

Solución

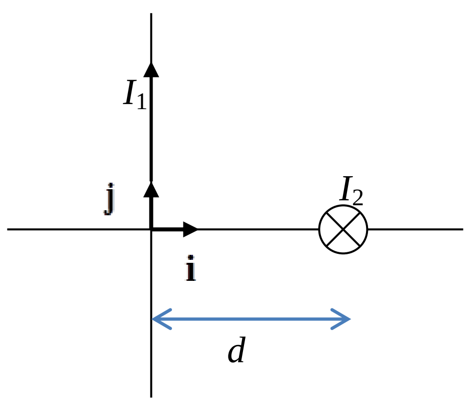
Como la fuerza de atracción gravitatoria del Sol es la responsable del movimiento orbital de los planetas del sistema solar podemos escribir:

$$G\frac{mM_S}{R^2} = m\omega^2 R = m\frac{4\pi^2}{T^2}R \quad \rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S}R^3$$

de modo que el factor de proporcionalidad será $\dfrac{4\pi^2}{GM_S}$.

2. Dos conductores rectilíneos infinitamente largos están situados en planos perpendiculares tal y como se muestra en la figura. La dirección del conductor 1 coincide con el eje Y, y por él circula una corriente en el sentido positivo de intensidad I_1. La corriente que circula por el conductor 2 es I_2 y tiene la dirección del eje Z y sentido negativo (entrando en el papel), cortando al eje X a una distancia d del origen. Calcular el vector inducción magnética en el punto $(d,d,0)$ en función de los datos del enunciado. **(2,5 puntos)**

Datos: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2. El módulo del campo magnético producido por un conductor rectilíneo infinitamente largo por el que circula una corriente I, a una distancia r perpendicular al mismo es $B = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I}{r}$.



Solución

El campo magnético en el punto $(d,d,0)$ producido por el conductor 1 vale:

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}\mathbf{k} \,,$$

donde hemos aplicado la regla de la mano derecha para obtener la dirección y sentido. Para el conductor 2 tenemos

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}\mathbf{i}$$

El campo magnético resultante será

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi d}\left(-I_1\mathbf{k} + I_2\mathbf{i}\right)$$

3. Tenemos dos masas idénticas de 1 kg. Cada una se encuentra sujeta a un muelle fijo que descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Los muelles son iguales y de constante $k = 100$ N/m. Un muelle se estira 10 cm y el otro 5 cm. Si se dejan en libertad al mismo tiempo ($t = 0$ s), representar en la misma gráfica la posición de ambos objetos en función del tiempo (no es necesario una representación exacta, basta simplemente con indicar los valores máximos y mínimos de cada función, los puntos de corte con los ejes y la forma de las funciones) **(2,5 puntos)**

<u>Solución</u>

De las condiciones del enunciado está claro que las masas realizarán un movimiento armónico simple, cuya ecuación de movimiento es

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

con $\omega = 2\pi / T$. En nuestro caso tenemos que

$$\omega = \sqrt{k/m} = 10 \text{ rad/s}$$

en ambos casos y fase inicial

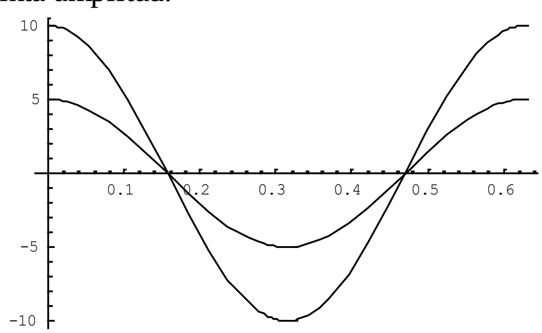
$$\delta = 0$$

ya que $x(0) = A$. Por consiguiente, las funciones a representar serán

$$x_1 = 10\cos(10t) \text{ cm}$$

$$x_2 = 5\cos(10t) \text{ cm}$$

ambas con el mismo periodo $T = \pi / 5 = 0{,}63$ s. Serán dos funciones sinusoidales con el mismo periodo pero distinta amplitud.



4. Responder a las siguientes cuestiones sobre física nuclear:

- Explicar razonadamente por qué la inestabilidad de los núcleos aumenta, de forma general, con el número atómico. **(1 punto)**

Solución

Lo que determina la estabilidad-inestabilidad de los núcleos es el balance entre las fuerzas de atracción entre los nucleones debido a las interacciones fuertes y las fuerzas de repulsión coulombiana entre los protones por tener la misma carga. Al aumentar el número atómico la repulsión coulombiana entre los protones se hace cada vez más intensa, pudiendo llegar a ser el orden de la interacción fuerte que se establece entre un nucleón y sus vecinos.

- Complétese los números atómicos y másicos de los elementos que intervienen en la siguiente secuencia de desintegraciones radiactivas. Los elementos están representados mediante la pareja $\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix}$. Recordamos que en la desintegración β^- se emiten electrones. **(2 puntos)**

$$\begin{pmatrix} 222 \\ 86 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \ldots \xrightarrow{\gamma} \ldots \xrightarrow{\alpha} \ldots \xrightarrow{\gamma} \ldots \xrightarrow{\beta^-} \ldots$$

$$\xrightarrow{\beta^-} \ldots \xrightarrow{\alpha} \ldots \xrightarrow{\beta^-} \ldots \xrightarrow{\beta^-} \ldots \xrightarrow{\alpha} \begin{pmatrix} 206 \\ 82 \end{pmatrix}$$

Solución

Debemos tener en cuenta que:

$$\text{Desintegración } \alpha: \begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A-4 \\ Z-2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Desintegración } \beta^-: \begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A \\ Z+1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Desintegración } \gamma: \begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 222 \\ 86 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \begin{pmatrix} 218 \\ 84 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma} \begin{pmatrix} 218 \\ 84 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \begin{pmatrix} 214 \\ 82 \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma} \begin{pmatrix} 214 \\ 82 \end{pmatrix} \xrightarrow{\beta^-} \begin{pmatrix} 214 \\ 83 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\beta^-} \begin{pmatrix} 214 \\ 84 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \begin{pmatrix} 210 \\ 82 \end{pmatrix} \xrightarrow{\beta^-} \begin{pmatrix} 210 \\ 83 \end{pmatrix} \xrightarrow{\beta^-} \begin{pmatrix} 210 \\ 84 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha} \begin{pmatrix} 206 \\ 82 \end{pmatrix}$$

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Una estación espacial se encuentra a 2000 km de la superficie de la Tierra. Desde la estación se quiere lanzar un satélite para ponerlo en una órbita superior alrededor de la Tierra con radio 10000 km. Calcular la velocidad con la debe ser lanzado para que llegue a esa distancia con velocidad nula. **(2,5 puntos)**
Datos: $R_T = 6370$ km. $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg. $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

2. Una carga puntual q_1 se mueve con velocidad constante de módulo v_1 a lo largo del eje X en la dirección positiva. Determinar la fuerza que ejerce el campo magnético creado por esa carga sobre otra carga q_2 que se mueve sobre el eje Y en la dirección positiva con velocidad v_2, en el momento en el que la primera carga pasa por el origen de coordenadas y la segunda carga pasa por el punto (0, b, 0). Expresar el resultado en función de los datos del enunciado. **(2,5 puntos)**
Datos: El campo magnético creado por una carga puntual q con velocidad $\mathbf{v}$ en el punto $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ vale $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

3. Un rayo de luz monocromática incide desde el aire sobre una de las caras de una lámina de vidrio de caras plano-paralelas y espesor 5 cm, y de índice de refracción $n = 1,52$, con un ángulo de incidencia de 30º. Calcular el ángulo con el que el rayo de luz emerge nuevamente al aire después de atravesar la lámina. **(2,5 puntos)**
Datos: $n_{\text{aire}} = 1$.

4. Una onda armónica transversal se propaga por una cuerda en tensión en el sentido positivo del eje X a una velocidad de 2 m/s. Si en el instante $t = 3$ s hacemos una foto a la cuerda obtenemos que los desplazamientos de la cuerda están descritos por la función $y(x) = 0,5\ \mathrm{sen}(0,1x + 1,2)$ m. Obtener la ecuación completa de la onda armónica. (**2,5 puntos**)

OPCIÓN B

1. Supongamos que sólo conocemos el radio de la Tierra ($R_T = 6370$ km), la distancia Tierra-Luna ($r = 60R_T$) y el valor de la gravedad en la superficie terrestre ($g_0 = 9,81$ m/s^2), calcular el periodo de rotación de la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra en función de estas magnitudes. **(2,5 puntos)**

2. Un dipolo está constituido por dos cargas positivas iguales q situadas en el eje Y: una está en $y = a$ y la otra en $y = -a$. Obtener la expresión del campo eléctrico en cualquier punto del eje X. **(2,5 puntos)**

3. Un cuerpo está vibrando con movimiento armónico simple de amplitud 15 cm. Si realiza 4 vibraciones por segundo, calcular:
- Los valores máximos de la velocidad y de la aceleración. **(1 punto)**
- La aceleración cuando la elongación es 9 cm. **(1,5 puntos)**

4. Una fuente radiactiva tiene un periodo de semidesintegración de 1 minuto. En el tiempo $t = 0$ se observa que la fuente tiene una actividad (número de desintegraciones por unidad de tiempo) de 2000 desintegraciones/s. Determinar el número de núcleos que se han desintegrado al cabo de 2 minutos. **(2,5 puntos)**

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Una estación espacial se encuentra a 2000 km de la superficie de la Tierra. Desde la estación se quiere lanzar un satélite para ponerlo en una órbita superior alrededor de la Tierra con radio 10000 km. Calcular la velocidad con la debe ser lanzado para que llegue a esa distancia con velocidad nula. **(2,5 puntos)**

Datos: $R_{\mathrm{T}} = 6370$ km. $M_{\mathrm{T}} = 5,98 \times 10^{24}$ kg. $G = 6,67 \times 10^{-11}$ $\mathrm{Nm^2/kg^2}$.

<u>Solución</u>

Si elegimos el origen de energía potencial $(U = 0)$ cuando $r = \infty$, la expresión de la energía potencial en función de la altura es

$$U = -G\frac{M_T m}{r}.$$

Si aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica podemos igualar la energía del satélite en la estación espacial con la energía en la altura máxima:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{(R_{\mathrm{T}} + h)} = -G\frac{M_T m}{R},$$

siendo h la altura a la que se encuentra la estación con respecto a la superficie terrestre y R el radio de la órbita del satélite. Despejando la velocidad inicial del lanzamiento obtenemos $v = 3,94$ km/s.

2. Una carga puntual q_1 se mueve con velocidad constante de módulo v_1 a lo largo del eje X en la dirección positiva. Determinar la fuerza que ejerce el campo magnético creado por esa carga sobre otra carga q_2 que se mueve sobre el eje Y en la dirección positiva con velocidad

v_2, en el momento en el que la primera carga pasa por el origen de coordenadas y la segunda carga pasa por el punto (0, b, 0). Expresar el resultado en función de los datos del enunciado. **(2,5 puntos)**

Datos: El campo magnético creado por una carga puntual q con velocidad $\mathbf{v}$ en el punto $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ vale $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

Solución

Los datos que tenemos son:

$$\mathbf{v}_1 = v_1\mathbf{i}$$
$$\mathbf{v}_2 = v_2\mathbf{j}$$
$$\mathbf{r} = b\mathbf{j}$$

El campo magnético creado por la carga 1 en la posición ocupada por la carga 2 es

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1\mathbf{v}_1\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 v_1}{b^2}\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 v_1}{b^2}\mathbf{k}$$

y la fuerza que este campo ejercerá sobre la carga 2

$$\mathbf{F} = q_2\mathbf{v}_2\times\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{b^2}\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{b^2}\mathbf{i}$$

3. Un rayo de luz monocromática incide desde el aire sobre una de las caras de una lámina de vidrio de caras plano-paralelas y espesor 5 cm, y de índice de refracción $n = 1,52$, con un ángulo de incidencia de 30º. Calcular el ángulo con el que el rayo de luz emerge nuevamente al aire después de atravesar la lámina. **(2,5 puntos)**

Datos: $n_{\text{aire}} = 1$.

Solución

Es evidente que este ángulo será igual al ángulo de entrada, pero podemos comprobarlo haciendo los cálculos.

En primer lugar calculamos el ángulo de refracción con el que el rayo se propaga dentro de la lámina. La ley de la refracción establece que

$$n_i \sin\theta_i = n_r \sin\theta_r$$

Despejando

$$\theta_r = \arcsin\left(\sin\theta_i \frac{n_{aire}}{n_r}\right) = 19,2º$$

Ahora volvemos a aplicar la ley de la refracción cuando el rayo llega a la interfase vidrio-aire, teniendo en cuenta que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de refracción obtenido anteriormente

$$\theta_r' = \arcsin\left(\sin\theta_r \frac{n_i}{n_{aire}}\right) = 30º$$

4. Una onda armónica transversal se propaga por una cuerda en tensión en el sentido positivo del eje X a una velocidad de 2 m/s. Si en el instante $t = 3$ s hacemos una foto a la cuerda obtenemos que los desplazamientos de la cuerda están descritos por la función $y(x) = 0,5\ \mathrm{sen}(0,1x + 1,2)$ m. Obtener la ecuación completa de la onda armónica. (**2,5 puntos)**

Solución

La ecuación general de una función de onda armónica que se propaga en el sentido positivo del eje X es

$$y(x,t) = A\mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta)\ .$$

En el tiempo $t = 3$ s tenemos que

$$y(x) = A\mathrm{sen}(kx - 3\omega + \delta)\ .$$

Igualando con la expresión anterior obtenemos que

$$A = 0,5\ \mathrm{m}$$

$$k = 0,1\ \mathrm{rad/m}$$

$$1,2 = -3\omega + \delta$$

Podemos calcular la frecuencia angular a partir de los datos del problema:

$$\omega = kv = 0,2\ \mathrm{rad/s}\ ,$$

de modo que

$$\delta = 1,2 + 3\omega = 1,8\ \mathrm{rad}\ .$$

La ecuación final de la onda será

$$y(x,t) = 0,5\mathrm{sen}(0,1x - 0,2t + 1,8)\ \mathrm{m}\ .$$

OPCIÓN B

1. Supongamos que sólo conocemos el radio de la Tierra ($R_T = 6370$ km), la distancia Tierra-Luna ($r = 60R_T$) y el valor de la gravedad en la superficie terrestre ($g_0 = 9{,}81$ m/s^2), calcular el periodo de rotación de la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra en función de estas magnitudes. **(2,5 puntos)**

Solución

Sabiendo que la fuerza de atracción gravitatoria de la Tierra es la responsable del movimiento orbital de la luna tenemos que:

$$G\frac{M_T m}{r^2} = m\omega^2 r \quad \rightarrow \quad \omega^2 = \frac{GM_T}{r^3} \quad \rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}.$$

Ahora necesitamos calcular el término GM_T, para lo cual podemos utilizar el dato de la gravedad en la superficie terrestre:

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^{\ 2}} \quad \rightarrow \quad GM_T = g_0 R_T^{\ 2}.$$

Sustituyendo en la ecuación de arriba llegamos a:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{g_0 R_T^{\ 2}} \quad \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{g_0 R_T^{\ 2}}} = 27{,}24 \ \text{ días}$$

2. Un dipolo está constituido por dos cargas positivas iguales q situadas en el eje Y: una está en $y = a$ y la otra en $y = -a$. Obtener la expresión del campo eléctrico en cualquier punto del eje X. **(2,5 puntos)**

Solución

Por la simetría del problema es fácil darse cuenta que campo eléctrico producido por el dipolo en el eje X no tiene componente Y, y que vale

$$\mathbf{E} = k\frac{2qx}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}}\mathbf{i}$$

3. Un cuerpo está vibrando con movimiento armónico simple de amplitud 15 cm. Si realiza 4 vibraciones por segundo, calcular:

- Los valores máximos de la velocidad y de la aceleración. **(1 punto)**
- La aceleración cuando la elongación es 9 cm. **(1,5 puntos)**

Solución

La frecuencia es $f = 4$ Hz y la frecuencia angular será $\omega = 8\pi$ s^{-1}, por lo que las ecuaciones del movimiento son:

$$x(t) = 0{,}15\cos\left(8\pi t + \delta\right)$$

$$v(t) = -3{,}77\sin\left(8\pi t + \delta\right) \Rightarrow v_{\max} = 3{,}77 \text{ m/s}$$

$$a(t) = -94{,}75\cos\left(8\pi t + \delta\right) \Rightarrow a_{\max} = 94{,}75 \text{ m/s}^2$$

Si $x(t^*) = 0{,}09\,m$, entonces en ese instante t^* tenemos que $\cos\left(8\pi t^* + \delta\right) = 0{,}6$. Así pues

$$a(t^*) = -94{,}75\cos\left(8\pi t^* + \delta\right) = -56.85\, m/s^2$$

4. Una fuente radiactiva tiene un periodo de semidesintegración de 1 minuto. En el tiempo $t = 0$ se observa que la fuente tiene una actividad (número de desintegraciones por unidad de tiempo) de 2000 desintegraciones/s. Determinar el número de núcleos que se han desintegrado al cabo de 2 minutos. **(2,5 puntos)**

Solución

El número de núcleos N de una muestra varía en el tiempo como

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}t}$$

Por otro lado, la actividad de la muestra es

$$A(t) = \lambda N(t)\,.$$

En nuestro caso, en el instante inicial tenemos

$$A_0 = \frac{\ln 2}{T} N_0 \quad \rightarrow \quad N_0 = \frac{TA_0}{\ln 2} = 1{,}73123\times 10^5 \text{ núcleos}\,.$$

Al cabo de 2 minutos tendremos

$$N(t=2) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-2\ln 2} = \frac{N_0}{4}\,,$$

De modo que se han desintegrado $\frac{3N_0}{4} = 129843$ núcleos.

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. A 500 km de la superficie de la Tierra se encuentra una estación espacial desde la que se quiere lanzar un satélite para ponerlo en una órbita superior alrededor de la Tierra con radio 10000 km. Calcular la velocidad con la debe ser lanzado para que llegue a esa distancia con velocidad nula. **(2,5 puntos)**
Datos: $R_T = 6370$ km. $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg. $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

2. En una zona del espacio hay un campo eléctrico en la dirección y sentido positivo del eje Z: $\mathbf{E} = 1000\ \mathbf{k}$ N/C, y un campo magnético en la dirección y sentido positivo del eje Y: $\mathbf{B} = 0,5\ \mathbf{j}$ T. Se lanza un protón en esa zona del espacio perpendicularmente a ambos campos. Calcular el vector velocidad con el que el protón debe penetrar en los campos para que una vez dentro de ellos su velocidad no varíe ni en dirección ni en módulo. **(2,5 puntos)**

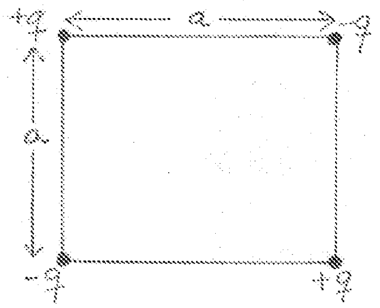
3. Un objeto realiza un movimiento armónico simple en la dirección del eje X ejecutando 5 oscilaciones por segundo. Sabiendo que en el instante inicial el objeto pasa por la posición de equilibrio ($x = 0$ cm) con una velocidad $v = -63$ cm/s, obtener la ecuación completa de la posición en función del tiempo. **(2,5 puntos)**

4. Supongamos que tenemos un átomo de hidrógeno descrito por el modelo de Bohr. Recordamos que según este modelo, la energía total del electrón tiene la forma $E(n) = -\frac{E_0}{n^2} = -\frac{13,6}{n^2}$ eV. El electrón se encuentra en el estado fundamental ($n = 1$) y absorbe la energía de un fotón. Como consecuencia el electrón escapa del átomo con una energía cinética de 15 eV, quedando este último ionizado. Calcular la frecuencia del fotón. **(2,5 puntos)**
Datos: $h = 6,63\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s} = 4,14\times10^{-15}\ \mathrm{eV\cdot s}$.

OPCIÓN B

1. El radio de la órbita terrestre alrededor del Sol es de $1,46\times10^{11}$ m y el de Saturno es de $1,43\times10^{12}$ m. Aplicar la tercera Ley de Kepler para calcular el período de la órbita de Saturno. **(2 puntos)**

2. Considérese el cuadrupolo eléctrico de lado a que se muestra en la figura.
-Tomar como origen de coordenadas el centro del cuadrado y calcular el campo eléctrico en ese punto. **(1 punto)**
-Tomando como origen de energía potencial la configuración en la que las cargas se encuentran infinitamente alejadas entre sí, determínese el trabajo mínimo necesario para deshacer el cuadrupolo de modo que las cargas queden separadas por distancias infinitas entre sí. **(2 puntos)**



3. Un rayo de luz monocromática incide desde el aire sobre una de las caras de una lámina de vidrio de caras plano-paralelas y espesor 5 cm, y de índice de refracción $n = 1,52$, con un ángulo de incidencia de 30º. Calcular la longitud recorrida por el rayo en el interior de la lámina. **(2,5 puntos)**
Datos: $n_{\text{aire}} = 1$.

4. Una onda armónica transversal se propaga por una cuerda en tensión en el sentido positivo del eje X a una velocidad de 0,5 m/s. Si en el instante $t = 5$ s hacemos una foto a la cuerda obtenemos que los desplazamientos de la cuerda están descritos por la función $y(x) = 0,2\ \mathrm{sen}(0,16x - 0,3)$ m. Obtener la ecuación completa de la onda armónica. (**2,5 puntos**)

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. A 500 km de la superficie de la Tierra se encuentra una estación espacial desde la que se quiere lanzar un satélite para ponerlo en una órbita superior alrededor de la Tierra con radio 10000 km. Calcular la velocidad con la debe ser lanzado para que llegue a esa distancia con velocidad nula. **(2,5 puntos)**

Datos: $R_\mathrm{T} = 6370$ km. $M_\mathrm{T} = 5,98\times 10^{24}$ kg. $G = 6,67\times 10^{-11}$ $\mathrm{Nm^2/kg^2}$.

Solución

Si elegimos el origen de energía potencial ($U = 0$) cuando $r = \infty$, la expresión de la energía potencial en función de la altura es

$$U = -G\frac{M_T m}{r}.$$

Si aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica podemos igualar la energía del satélite en la estación espacial con la energía en la altura máxima:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{(R_\mathrm{T}+h)} = -G\frac{M_T m}{R},$$

siendo h la altura a la que se encuentra la estación con respecto a la superficie terrestre y R el radio de la órbita del satélite. Despejando la velocidad inicial del lanzamiento obtenemos $v = 6,03$ km/s.

2. En una zona del espacio hay un campo eléctrico en la dirección y sentido positivo del eje Z: $\mathbf{E} = 1000\,\mathbf{k}$ N/C, y un campo magnético en la dirección y sentido positivo del eje Y:

$\mathbf{B} = 0,5\,\mathbf{j}$ T. Se lanza un protón en esa zona del espacio perpendicularmente a ambos campos. Calcular el vector velocidad con el que el protón debe penetrar en los campos para que una vez dentro de ellos su velocidad no varíe ni en dirección ni en módulo. **(2,5 puntos)**

<u>Solución</u>

De la geometría del problema está claro que el vector velocidad debe tener la dirección del eje *X*: $\mathbf{v} = v\,\mathbf{i}$ m/s. Por otro lado

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} = 1000q\,\mathbf{k}\ \mathrm{N}$$

$$\mathbf{F}_m = q(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = 0,5qv\,\mathbf{k}\ \mathrm{N}$$

Como $\sum \mathbf{F} = 0$ entonces tenemos que $\mathbf{F}_m = -\mathbf{F}_e \Rightarrow v = -2000$ m/s y por consiguiente

$$\mathbf{v} = -2000\,\mathbf{i}\ \mathrm{m/s}.$$

3. Un objeto realiza un movimiento armónico simple en la dirección del eje X ejecutando 5 oscilaciones por segundo. Sabiendo que en el instante inicial el objeto pasa por la posición de equilibrio ($x = 0$ cm) con una velocidad $v = -63$ cm/s, obtener la ecuación completa de la posición en función del tiempo. **(2,5 puntos)**

<u>Solución</u>

La solución general de la ecuación del movimiento armónico simple es

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$

En nuestro caso tenemos que la frecuencia es 5 Hz, por lo que la frecuencia angular será ω = 10π rad/s. Sustituimos la condición inicial de la posición para obtener la fase

$$x(0) = 0 = A\cos(\delta)\ \mathrm{cm} \quad \rightarrow \quad \delta = \frac{\pi}{2}\ \text{ó}\ \frac{3\pi}{2}.$$

Elegimos $\delta = \dfrac{\pi}{2}$ porque la velocidad es negativa:

$$v(0) = -63 = -A10\pi\sin(\pi/2) \quad \rightarrow \quad A = \frac{63}{10\pi}$$

por lo que la ecuación del movimiento será

$$x = \frac{63}{10\pi}\cos\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{cm}$$

4. Supongamos que tenemos un átomo de hidrógeno descrito por el modelo de Bohr. Recordamos que según este modelo, la energía total del electrón tiene la forma $E(n) = -\dfrac{E_0}{n^2} = -\dfrac{13,6}{n^2}$ eV. El electrón se encuentra en el estado fundamental ($n = 1$) y absorbe la energía de un fotón. Como consecuencia el electrón escapa del átomo con una energía cinética de 15 eV, quedando este último ionizado. Calcular la frecuencia del fotón. **(2,5 puntos)**

Datos: $h = 6,63 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} = 4,14 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s}$.

Solución

La energía del fotón debe ser la necesaria para ionizar el átomo desde $n = 1$ y comunicar la energía sobrante al electrón. La energía de ionización en el estado fundamental es

$$E = \frac{E_0}{n^2} = \frac{13,6}{1^2} = 13,6\ \text{eV}$$

La energía del fotón incidente tiene que ser

$$hv = 13,6 + 15 = 28,6\ \text{eV}$$

Y su frecuencia es

$$v = \frac{E}{h} = 6,91 \times 10^{15}\ \text{Hz}$$

OPCIÓN B

1. El radio de la órbita terrestre alrededor del Sol es de $1{,}46\times10^{11}$ m y el de Saturno es de $1{,}43\times10^{12}$ m. Aplicar la tercera Ley de Kepler para calcular el período de la órbita de Saturno. **(2 puntos)**

<u>Solución</u>

La Tercera Ley de Kepler se formula de la siguiente forma

$$T^2 \propto R^3 .$$

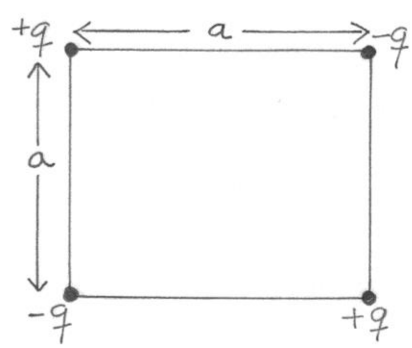
Entonces tenemos

$$T_{Urano} = T_{Tierra}\sqrt{\frac{R^3_{Saturno}}{R^3_{Tierra}}} = 30,65 \text{ años}$$

2. Considérese el cuadrupolo eléctrico de lado a que se muestra en la figura.

-Tomar como origen de coordenadas el centro del cuadrado y calcular el campo eléctrico en ese punto. **(1 punto)**

-Tomando como origen de energía potencial la configuración en la que las cargas se encuentran infinitamente alejadas entre sí, determínese el trabajo mínimo necesario para deshacer el cuadrupolo de modo que las cargas queden separadas por distancias infinitas entre sí. **(2 puntos)**



<u>Solución</u>

Por simetría es fácil darse cuenta de que el campo eléctrico en el centro del cuadrupolo es cero.

Para deshacer esta configuración podemos ir separando carga a carga. Si comenzamos por la carga situada en la esquina superior de la izquierda, tenemos que el trabajo necesario para alejarla es igual a la variación de su energía potencial

$$W_1 = \Delta U = U_f - U_i = 0 - kq\left(\frac{-q}{a} + \frac{q}{a\sqrt{2}} + \frac{-q}{a}\right) = kq^2\,\frac{2\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}} \text{ J} .$$

Ahora separamos la carga de la esquina superior derecha

$$W_2 = \Delta U = U_f - U_i = 0 + qk\left(\frac{-q}{a\sqrt{2}} + \frac{q}{a}\right) = kq^2\,\frac{\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}}\ \text{J}\,.$$

Finalmente, alejamos la carga en la esquina inferior izquierda

$$W_2 = \Delta U = U_f - U_i = 0 + qk\left(\frac{q}{a}\right) = \frac{kq^2}{a}\ \text{J}\,.$$

El trabajo total será la suma de los trabajos:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = kq^2\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}} + \frac{1}{a}\right) = \frac{kq^2}{a}\left(4-\sqrt{2}\right) = 2{,}6\,\frac{kq^2}{a}\ \text{J}$$

3. Un rayo de luz monocromática incide desde el aire sobre una de las caras de una lámina de vidrio de caras plano-paralelas y espesor 5 cm, y de índice de refracción $n = 1{,}52$, con un ángulo de incidencia de 30º. Calcular la longitud recorrida por el rayo en el interior de la lámina. **(2,5 puntos)**

Datos: $n_{\text{aire}} = 1$.

Solución

Calculamos el ángulo de refracción con el que el rayo se propaga dentro de la lámina. La ley de la refracción establece que

$$n_i \sin\theta_i = n_r \sin\theta_r$$

Despejando

$$\theta_r = \arcsin\left(\sin\theta_i\,\frac{n_{aire}}{n_r}\right) = 19{,}2^{\text{o}}$$

La distancia recorrida por el rayo en el interior de la lámina será

$$d = \frac{h}{\cos(\theta_r)} = 5{,}29\ \text{cm}\,,$$

donde h es el espesor de la lámina.

4. Una onda armónica transversal se propaga por una cuerda en tensión en el sentido positivo del eje X a una velocidad de 0,5 m/s. Si en el instante $t = 5$ s hacemos una foto a la cuerda obtenemos que los desplazamientos de la cuerda están descritos por la función $y(x) = 0{,}2\ \text{sen}(0{,}16x - 0{,}3)$ m. Obtener la ecuación completa de la onda armónica. (**2,5 puntos)**

Solución

La ecuación general de una función de onda armónica que se propaga en el sentido positivo del eje X es

$$y(x,t) = A\text{sen}(kx - \omega t + \delta)\,.$$

En el tiempo $t = 5$ s tenemos que

$$y(x) = A\text{sen}(kx - 5\omega + \delta)\,.$$

Igualando con la expresión anterior obtenemos que

$$A = 0,2 \text{ m}$$
$$k = 0,16 \text{ rad/m}$$
$$-0,3 = -5\omega + \delta$$

Podemos calcular la frecuencia angular a partir de los datos del problema:

$$\omega = kv = 0,08 \text{ rad/s},$$

de modo que

$$\delta = -0,3 + 5\omega = 0,1 \text{ rad}.$$

La ecuación final de la onda será

$$y(x,t) = 0,2\text{sen}(0,16x - 0,08t + 0,1) \text{ m}.$$

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Deducir la expresión de la energía total de un satélite que orbita alrededor de la Tierra en función exclusivamente de G, la masa de la Tierra M_T, la masa del satélite m y la velocidad angular ω del satélite. Considerar que el origen de energía potencial se encuentra en un punto infinitamente alejado. **(2,5 puntos)**

2. Se disponen 4 cargas puntuales en los vértices de un cuadrado centrado en el origen: una carga q en el punto $(-1,1)$, una carga $2q$ en $(1,1)$, una carga $-3q$ en $(+1, -1)$ y otra de $6q$ en $(-1, -1)$. Calcular el campo eléctrico en el origen. **(2,5 puntos)**

3. Considerar un objeto que realiza un movimiento armónico simple con la siguiente ecuación para la aceleración en función del tiempo: $a = -490\cos(9,9t)$ cm/s^2.

-¿Cuál es el valor máximo del módulo de la velocidad del objeto? **(1 punto).**

-¿En qué tiempos alcanza el objeto esta velocidad máxima? **(1,5 puntos).**

4. Supongamos que tenemos un átomo de hidrógeno descrito por el modelo de Bohr. Recordamos que según este modelo, la energía total del electrón tiene la forma $E(n) = -\frac{E_0}{n^2} = -\frac{13,6}{n^2}$ eV. El electrón se encuentra en el primer nivel excitado ($n = 2$) y absorbe la energía de un fotón. Como consecuencia el electrón escapa del átomo con una energía cinética de 10 eV, quedando este último ionizado. Calcular la frecuencia del fotón. **(2,5 puntos)**
Datos: $h = 6,63\times10^{-34}$ J·s $= 4,14\times10^{-15}$ eV·s.

OPCIÓN B

1. Un proyectil es lanzado verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de 15 km/s. Explicar razonadamente qué sucederá con el proyectil y calcular el estado final de su movimiento despreciando la interacción con otros astros. **(2,5 puntos)**
Datos: $G = 6,67\times10^{-11}$ Nm²/kg². $R_T = 6370$ km. $M_T = 5,98\times10^{24}$ kg.

2. Una carga puntual q_1 se mueve con velocidad constante de módulo v_1 a lo largo del eje X en la dirección positiva. Determinar la fuerza que ejerce el campo magnético creado por esa carga sobre otra carga q_2 que se mueve sobre el eje Y en la dirección positiva con velocidad v_2, en el momento en el que la primera carga pasa por el origen de coordenadas y la segunda carga pasa por el punto (0, b, 0). Expresar el resultado en función de los datos del enunciado. **(2,5 puntos)**
Datos: El campo magnético creado por una carga puntual q con velocidad $\mathbf{v}$ en el punto $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ vale $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

3. El extremo izquierdo (origen de coordenadas) de una cuerda en tensión situada en el eje X oscila con un movimiento armónico en el que el desplazamiento transversal varía con el tiempo según la ecuación $y(t) = 0,2\,\mathrm{sen}(-\pi t - 2,1)$ m. Esto genera una onda armónica transversal que se propaga por la cuerda en el sentido positivo del eje X a 0,5 m/s. Obtener la ecuación de la onda. **(2,5 puntos)**

4. Calcular la energía liberada en la reacción de fusión de cuatro núcleos de hidrógeno para formar un núcleo de helio:

$$4\,{}^1_1\mathrm{H} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + 2e^+,$$

sabiendo que la masa del núcleo ${}^4_2\mathrm{He}$ es 4,0015 u, la masa del núcleo ${}^1_1\mathrm{H}$ es 1,0073 u y la masa del positrón e^+ es $5,49\times10^{-4}$ u. **(2,5 puntos)**
Datos: $c^2 = 931,5$ MeV / u.

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Deducir la expresión de la energía total de un satélite que orbita alrededor de la Tierra en función exclusivamente de *G*, la masa de la Tierra M_T, la masa del satélite *m* y la velocidad angular ω del satélite. Considerar que el origen de energía potencial se encuentra en un punto infinitamente alejado. **(2,5 puntos)**

Solución

En una órbita cualquiera la energía del satélite vendrá dada por la suma de su energía cinética más potencial:

$$E_T = E_c + U = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{r},$$

donde hemos elegido el origen de energía potencial ($U = 0$) en $r = \infty$

Sabiendo que la fuerza de atracción gravitatoria es la responsable del movimiento orbital tenemos que:

$$G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r},$$

por lo que la energía total tendrá la forma:

$$E_T = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r}.$$

Ahora sólo tenemos que expresar el radio de la órbita en función de la velocidad angular, lo cual es fácil volviendo a la igualdad entre fuerza de atracción y fuerza centrípeta:

$$G\frac{M_T m}{r^2} = m\omega^2 r \quad \rightarrow \quad r^3 = G\frac{M_T}{\omega^2},$$

de modo que tenemos

$$E_T = -\frac{1}{2} G \frac{M_T m}{\left(G \frac{M_T}{\omega^2}\right)^{1/3}} = -\frac{1}{2} m \left(G M_T \omega\right)^{2/3}.$$

2. Se disponen 4 cargas puntuales en los vértices de un cuadrado centrado en el origen: una carga q en el punto $(-1{,}1)$, una carga $2q$ en (1,1), una carga $-3q$ en (+1, −1) y otra de $6q$ en (−1, −1). Calcular el campo eléctrico en el origen. **(2,5 puntos)**

Solución

Para calcular el campo eléctrico en cualquier punto es necesario aplicar el principio de superposición. Por la simetría del problema vemos que el campo resultante en el origen tendrá componente nula en la dirección Y. En cuanto a la dirección X tenemos

$$\mathbf{E} = k\left(\frac{q}{2} - \frac{2q}{2} + \frac{3q}{2} + \frac{6q}{2}\right) \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{i} \text{ N/C} = kq2\sqrt{2}\ \mathbf{i} \text{ N/C}$$

3. Considerar un objeto que realiza un movimiento armónico simple con la siguiente ecuación para la aceleración en función del tiempo: $a(t) = -490\cos(9{,}9t)$ cm/s^2.

-¿Cuál es el valor máximo del módulo de la velocidad del objeto? **(1 punto).**

-¿En qué tiempos alcanza el objeto esta velocidad máxima? **(1,5 puntos).**

Solución

Las ecuaciones generales del movimiento son

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$
$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$
$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \delta)$$

de donde se deduce que

$$|v|_{\max} = \frac{|a|_{\max}}{\omega} = \frac{490}{9{,}9} = 49{,}5 \text{ cm/s}$$

Por otro lado tenemos que

$$v(t) = -49{,}5\sin(9{,}9t) \text{ cm/s}$$

de modo que el objeto alcanzará la velocidad máxima cuando

$$|\sin(9{,}9t)| = 1 \quad \Rightarrow \quad 9{,}9t = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2}, \ldots = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 0,1,2,3\ldots$$

es decir

$$t = \frac{\pi}{19{,}8}(2n+1) \text{ s}, \quad n = 0,1,2,3\ldots$$

4. Supongamos que tenemos un átomo de hidrógeno descrito por el modelo de Bohr. Recordamos que según este modelo, la energía total del electrón tiene la forma $E(n) = -\frac{E_0}{n^2} = -\frac{13,6}{n^2}$ eV. El electrón se encuentra en el primer nivel excitado ($n = 2$) y absorbe la energía de un fotón. Como consecuencia el electrón escapa del átomo con una energía cinética de 10 eV, quedando este último ionizado. Calcular la frecuencia del fotón. **(2,5 puntos)**

Datos: $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J·s $= 4,14 \times 10^{-15}$ eV·s.

Solución

La energía del fotón debe ser la necesaria para ionizar el átomo desde $n = 2$ y comunicar la energía sobrante al electrón. La energía de ionización en el primer estado excitado es

$$E = \frac{E_0}{n^2} = \frac{13,6}{2^2} = 3,4 \text{ eV}$$

La energía del fotón incidente tiene que ser

$$h\nu = 3,4 + 10 = 13,4 \text{ eV}$$

Y su frecuencia es

$$\nu = \frac{E}{h} = 3,24 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

OPCIÓN B

1. Un proyectil es lanzado verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de 15 km/s. Explicar razonadamente qué sucederá con el proyectil y calcular el estado final de su movimiento despreciando la interacción con otros astros. **(2,5 puntos)**
Datos: $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. $R_T = 6370$ km. $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg.

Solución

La velocidad de escape del campo gravitatorio terrestre desde la superficie de la Tierra es

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11,2 \text{ km/s}$$

Como la velocidad inicial es mayor, el proyectil escapará del campo terrestre y se alejará indefinidamente siguiendo una trayectoria rectilínea dada por la dirección inicial del lanzamiento. Su movimiento será decelerado tendiendo a una velocidad límite constante (ya que no actúan más fuerzas sobre el proyectil). Aplicando conservación de la energía mecánica podemos obtener la velocidad límite:

$$E_{c,i} + U_i = E_{c,f} + U_f$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = \frac{1}{2}mv_f^2 + 0$$

Despejando se obtiene $v_f = \sqrt{v_0^2 - \frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{v_0^2 - v_e^2} = 9,98$ km/s

2. Una carga puntual q_1 se mueve con velocidad constante de módulo v_1 a lo largo del eje X en la dirección positiva. Determinar la fuerza que ejerce el campo magnético creado por esa carga sobre otra carga q_2 que se mueve sobre el eje Y en la dirección positiva con velocidad v_2, en el momento en el que la primera carga pasa por el origen de coordenadas y la segunda carga pasa por el punto (0, b, 0). Expresar el resultado en función de los datos del enunciado. **(2,5 puntos)**
Datos: El campo magnético creado por una carga puntual q con velocidad $\mathbf{v}$ en el punto $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ vale $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

Solución

Los datos que tenemos son:

$$\mathbf{v}_1 = v_1\mathbf{i}$$

$$\mathbf{v}_2 = v_2\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r} = b\mathbf{j}$$

El campo magnético creado por la carga 1 en la posición ocupada por la carga 2 es

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1\mathbf{v}_1 \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 v_1}{b^2}\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 v_1}{b^2}\mathbf{k}$$

y la fuerza que este campo ejercerá sobre la carga 2

$$\mathbf{F} = q_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{b^2} \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{b^2} \mathbf{i}$$

3. El extremo izquierdo (origen de coordenadas) de una cuerda en tensión situada en el eje X oscila con un movimiento armónico en el que el desplazamiento transversal varía con el tiempo según la ecuación $y(t) = 0,2\,\text{sen}(-\pi t - 2,1)$ m. Esto genera una onda armónica transversal que se propaga por la cuerda en el sentido positivo del eje X a 0,5 m/s. Obtener la ecuación de la onda. (**2,5 puntos)**

<u>Solución</u>

La ecuación general de una función de onda armónica que se propaga en el sentido positivo del eje X es

$$y(x,t) = A\text{sen}(kx - \omega t + \delta)\ .$$

En el origen $x = 0$ tenemos que

$$y(t) = A\text{sen}(-\omega t + \delta)\ .$$

Igualando con la expresión anterior obtenemos que

$$A = 0,2 \text{ m}$$

$$\omega = \pi \text{ rad/s}$$

$$\delta = -2,1 \text{ rad}$$

Podemos calcular el número de onda partir de los datos del problema:

$$k = \frac{\omega}{v} = 2\pi \text{ rad/m}\ ,$$

La ecuación final de la onda será

$$y(x,t) = 0,2\text{sen}(2\pi x - \pi t - 2,1) \text{ m}\ .$$

4. Calcular la energía liberada en la reacción de fusión de cuatro núcleos de hidrógeno para formar un núcleo de helio:

$$4\,{}^1_1\text{H} \to {}^4_2\text{He} + 2e^+\ ,$$

sabiendo que la masa del núcleo ${}^4_2\text{He}$ es 4,0015 u, la masa del núcleo ${}^1_1\text{H}$ es 1,0073 u y la masa del positrón e^+ es 5,49×10^{-4} u. **(2,5 puntos)**

Datos: $c^2 = 931,5 \text{ MeV / u}$.

<u>Solución</u>

$$Q = -\Delta m \times c^2 = (m_i - m_f)c^2 = \left(4m_p - m_{{}^4_2\text{He}} - 2m_{e^+}\right)c^2 = 24,7 \text{ MeV}$$

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Deducir la expresión de la energía total de un satélite que orbita alrededor de la Tierra en función exclusivamente de G, la masa de la Tierra M_T, la masa del satélite m y el periodo orbital T del satélite. Considerar que el origen de energía potencial se encuentra en un punto infinitamente alejado. **(2,5 puntos)**

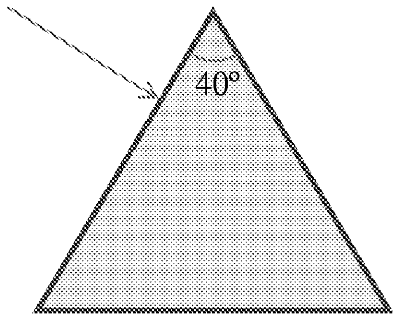
2. Un dipolo está constituido por dos cargas positivas iguales q situadas en el eje Y: una está en $y = a$ y la otra en $y = -a$. Obtener la expresión del campo eléctrico en cualquier punto del eje X. **(2,5 puntos)**

3. La función de onda de una onda armónica que se propaga en una cuerda situada a lo largo del eje X es $y(x,t) = 0,03\,\mathrm{sen}(2,2x + 3,5t)$, donde todas las magnitudes están en unidades del Sistema Internacional.

- ¿En qué sentido se propaga la onda y cuál es su velocidad? (**1 punto**)
- Determinar el desplazamiento de la cuerda en función del tiempo en un punto situado ena dos metros del origen. (**1 punto**)

4. Un rayo de luz monocromática incide desde el aire perpendicularmente sobre la superficie lateral de un prisma triangular con índice de refracción 1,5 (ver figura).
- Hacer un esquema con la trayectoria del rayo y calcular el ángulo de refracción con el que el rayo sale del prisma de nuevo al aire. **(2 puntos)**.
- Calcular la desviación del rayo, al salir del prisma, respecto a la dirección inicial. **(1 punto)**.

Datos: $n_{\text{aire}} = 1$.



OPCIÓN B

1. En relatividad general, el horizonte de sucesos es una superficie imaginaria de forma esférica que rodea a un agujero negro, en la cual la velocidad de escape necesaria para alejarse del mismo coincide con la velocidad de la luz (3×10^8 m/s). Por ello, ninguna cosa dentro de él, incluyendo los fotones (partículas que "componen" la luz), puede escapar debido a la atracción de un campo gravitatorio extremadamente intenso. Supongamos que en la etapa final de nuestro Sol, éste colapsa gravitatoriamente debido a la atracción gravitatoria provocada por su propia masa. Esto significa que su radio comienza a disminuir con el tiempo y su densidad aumenta. Sabiendo que la masa del Sol es aproximadamente de 2×10^{30} kg, calcular el radio máximo que debería tener el nuevo objeto (lo que podría identificarse con su horizonte de sucesos) para que pudiera considerarse como un agujero negro. **(2 puntos)**

Datos: $G = 6{,}67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

2. En una zona del espacio hay un campo eléctrico en la dirección y sentido positivo del eje *Z*: $\mathbf{E} = 1000\,\mathbf{k}$ N/C, y un campo magnético en la dirección y sentido positivo del eje *Y*: $\mathbf{B} = 0{,}5\,\mathbf{j}$ T. Se lanza un protón en esa zona del espacio perpendicularmente a ambos campos. Calcular el vector velocidad con el que el protón debe penetrar en los campos para que una vez dentro de ellos su velocidad no varíe ni en dirección ni en módulo. **(2,5 puntos)**

3. Considérese una partícula que describe un movimiento armónico simple de amplitud 10 cm alrededor del origen ($x = 0$). En el instante inicial la partícula pasa por el origen con velocidad $v = -5\pi$ cm/s .
- Obtener las ecuaciones de la posición x, la velocidad v y la aceleración a en función del tiempo. **(1,5 puntos)**
- Representar gráficamente x, v y a en función de tiempo (no es necesario una representación exacta, basta simplemente con indicar los valores máximos y mínimos de cada función, los puntos de corte con los ejes y la forma de las funciones). **(1,5 puntos)**

4. Una fuente radiactiva tiene un periodo de semidesintegración de 1 minuto. En el tiempo $t = 0$ se observa que la fuente tiene una actividad (número de desintegraciones por unidad de tiempo) de 2000 desintegraciones/s. Determinar el número de núcleos que se han desintegrado al cabo de 2 minutos. **(2,5 puntos)**

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Deducir la expresión de la energía total de un satélite que orbita alrededor de la Tierra en función exclusivamente de G, la masa de la Tierra M_T, la masa del satélite m y el periodo orbital T del satélite. Considerar que el origen de energía potencial se encuentra en un punto infinitamente alejado. **(2,5 puntos)**

<u>Solución</u>

En una órbita cualquiera la energía del satélite vendrá dada por la suma de su energía cinética más potencial:

$$E_T = E_c + U = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{r} \, ,$$

donde hemos elegido el origen de energía potencial ($U = 0$) en $r = \infty$

Sabiendo que la fuerza de atracción gravitatoria es la responsable del movimiento orbital tenemos que:

$$G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r} \, ,$$

por lo que la energía total tendrá la forma:

$$E_T = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r} \, .$$

Ahora sólo tenemos que expresar el radio de la órbita en función del periodo de rotación, lo cual es fácil volviendo a la igualdad entre fuerza de atracción y fuerza centrípeta:

$$G\frac{M_T m}{r^2} = mr\,\frac{4\pi^2}{T^2} \quad \rightarrow \quad r^3 = G\frac{M_T}{4\pi^2}T^2 \, ,$$

de modo que tenemos

$$E_T = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{\left(G\frac{M_T}{4\pi^2}T^2\right)^{1/3}} = -\frac{1}{2}m\left(GM_T\frac{2\pi}{T}\right)^{2/3}.$$

2. Un dipolo está constituido por dos cargas positivas iguales q situadas en el eje Y: una está en $y = a$ y la otra en $y = -a$. Obtener la expresión del campo eléctrico en cualquier punto del eje X. **(2,5 puntos)**

Solución

Por la simetría del problema es fácil darse cuenta que campo eléctrico producido por el dipolo en el eje X no tiene componente Y, y que vale

$$\mathbf{E} = k\frac{2qx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}\mathbf{i}$$

3. La función de onda de una onda armónica que se propaga en una cuerda situada a lo largo del eje X es $y(x,t) = 0,03\text{sen}(2,2x+3,5t)$, donde todas las magnitudes están en unidades del Sistema Internacional.

- ¿En qué sentido se propaga la onda y cuál es su velocidad? (**1 punto)**
- Determinar el desplazamiento de la cuerda en función del tiempo en un punto situado en a dos metros del origen. (**1 punto)**

Solución

La onda se propaga en el sentido negativo del eje X y su velocidad es

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{3,5}{2,2} = 1,59 \text{ m/s}$$

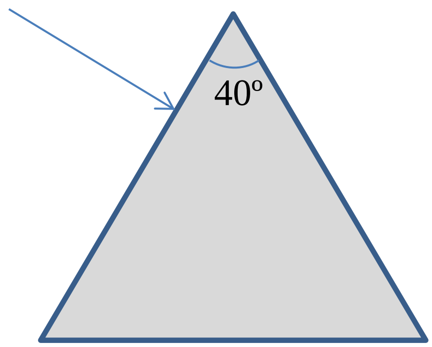
El desplazamiento será

$$y(x=2,t) = 0,03\sin(3,5t+4,4) \text{ m}.$$

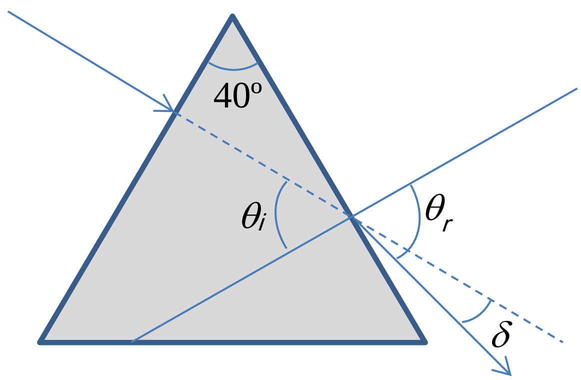
4. Un rayo de luz monocromática incide desde el aire perpendicularmente sobre la superficie lateral de un prisma triangular con índice de refracción 1,5 (ver figura).

- Hacer un esquema con la trayectoria del rayo y calcular el ángulo de refracción con el que el rayo sale del prisma de nuevo al aire. **(2 puntos)**.
- Calcular la desviación del rayo, al salir del prisma, respecto a la dirección inicial. **(1 punto)**.

Datos: $n_{\text{aire}} = 1$.



Solución



Si la luz incide perpendicularmente sobre la superficie de separación de los dos medios, seguirá propagándose en la misma dirección. Por la geometría del problema tenemos que el ángulo de incidencia en la cara derecha del prisma es $\theta_i = 40º$. Aplicando la ley de la refracción tenemos

$$n_i \sin\theta_i = n_r \sin\theta_r$$

Despejando

$$\theta_r = \arcsin\left(\sin\theta_i \frac{n_{prisma}}{n_{aire}}\right) = 74,6º$$

La desviación del rayo con respecto a la dirección inicial será

$$\delta = \theta_r - 40º = 34,6º$$

OPCIÓN B

1. En relatividad general, el horizonte de sucesos es una superficie imaginaria de forma esférica que rodea a un agujero negro, en la cual la velocidad de escape necesaria para alejarse del mismo coincide con la velocidad de la luz (3×10^8 m/s). Por ello, ninguna cosa dentro de él, incluyendo los fotones (partículas que "componen" la luz), puede escapar debido a la atracción de un campo gravitatorio extremadamente intenso. Supongamos que en la etapa final de nuestro Sol, éste colapsa gravitatoriamente debido a la atracción gravitatoria provocada por su propia masa. Esto significa que su radio comienza a disminuir con el tiempo y su densidad aumenta. Sabiendo que la masa del Sol es aproximadamente de 2×10^{30} kg, calcular el radio máximo que debería tener el nuevo objeto (lo que podría identificarse con su horizonte de sucesos) para que pudiera considerarse como un agujero negro. **(2 puntos)**

Datos: $G = 6,67\times10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.

Solución:

La velocidad de escape de un campo gravitatorio creado por una masa *M*, a una distancia *R* de la misma, tiene la forma:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}\ ,$$

En nuestro caso, para calcular el horizonte de sucesos tenemos que considerar que esa partícula es un fotón que se mueve a la velocidad de la luz *c*. Así pues tenemos:

$$c = \sqrt{\frac{2GM_{Sol}}{R}}\ .$$

Despejando obtenemos el radio de nuestra estrella convertida en agujero negro:

$$R \approx 3\ \mathrm{km}$$

2. En una zona del espacio hay un campo eléctrico en la dirección y sentido positivo del eje *Z*: $\mathbf{E} = 1000\,\mathbf{k}\ \mathrm{N/C}$, y un campo magnético en la dirección y sentido positivo del eje *Y*: $\mathbf{B} = 0,5\,\mathbf{j}\ \mathrm{T}$. Se lanza un protón en esa zona del espacio perpendicularmente a ambos campos. Calcular el vector velocidad con el que el protón debe penetrar en los campos para que una vez dentro de ellos su velocidad no varíe ni en dirección ni en módulo. **(2,5 puntos)**

Solución

De la geometría del problema está claro que el vector velocidad debe tener la dirección del eje *X*: $\mathbf{v} = v\,\mathbf{i}\ \mathrm{m/s}$. Por otro lado

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} = 1000q\ \mathbf{k}\ \mathrm{N}$$

$$\mathbf{F}_m = q(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = 0,5qv\ \mathbf{k}\ \mathrm{N}$$

Como $\sum \mathbf{F} = 0$ entonces tenemos que $\mathbf{F}_m = -\mathbf{F}_e \Rightarrow v = -2000\ \mathrm{m/s}$ y por consiguiente

$$\mathbf{v} = -2000\ \mathbf{i}\ \mathrm{m/s}.$$

3. Considérese una partícula que describe un movimiento armónico simple de amplitud 10 cm alrededor del origen ($x = 0$). En el instante inicial la partícula pasa por el origen con velocidad $v = -5\pi$ cm/s.
- Obtener las ecuaciones de la posición *x*, la velocidad *v* y la aceleración *a* en función del tiempo. **(1,5 puntos)**
- Representar gráficamente *x*, *v* y *a* en función de tiempo (no es necesario una representación exacta, basta simplemente con indicar los valores máximos y mínimos de cada función, los puntos de corte con los ejes y la forma de las funciones). **(1,5 puntos)**

<u>Solución</u>

La solución general de la ecuación del movimiento armónico simple es

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \delta)$$

En el instante inicial la partícula pasa por el origen, lo que significa que

$$x(0) = A\cos(\delta) = 0$$

$$v(0) = -A\omega\sin(\delta) = -5\pi$$

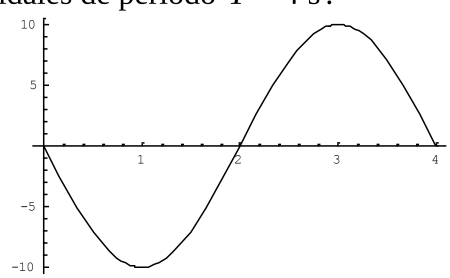
De estas ecuaciones queda claro que $\omega = \pi/2$ rad/s y $\delta = \pi/2$ rad:

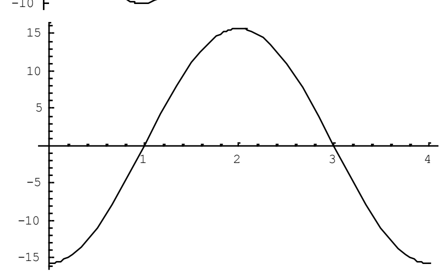
$$x = 10\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}$$

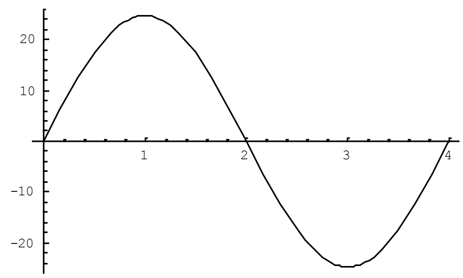
$$v = -15,7\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm/s}$$

$$a = -24,7\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm/s}^2$$

Se trata de funciones sinusoidales de periodo $T = 4$ s.







4. Una fuente radiactiva tiene un periodo de semidesintegración de 1 minuto. En el tiempo $t=0$ se observa que la fuente tiene una actividad (número de desintegraciones por unidad de tiempo) de 2000 desintegraciones/s. Determinar el número de núcleos que se han desintegrado al cabo de 2 minutos. **(2,5 puntos)**

Solución

El número de núcleos N de una muestra varía en el tiempo como

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}t}$$

Por otro lado, la actividad de la muestra es

$$A(t) = \lambda N(t)\,.$$

En nuestro caso, en el instante inicial tenemos

$$A_0 = \frac{\ln 2}{T} N_0 \quad \rightarrow \quad N_0 = \frac{TA_0}{\ln 2} = 1,73123 \times 10^5 \text{ núcleos}\,.$$

Al cabo de 2 minutos tendremos

$$N(t=2) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-2\ln 2} = \frac{N_0}{4}\,,$$

De modo que se han desintegrado $\frac{3N_0}{4} = 129843$ núcleos.

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Se lanza un objeto desde la superficie de un planeta de radio R con una velocidad igual a la velocidad de escape v_e. Determinar a cuántos radios de distancia del centro del planeta el objeto habrá perdido el 90 % de su energía cinética. **(2,5 puntos)**

2. Un electrón es lanzado con una velocidad de 2×10^6 m/s dentro de un campo eléctrico uniforme de 5000 V/m. Si la velocidad inicial del electrón tiene la misma dirección y sentido que las líneas del campo:

-Determinar la velocidad del electrón al cabo de $1{,}7\times10^{-9}$ s. **(1 punto)**

-Calcular la variación de energía potencial que ha experimentado el electrón en ese intervalo de tiempo. **(1,5 puntos)**

(Datos: $e = 1{,}6\times10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1\times10^{-31}$ kg)

3. Un objeto de 2 kg se sujeta a un muelle fijo horizontal con una constante $k = 196$ N/m. El objeto se desplaza una distancia de 5 cm de su posición de equilibrio y se deja en libertad en el tiempo $t = 0$ s. Obtener la ecuación de la aceleración del objeto en función del tiempo suponiendo que no existe ningún tipo de rozamiento. **(2 puntos).**

4. Responder a las siguientes cuestiones sobre física nuclear:

- Supongamos que tenemos tres especies radiactivas y sabemos que cada una emite un tipo distinto radiación: α, β^- y γ, pero no sabemos el tipo de desintegración de cada una. Si hacemos pasar cada radiación por un campo magnético perpendicular a la dirección de emisión, ¿esto nos ayudará a discriminar el tipo de radiación emitida por cada fuente? Razonar la respuesta. **(1,5 puntos)**

- ¿Qué núcleo será más estable, el ${}^{3}_{1}\mathrm{H}$ (tritio) o el ${}^{3}_{2}\mathrm{He}$ (helio) ? Razonar la respuesta. **(1,5 puntos)**

OPCIÓN B

1. Supongamos que un satélite tarda el mismo tiempo en describir una órbita alrededor de la Tierra en su superficie que en describir una órbita alrededor de la Luna también en su superficie. Sabiendo que el radio de la Tierra es 3,67 veces más grande que el radio de la luna ($R_T = 3{,}67 \times R_L$), calcular la relación entre las masas de la Tierra y la Luna. **(2,5 puntos)**

2. Sabemos que en una región del espacio existe un campo magnético B constante y uniforme. Para determinar su módulo, dirección y sentido, lanzamos una partícula con carga positiva q_0 y velocidad **v** en diferentes direcciones del espacio, y medimos la fuerza **F** que experimenta en el momento en el que la partícula penetra en la región donde existe el campo. Cuando $\mathbf{v} = v_0\mathbf{k}$, la partícula no se desvía de su trayectoria al penetrar en el campo. Sin embargo, cuando $\mathbf{v} = v_0\mathbf{j}$, la partícula experimenta una fuerza $\mathbf{F} = -F_0\mathbf{i}$ debido a la presencia del campo magnético. Determinar **B** en función de q_0, v_0 y F_0. **(3 puntos)**

3. Un rayo de luz monocromática incide oblicuamente desde un medio de índice de refracción 1,1 hacia otro medio de índice de refracción 2,13. Obtener el ángulo de refracción sabiendo que el rayo reflejado forma un ángulo de 60º con la superficie plana entre ambos medios. **(2 puntos)**

4. El extremo izquierdo (origen de coordenadas) de una cuerda en tensión situada en el eje X oscila con un movimiento armónico en el que el desplazamiento transversal varía con el tiempo según la ecuación $y(t) = 0,2\,\mathrm{sen}(-\pi t - 2,1)$ m. Esto genera una onda armónica transversal que se propaga por la cuerda en el sentido positivo del eje X a 0,5 m/s. Obtener la ecuación de la onda. (**2,5 puntos)**

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Se lanza un objeto desde la superficie de un planeta de radio R con una velocidad igual a la velocidad de escape v_e. Determinar a cuántos radios de distancia del centro del planeta el objeto habrá perdido el 90 % de su energía cinética. **(2,5 puntos)**

Solución

Las energías cinéticas y potenciales en los dos puntos de interés son:

-En la superficie, $r = R$

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_e^2, \quad U_1 = -\frac{GMm}{R}$$

-En la distancia buscada r

$$K_2 = 0{,}1 \cdot K_1, \quad U_2 = -\frac{GMm}{r}$$

Aplicamos conservación de la energía mecánica

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Despejando en la ecuación resultante obtenemos:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{0{,}45 v_e^2}{GM}$$

Ahora podemos utilizar la ecuación de la velocidad de escape de un planeta:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

y sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{0.9GM}{GMR} = \frac{1}{R} - \frac{0.9}{R} = \frac{0.1}{R}$$

$$r = 10\ R$$

Es decir, 10 veces el radio del planeta, independientemente del valor de la velocidad de escape.

2. Un electrón es lanzado con una velocidad de 2×10^6 m/s dentro de un campo eléctrico uniforme de 5000 V/m. Si la velocidad inicial del electrón tiene la misma dirección y sentido que las líneas del campo:
-Determinar la velocidad del electrón al cabo de $1{,}7\times10^{-9}$ s. **(1 punto)**
-Calcular la variación de energía potencial que ha experimentado el electrón en ese intervalo de tiempo. **(1,5 puntos)**
(Datos: e =$1{,}6\times10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1\times10^{-31}$ kg)

Solución

Se trata de un movimiento unidimensional en el que la fuerza que experimenta el electrón debido a la presencia del campo eléctrico tiene sentido contrario al propio campo y por tanto a la velocidad inicial. Esta fuerza es constante y vale $F = -eE$, y producirá una aceleración también constante que decelera al electrón:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-eE}{m}$$

Como se trata de un movimiento uniformemente acelerado tenemos que

$$v = v_0 + at = v_0 - \frac{eE}{m}t = 0{,}505\times10^{-6}\ \text{m/s}.$$

Ahora podemos calcular la variación de la energía potencial de dos formas distintas.

a) Calculamos la distancia recorrida por el electrón

$$v^2 - v_0^{\ 2} = 2ad = \frac{-2eEd}{m} \quad \rightarrow\ d = \frac{m}{2eE}\ \left(v_0^{\ 2} - v^2\right) = 0{,}0021\ \text{m}.$$

y calculamos la diferencia de energía potencial entre dos puntos del campo separados por esta distancia d:

$$\Delta U = q\Delta V = -qEd = eEd = 1{,}70\times10^{-18}\ \text{J}$$

b) Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica

$$\Delta U = -\Delta E_c = \frac{1}{2}m_e(v_0^{\ 2} - v^2) = 1{,}70\times10^{-18}\ \text{J}$$

3. Un objeto de 2 kg se sujeta a un muelle fijo horizontal con una constante $k = 196$ N/m. El objeto se desplaza una distancia de 5 cm de su posición de equilibrio y se deja en libertad en el tiempo $t = 0$ s. Obtener la ecuación de la aceleración del objeto en función del tiempo suponiendo que no existe ningún tipo de rozamiento. **(2 puntos).**

Solución

De las condiciones del enunciado está claro que el objeto realizará un movimiento armónico simple cuyas ecuaciones generales son

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta)$$

con $\omega = 2\pi / T$. En nuestro caso tenemos que

$$\omega = \sqrt{k / m} = 9,9 \text{ rad/s}$$

y la fase inicial

$$\delta = 0$$

ya que $x(0) = A = 5 \text{ cm}$. La ecuación de la aceleración en función del tiempo será

$$a = -490\cos(9,9t) \text{ cm/s}^2$$

4. Responder a las siguientes cuestiones sobre física nuclear:

- Supongamos que tenemos tres especies radiactivas y sabemos que cada una emite un tipo distinto radiación: α, β^- y γ, pero no sabemos el tipo de desintegración de cada una. Si hacemos pasar cada radiación por un campo magnético perpendicular a la dirección de emisión, ¿esto nos ayudará a discriminar el tipo de radiación emitida por cada fuente? Razonar la respuesta. **(1,5 puntos)**

Solución

Es evidente que sí, puesto que la radiación alfa está compuesta por partículas con carga positiva (núcleos de He), la radiación beta por partículas con carga negativa (electrones) y la radiación gamma por fotones sin carga. En los dos primeros casos, las fuerzas que experimentarán las partículas de las radiaciones, debidas al campo magnético, tendrán sentidos opuestos (por tener cargas opuestas) y distinto módulo (por tener diferente carga neta), de modo que unas partículas se desviarán en un sentido y las otras en otro (describiendo además circunferencias con distintos radios por tener masa y carga netas diferentes), mientras que la dirección de los fotones sin carga de la radiación gamma no se verá afectada.

- ¿Qué núcleo será más estable, el ${}^3_1\text{H}$ (tritio) o el ${}^3_2\text{He}$ (helio)? Razonar la respuesta. **(1,5 puntos)**

Solución

El núcleo de helio consta de dos protones y un neutrón, mientras que el núcleo de tritio está formado por dos neutrones y un protón. Será más fácil romper el núcleo del helio debido a la repulsión coulombiana entre los dos protones, por lo que será más estable el núcleo de tritio.

OPCIÓN B

1. Supongamos que un satélite tarda el mismo tiempo en describir una órbita alrededor de la Tierra en su superficie que en describir una órbita alrededor de la Luna también en su superficie. Sabiendo que el radio de la Tierra es 3,67 veces más grande que el radio de la luna ($R_T = 3{,}67 \times R_L$), calcular la relación entre las masas de la Tierra y la Luna. **(2,5 puntos)**

Solución

Como el satélite se mueve en ambos casos bajo la acción del campo gravitatorio de cada astro tenemos que

$$G\frac{M_T m}{R_T^2} = m\frac{v_T^2}{R_T} = m\omega_T^2 R_T = m\frac{4\pi^2}{T_T^2}R_T$$

$$G\frac{M_L m}{R_L^2} = m\frac{v_L^2}{R_L} = m\omega_L^2 R_L = m\frac{4\pi^2}{T_L^2}R_L$$

Como $T_T = T_L$, dividiendo ambas ecuaciones llegamos a

$$\frac{M_T}{M_L} = \frac{R_T^{\,3}}{R_L^{\,3}}$$

Por lo que el resultado final será $M_T = 49{,}4 \times M_L$.

2. Sabemos que en una región del espacio existe un campo magnético B constante y uniforme. Para determinar su módulo, dirección y sentido, lanzamos una partícula con carga positiva q_0 y velocidad **v** en diferentes direcciones del espacio, y medimos la fuerza **F** que experimenta en el momento en el que la partícula penetra en la región donde existe el campo. Cuando $\mathbf{v} = v_0\mathbf{k}$, la partícula no se desvía de su trayectoria al penetrar en el campo. Sin embargo, cuando $\mathbf{v} = v_0\mathbf{j}$, la partícula experimenta una fuerza $\mathbf{F} = -F_0\mathbf{i}$ debido a la presencia del campo magnético. Determinar **B** en función de q_0, v_0 y F_0. **(3 puntos)**

Solución

Como en el primer ensayo la partícula no se desvía, la fuerza que experimenta es nula. Sabiendo que la fuerza que experimenta es

$$\mathbf{F} = q_0\mathbf{v}\times\mathbf{B} = 0,$$

nos damos cuenta de que el campo magnético debe ser paralelo al vector velocidad, es decir, sólo debe tener una componente no nula en la dirección Z:

$$\mathbf{B} = B\mathbf{k}\,.$$

En el segundo caso, la fuerza que experimenta es $\mathbf{F} = -F_0\mathbf{i}$, y teóricamente debería ser

$$\mathbf{F} = q_0\mathbf{v}\times\mathbf{B} = q_0 v_0 B\mathbf{i}\,.$$

Igualando esta expresión a la fuerza obtenida en el experimento obtenemos finalmente que:

$$\mathbf{B} = -\frac{F_0}{q_0 v_0}\mathbf{k}\,.$$

3. Un rayo de luz monocromática incide oblicuamente desde un medio de índice de refracción 1,1 hacia otro medio de índice de refracción 2,13. Obtener el ángulo de refracción sabiendo que el rayo reflejado forma un ángulo de 60º con la superficie plana entre ambos medios. **(2 puntos)**

Solución

La ley de la reflexión establece que el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia. Como el ángulo de reflexión es $90º - 60º = 30º$, tenemos que $\theta_i = 30º$.

Ahora podemos aplicar la ley de la refracción

$$n_i \sin\theta_i = n_r \sin\theta_r$$

y despejar

$$\theta_r = \arcsin\left(\sin\theta_i \frac{n_i}{n_r}\right) = 15º$$

4. El extremo izquierdo (origen de coordenadas) de una cuerda en tensión situada en el eje X oscila con un movimiento armónico en el que el desplazamiento transversal varía con el tiempo según la ecuación $y(t) = 0,2\,\mathrm{sen}(-\pi t - 2,1)$ m. Esto genera una onda armónica transversal que se propaga por la cuerda en el sentido positivo del eje X a 0,5 m/s. Obtener la ecuación de la onda. (**2,5 puntos)**

Solución

La ecuación general de una función de onda armónica que se propaga en el sentido positivo del eje X es

$$y(x,t) = A\mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta)\,.$$

En el origen $x = 0$ tenemos que

$$y(x) = A\mathrm{sen}(-\omega t + \delta)\,.$$

Igualando con la expresión anterior obtenemos que

$$A = 0,2 \text{ m}$$

$$\omega = \pi \text{ rad/s}$$

$$\delta = -2,1 \text{ rad}$$

Podemos calcular el número de onda partir de los datos del problema:

$$k = \frac{\omega}{v} = 2\pi \text{ rad/m}\,,$$

La ecuación final de la onda será

$$y(x,t) = 0,2\mathrm{sen}(2\pi x - \pi t - 2,1) \text{ m}\,.$$

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Se lanza un objeto desde la superficie de un planeta de radio R con una velocidad igual a la velocidad de escape v_e. Determinar a cuántos radios de distancia del centro del planeta el objeto habrá perdido el 50 % de su energía cinética. **(2,5 puntos)**

2. Sabemos que en una región del espacio existe un campo magnético B constante y uniforme. Para determinar su módulo, dirección y sentido, lanzamos una partícula con carga positiva q_0 y velocidad **v** en diferentes direcciones del espacio, y medimos la fuerza **F** que experimenta en el momento en el que la partícula penetra en la región donde existe el campo. Cuando $\mathbf{v} = v_0\mathbf{k}$, la partícula no se desvía de su trayectoria al penetrar en el campo. Sin embargo, cuando $\mathbf{v} = v_0\mathbf{j}$, la partícula experimenta una fuerza $\mathbf{F} = -F_0\mathbf{i}$ debido a la presencia del campo magnético. Determinar **B** en función de q_0, v_0 y F_0. **(3 puntos)**

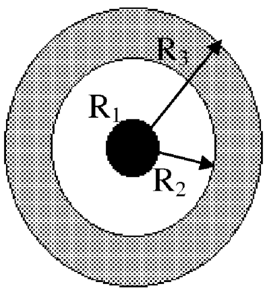
3. Supongamos que un cuerpo realiza un movimiento armónico simple alrededor de su posición de equilibrio ($x = 0$) debido a la acción de una fuerza $F = -kx$ con $k = 10$ N/m. La amplitud de la oscilación es 2 m y el tiempo que tarda es describir una oscilación completa es 2 segundos. Sabiendo que en $t = 0$ el desplazamiento es máximo y positivo, representar gráficamente la variación de la energía potencial en función del tiempo (no es necesario una representación exacta, basta simplemente con indicar los valores máximos y mínimos de cada función, los puntos de corte con los ejes y la forma de las funciones). **(2,5 puntos)**

4. Una fuente radiactiva tiene un periodo de semidesintegración de 1 minuto. En el tiempo $t = 0$ se observa que la fuente tiene una actividad (número de desintegraciones por unidad de tiempo) de 2000 desintegraciones/s. Determinar la actividad de la fuente al cabo de 10 minutos. **(2 puntos)**

OPCIÓN B

1. Supongamos que tenemos dos satélites artificiales de la misma masa describiendo órbitas circulares estacionarias de radios R_1 y R_2 respectivamente alrededor de la Tierra bajo la acción de su campo gravitatorio. Suponiendo que el radio de la órbita del primer satélite es menor que el radio de la órbita del segundo, es decir, que $R_1 < R_2$, ¿qué satélite tendrá mayor velocidad lineal? **(2 puntos)**

2. Una esfera hueca de radio interior R_2 y radio exterior R_3 (ver figura) contiene una carga uniformemente distribuida por todo su volumen con una densidad ρ. En su centro hay una esfera sólida de radio R_1 cargada uniformemente con una carga total q.



Encuéntrese la magnitud y dirección del campo eléctrico creado por esta distribución de carga para:

a) $0 < r < R_1$ **(1 punto)**

b) $R_2 < r < R_3$ **(2 puntos)**

3. Provocamos en una cuerda tensa una onda armónica transversal $y(x,t)$ de 0,2 m de longitud de onda que se propaga en la dirección y sentido positivo del eje X con una velocidad de 10 m/s. En el origen tenemos que $y(0,0) = 0,5\times10^{-2}$ m moviéndose hacia abajo. Si el módulo de la velocidad máxima de cualquier partícula de la cuerda es π m/s, determinar la ecuación de la onda. **(2,5 puntos)**

4. Se ilumina la placa (cátodo) de una célula fotoeléctrica con luz azul de 460 nm de longitud de onda. Los fotoelectrones arrancados del metal inciden sobre una segunda placa (ánodo) que se encuentra en frente del cátodo y a un potencial negativo con respecto a éste que puede variarse a voluntad. De este modo se produce una corriente debida al flujo de electrones que van del cátodo al ánodo. Cuando el potencial del ánodo es de -550 mV se observa que la intensidad de la corriente se hace súbitamente cero. Obtener la función de trabajo del metal del cátodo. **(2,5 puntos)**

Datos: $h = 6{,}63\times10^{-34}$ J·s $= 4{,}14\times10^{-15}$ eV·s. $c = 3\times10^{8}$ m/s. eV $= 1{,}60\times10^{-19}$ J. $e = 1{,}60\times10^{-19}$ C

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Se lanza un objeto desde la superficie de un planeta de radio R con una velocidad igual a la velocidad de escape v_e. Determinar a cuántos radios de distancia del centro del planeta el objeto habrá perdido el 50 % de su energía cinética. **(2,5 puntos)**

Solución

Las energías cinéticas y potenciales en los dos puntos de interés son:

-En la superficie, $r = R$

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_e^2, \quad U_1 = -\frac{GMm}{R}$$

-En la distancia buscada r

$$K_2 = 0{,}5 \cdot K_1, \quad U_2 = -\frac{GMm}{r}$$

Aplicamos conservación de la energía mecánica

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Despejando en la ecuación resultante obtenemos:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{0{,}25 v_e^2}{GM}$$

Ahora podemos utilizar la ecuación de la velocidad de escape de un planeta:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

y sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{0.5GM}{GMR} = \frac{1}{R} - \frac{0.5}{R} = \frac{0.5}{R}$$

$$r = 2\,R$$

Es decir, 2 veces el radio del planeta, independientemente del valor de la velocidad de escape.

2. Sabemos que en una región del espacio existe un campo magnético B constante y uniforme. Para determinar su módulo, dirección y sentido, lanzamos una partícula con carga positiva q_0 y velocidad **v** en diferentes direcciones del espacio, y medimos la fuerza **F** que experimenta en el momento en el que la partícula penetra en la región donde existe el campo. Cuando $\mathbf{v} = v_0\mathbf{k}$, la partícula no se desvía de su trayectoria al penetrar en el campo. Sin embargo, cuando $\mathbf{v} = v_0\mathbf{j}$, la partícula experimenta una fuerza $\mathbf{F} = -F_0\mathbf{i}$ debido a la presencia del campo magnético. Determinar **B** en función de q_0, v_0 y F_0. **(3 puntos)**

<u>Solución</u>

Como en el primer ensayo la partícula no se desvía, la fuerza que experimenta es nula. Sabiendo que la fuerza que experimenta es

$$\mathbf{F} = q_0\mathbf{v}\times\mathbf{B} = 0,$$

nos damos cuenta de que el campo magnético debe ser paralelo al vector velocidad, es decir, sólo debe tener una componente no nula en la dirección Z:

$$\mathbf{B} = B\mathbf{k}.$$

En el segundo caso, la fuerza que experimenta es $\mathbf{F} = -F_0\mathbf{i}$, y teóricamente debería ser

$$\mathbf{F} = q_0\mathbf{v}\times\mathbf{B} = q_0 v_0 B\mathbf{i}.$$

Igualando esta expresión a la fuerza obtenida en el experimento obtenemos finalmente que:

$$\mathbf{B} = -\frac{F_0}{q_0 v_0}\mathbf{k}.$$

3. Supongamos que un cuerpo realiza un movimiento armónico simple alrededor de su posición de equilibrio ($x = 0$) debido a la acción de una fuerza $F = -kx$ con $k = 10$ N/m. La amplitud de la oscilación es 2 m y el tiempo que tarda es describir una oscilación completa es 2 segundos. Sabiendo que en $t = 0$ el desplazamiento es máximo y positivo, representar gráficamente la variación de la energía potencial en función del tiempo (no es necesario una representación exacta, basta simplemente con indicar los valores máximos y mínimos de cada función, los puntos de corte con los ejes y la forma de las funciones). **(2,5 puntos)**

<u>Solución</u>

La ecuación general del movimiento es

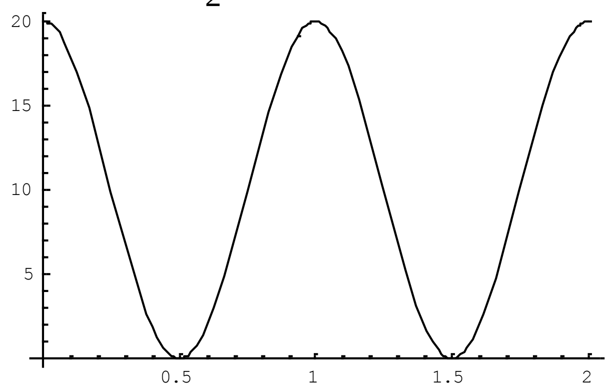
$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

De los datos del enunciado deducimos que la fase inicial es nula ($\delta = 0$) ya que $x(0) = A = 2$ m, y la frecuencia angular es $\omega = 2\pi / T = \pi$ rad/s. Por lo tanto, la ecuación del movimiento será

$$x = 2\cos(\pi t) \text{ m}$$

y la energía potencial será:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = 20\cos^2(\pi t) \text{ J}$$



4. Una fuente radiactiva tiene un periodo de semidesintegración de 1 minuto. En el tiempo $t = 0$ se observa que la fuente tiene una actividad (número de desintegraciones por unidad de tiempo) de 2000 desintegraciones/s. Determinar la actividad de la fuente al cabo de 10 minutos. **(2 puntos)**

Solución

La actividad de una muestra varía como

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}t}.$$

En nuestro caso tendremos

$$A(t) = 2000e^{-10\ln 2} = 2000 \times 2^{-10} = 1{,}95 \text{ Bq.}$$

OPCIÓN B

1. Supongamos que tenemos dos satélites artificiales de la misma masa describiendo órbitas circulares estacionarias de radios R_1 y R_2 respectivamente alrededor de la Tierra bajo la acción de su campo gravitatorio. Suponiendo que el radio de la órbita del primer satélite es menor que el radio de la órbita del segundo, es decir, que $R_1 < R_2$, ¿qué satélite tendrá mayor velocidad lineal? **(2 puntos)**

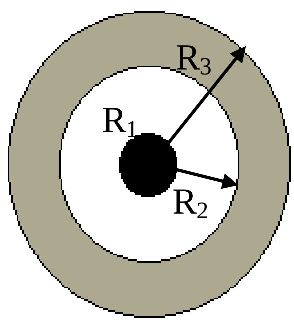
Solución

Podemos calcular la energía cinética de cualquier satélite sabiendo que la fuerza gravitatoria de la Tierra es la responsable del movimiento orbital del satélite:

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{M_T m}{R^2} \quad \rightarrow \quad E_c = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{M_T m}{2R} \ .$$

Vemos que cuanto mayor es el radio de la órbita menor es la energía cinética del satélite. Como la masa de los dos satélites es la misma, llegamos a la conclusión de que el satélite con menor órbita R_1 es el que tendrá mayor velocidad lineal.

2. Una esfera hueca de radio interior R_2 y radio exterior R_3 (ver figura) contiene una carga uniformemente distribuida por todo su volumen con una densidad ρ. En su centro hay una esfera sólida de radio R_1 cargada uniformemente con una carga total q.



Encuéntrese la magnitud y dirección del campo eléctrico creado por esta distribución de carga para:

a) $0 < r < R_1$ **(1 punto)**

b) $R_2 < r < R_3$ **(2 puntos)**

Solución

Este problema se resuelve de forma muy sencilla aplicando el teorema de Gauss

$$\phi = \oint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = 4\pi k Q_{\text{interior}} \, ,$$

y considerando superficies esféricas concéntricas de radio r, ya que en este caso tenemos

$$\mathbf{E}(r) = \frac{kQ_{\text{interior}}(r)}{r^2}\hat{\mathbf{n}}$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario normal a la superficie de la esfera considerada apuntando hacia afuera (también considerado como vector radial) .

a) Cuando $0 < r < R_1$ tenemos que

$$Q_{\text{interior}}(r) = V(r) \times \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} = \frac{r^3}{R_1^3} q$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{kq}{R_1^3} r \; \hat{\mathbf{n}}$$

b) Cuando $R_2 < r < R_3$ tenemos que

$$Q_{\text{interior}}(r) = q + V\rho = q + \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_2^3\right)\rho$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{k\left(q + \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_2^3\right)\rho\right)}{r^2}\hat{\mathbf{n}}$$

3. Provocamos en una cuerda tensa una onda armónica transversal $y(x,t)$ de 0,2 m de longitud de onda que se propaga en la dirección y sentido positivo del eje X con una velocidad de 10 m/s. En el origen tenemos que $y(0,0) = 0,5 \times 10^{-2}$ m moviéndose hacia abajo. Si el módulo de la velocidad máxima de cualquier partícula de la cuerda es π m/s, determinar la ecuación de la onda. **(2,5 puntos)**

<u>Solución</u>

La ecuación general de una función de onda armónica que se propaga en el sentido positivo del eje X es

$$y(x,t) = A\text{sen}(kx - \omega t + \delta)$$

y el módulo de la velocidad máxima de vibración es

$$v_{\max} = \max\left|\frac{dy}{dt}\right| = A\omega$$

Ahora debemos calcular cada magnitud a partir de los datos del enunciado:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,2} = 10\pi = 31,4 \text{ rad/m}$$

$$\omega = kv = 100\pi = 314,2 \text{ rad/s}$$

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{\pi}{100\pi} = 0,01 \text{ m}$$

por lo que la función de onda será

$$y(x,t) = 0,01\,\text{sen}(10\pi x - 100\pi t + \delta) \text{ m}\,.$$

Para calcular la fase sabemos que

$$y(0,0) = 10^{-2}\text{sen}(\delta) = 0,5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

Despejando obtenemos

$$\delta = \text{arcsen}\left(0,5\right) = \frac{\pi}{6} \text{ ó } \frac{5\pi}{6} \text{ rad}\,.$$

Como sabemos que se mueve hacia abajo tenemos que

$$v(0,0) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0,x=0} = -\pi\cos(\delta) < 0\,,$$

Por lo que $\delta = \dfrac{\pi}{6}$ rad.

La solución es

$$y(x,t) = 0,01\ \text{sen}(10\pi x - 100\pi t + \pi/6)\ \text{m}$$
$$= 0,01\ \text{sen}(31,4x - 314,2\pi t + 0,52)\ \text{m}$$

4. Se ilumina la placa (cátodo) de una célula fotoeléctrica con luz azul de 460 nm de longitud de onda. Los fotoelectrones arrancados del metal inciden sobre una segunda placa (ánodo) que se encuentra en frente del cátodo y a un potencial negativo con respecto a éste que puede variarse a voluntad. De este modo se produce una corriente debida al flujo de electrones que van del cátodo al ánodo. Cuando el potencial del ánodo es de -550 mV se observa que la intensidad de la corriente se hace súbitamente cero. Obtener la función de trabajo del metal del cátodo. **(2,5 puntos)**

Datos: $h = 6,63\times10^{-34}$ J·s $= 4,14\times10^{-15}$ eV·s. $c = 3\times10^{8}$ m/s. eV $= 1,60\times10^{-19}$ J. $e = 1,60\times10^{-19}$ C

<u>Solución</u>

La intensidad se hace nula cuando la energía cinética con que son emitidos los fotoelectrones es igual al aumento de su energía potencial en el trayecto cátodo-ánodo (conservación de la energía mecánica):

$$E_{c\,\max} = \frac{1}{2}m_e v_{\max}^2 = q\Delta V = 0,55\ \text{eV}\,.$$

Por otro lado tenemos que

$$E_{c\,\max} = h\nu - \phi\,.$$

Despejamos la función de trabajo

$$\phi = h\nu - E_{c\,\max} = h\frac{c}{\lambda} - 0,55 = 2,15\ \text{eV}\,.$$

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Un satélite se mueve con velocidad constante en una órbita circular alrededor de la Tierra bajo la acción de su campo gravitatorio. Si su aceleración es 8,14 m/s^2 y el periodo de su órbita es de 97 minutos, calcular el radio de la órbita. **(2 puntos)**

2. La región del espacio donde existe un campo magnético está comprendida por todos aquellos punto del espacio en los que la coordenada y es mayor o igual que 0. En esa región el campo magnético es constante y uniforme, valiendo $\mathbf{B} = B_0\mathbf{k}$. Situamos una partícula con carga positiva q_0, masa m_0 y velocidad $\mathbf{v} = v_0\mathbf{j}$, siendo $v_0 > 0$, en el origen de coordenadas. Describir el movimiento de la partícula, calcular el tiempo que la partícula estará en la región del campo magnético y en qué punto del espacio abandonará dicho campo, en función de los datos del enunciado. **(3 puntos)**

3. Un rayo de luz monocromática incide oblicuamente desde un medio de índice de refracción 1,1 hacia otro medio. Calcular el índice de refracción del segundo medio sabiendo que el rayo reflejado y el rayo refractado forman, respectivamente, un ángulo de 60º y 75º con la superficie plana entre ambos medios. **(2 puntos)**

4. Por una cuerda tensa se propaga una onda armónica transversal $y(x,t)$ en la dirección y sentido positivo del eje X con una velocidad de 10 m/s. Cada punto de la onda realiza un movimiento armónico simple describiendo 50 ciclos por segundo. Sabiendo que en el origen tenemos que $y(0,0) = 0{,}5 \times 10^{-2}$ m moviéndose hacia abajo y que el módulo de la aceleración máxima de cualquier partícula de la cuerda es $100\pi^2$ m/s, determinar la ecuación de la onda. **(3 puntos)**

OPCIÓN B

1. Supongamos que tenemos dos satélites artificiales de la misma masa describiendo órbitas circulares estacionarias de radios R_1 y R_2 respectivamente alrededor de la Tierra bajo la acción de su campo gravitatorio. Suponiendo que el radio de la órbita del primer satélite es menor que el radio de la órbita del segundo, es decir, que $R_1 < R_2$:

-¿Qué satélite tendrá mayor velocidad lineal? **(1,5 puntos)**

-¿Qué satélite tendrá mayor momento angular? **(1 punto)**

2. Un electrón es lanzado con una velocidad de 2×10^6 m/s dentro de un campo eléctrico uniforme de 5000 V/m. Si la velocidad inicial del electrón tiene la misma dirección y sentido que las líneas del campo:

-Determinar la velocidad del electrón al cabo de $1{,}7\times10^{-9}$ s. **(1 punto)**

-Calcular la variación de energía potencial que ha experimentado el electrón en ese intervalo de tiempo. **(1,5 puntos)**

Datos: $e = 1{,}6 \times10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1\times10^{-31}$ kg

3. Un objeto de 3 kg ligado a un muelle oscila libremente realizando un movimiento armónico simple de amplitud 4 cm en el que la energía total es 0,01 J.

- Calcular el módulo de la velocidad máxima del objeto. **(1 punto)**
- Calcular el módulo de la velocidad cuando el objeto se encuentra a 2 cm de la posición de equilibrio. **(1,5 puntos)**

4. Al incidir sobre un metal una radiación de 200 nm de longitud de onda, los fotoelectrones son emitidos con una velocidad máxima de 10^6 m/s. Calcular la frecuencia umbral para que se produzca la fotoemisión de electrones en ese metal. **(2,5 puntos)**

Datos: $h = 6{,}63\times10^{-34}$ J·s $= 4{,}14\times10^{-15}$ eV·s. $c = 3\times10^8$ m/s. eV $= 1{,}60\times10^{-19}$ J. $m_e = 9{,}1\times10^{-31}$ kg.

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Un satélite se mueve con velocidad constante en una órbita circular alrededor de la Tierra bajo la acción de su campo gravitatorio. Si su aceleración es 8,14 m/s^2 y el periodo de su órbita es de 97 minutos, calcular el radio de la órbita. **(2 puntos)**

<u>Solución</u>

La aceleración del satélite es la aceleración centrípeta:

$$g = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = 6984 \text{ km}$$

2. La región del espacio donde existe un campo magnético está comprendida por todos aquellos punto del espacio en los que la coordenada y es mayor o igual que 0. En esa región el campo magnético es constante y uniforme, valiendo $\mathbf{B} = B_0\mathbf{k}$. Situamos una partícula con carga positiva q_0, masa m_0 y velocidad $\mathbf{v} = v_0\mathbf{j}$, siendo $v_0 > 0$, en el origen de coordenadas. Describir el movimiento de la partícula, calcular el tiempo que la partícula estará en la región del campo magnético y en qué punto del espacio abandonará dicho campo, en función de los datos del enunciado. **(3 puntos)**

<u>Solución</u>

Al penetrar la partícula en la región donde existe el campo magnético experimentará una fuerza perpendicular a la velocidad:

$$\mathbf{F} = q_0\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q_0 v_0 B_0 \mathbf{i} \,,$$

por lo que el plano del movimiento será el plano XY y la trayectoria descrita será una semicircunferencia recorrida en el sentido horario, de radio (obtenido de igualar la fuerza magnética con la fuerza centrípeta)

$$R = \frac{m_0 v_0}{q_0 B_0}.$$

La partícula entrará en la región del campo por el origen de coordenadas y abandonará el campo en el punto $(2R,0,0) = \left(\frac{2m_0 v_0}{q_0 B_0},0,0\right)$ con una velocidad $\mathbf{v} = -v_0\mathbf{j}$. El tiempo de permanencia en la región del campo será igual a la mitad del periodo del movimiento circular, o periodo ciclotrón:

$$t = \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}\frac{2\pi R}{v_0} = \frac{\pi m_0}{q_0 B_0}.$$

3. Un rayo de luz monocromática incide oblicuamente desde un medio de índice de refracción 1,1 hacia otro medio. Calcular el índice de refracción del segundo medio sabiendo que el rayo reflejado y el rayo refractado forman, respectivamente, un ángulo de 60º y 75º con la superficie plana entre ambos medios. **(2 puntos)**

Solución

La ley de la reflexión establece que el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia. Como el ángulo de reflexión es $90º - 60º = 30º$, tenemos que $\theta_i = 30º$.

Ahora podemos aplicar la ley de la refracción, con $\theta_r = 90º - 75º = 15º$

$$n_i \sin\theta_i = n_r \sin\theta_r$$

y despejar

$$n_r = n_i \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = 2{,}13$$

4. Por una cuerda tensa se propaga una onda armónica transversal $y(x,t)$ en la dirección y sentido positivo del eje X con una velocidad de 10 m/s. Cada punto de la onda realiza un movimiento armónico simple describiendo 50 ciclos por segundo. Sabiendo que en el origen tenemos que $y(0,0) = 0{,}5\times10^{-2}$ m moviéndose hacia abajo y que el módulo de la aceleración máxima de cualquier partícula de la cuerda es $100\pi^2$ m/s, determinar la ecuación de la onda. **(3 puntos)**

Solución

La ecuación general de una función de onda armónica que se propaga en el sentido positivo del eje X es

$$y(x,t) = A\mathrm{sen}(kx - \omega t + \delta)$$

y el módulo de la aceleración máxima de vibración es

$$a_{\max} = \max\left|\frac{d^2y}{dt^2}\right| = A\omega^2$$

Ahora debemos calcular cada magnitud a partir de los datos del enunciado:

$$\omega = 2\pi f = 100\pi = 314,2 \text{ rad/s}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = 10\pi = 31,4 \text{ rad/m}$$

$$A = \frac{a_{\max}}{\omega^2} = \frac{100\pi^2}{100^2\pi^2} = 0,01 \text{ m}$$

por lo que la función de onda será

$$y(x,t) = 0,01 \text{ sen}(10\pi x - 100\pi t + \delta) \text{ m}.$$

Para calcular la fase sabemos que

$$y(0,0) = 10^{-2}\text{sen}(\delta) = 0,5\times 10^{-2} \text{ m}$$

Despejando obtenemos

$$\delta = \text{arcsen}(0,5) = \frac{\pi}{6} \text{ ó } \frac{5\pi}{6} \text{ rad}.$$

Como sabemos que se mueve hacia abajo tenemos que

$$v(0,0) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0,x=0} = -\pi\cos(\delta) < 0,$$

Por lo que $\delta = \frac{\pi}{6}$ rad.

La solución es

$$y(x,t) = 0,01 \text{ sen}(10\pi x - 100\pi t + \pi/6) \text{ m}$$
$$=0,01 \text{ sen}(31,4x - 314,2\pi t + 0,52) \text{ m}$$

OPCIÓN B

1. Supongamos que tenemos dos satélites artificiales de la misma masa describiendo órbitas circulares estacionarias de radios R_1 y R_2 respectivamente alrededor de la Tierra bajo la acción de su campo gravitatorio. Suponiendo que el radio de la órbita del primer satélite es menor que el radio de la órbita del segundo, es decir, que $R_1 < R_2$:

-¿Qué satélite tendrá mayor velocidad lineal? **(1,5 puntos)**

-¿Qué satélite tendrá mayor momento angular? **(1 punto)**

Solución

Podemos calcular la energía cinética de cualquier satélite sabiendo que la fuerza gravitatoria de la Tierra es la responsable del movimiento orbital del satélite:

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{M_T m}{R^2} \quad \rightarrow \quad E_c = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{M_T m}{2R} \quad .$$

Vemos que cuanto mayor es el radio de la órbita menor es la energía cinética del satélite. Como la masa de los dos satélites es la misma, llegamos a la conclusión de que el satélite con menor órbita R_1 es el que tendrá mayor velocidad lineal.

El módulo del momento angular es

$$L = mRv = m\sqrt{GM_T R}$$

donde hemos sustituido la velocidad lineal obtenida en el apartado anterior:

$$v = \sqrt{G\frac{M_T}{R}} \; .$$

Por lo tanto tendrá mayor momento angular el satélite con mayor radio orbital, esto es, el segundo satélite.

2. Un electrón es lanzado con una velocidad de 2×10^6 m/s dentro de un campo eléctrico uniforme de 5000 V/m. Si la velocidad inicial del electrón tiene la misma dirección y sentido que las líneas del campo:

-Determinar la velocidad del electrón al cabo de $1,7\times10^{-9}$ s. **(1 punto)**

-Calcular la variación de energía potencial que ha experimentado el electrón en ese intervalo de tiempo. **(1,5 puntos)**

(Datos: e =$1,6 \times10^{-19}$ C; $m_e = 9,1\times10^{-31}$ kg)

Solución

Se trata de un movimiento unidimensional en el que la fuerza que experimenta el electrón debido a la presencia del campo eléctrico tiene sentido contrario al propio campo y por tanto a la velocidad inicial. Esta fuerza es constante y vale $F = -eE$, y producirá una aceleración también constante que decelera al electrón:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-eE}{m}$$

Como se trata de un movimiento uniformemente acelerado tenemos que

$$v = v_0 + at = v_0 - \frac{eE}{m}t = 0,505\times10^{-6} \text{ m/s} \, .$$

Ahora podemos calcular la variación de la energía potencial de dos formas distintas.

a) Calculamos la distancia recorrida por el electrón

$$v^2 - v_0^2 = 2ad = \frac{-2eEd}{m} \quad \rightarrow \; d = \frac{m}{2eE}\left(v_0^2 - v^2\right) = 0,0021 \text{ m}.$$

y calculamos la diferencia de energía potencial entre dos puntos del campo separados por esta distancia *d*:

$$\Delta U = q\Delta V = -qEd = eEd = 1,70\times 10^{-18} \text{ J}$$

b) Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica

$$\Delta U = -\Delta E_c = \frac{1}{2}m_e(v_0^2 - v^2) = 1,70\times 10^{-18} \text{ J}$$

3. Un objeto de 3 kg ligado a un muelle oscila libremente realizando un movimiento armónico simple de amplitud 4 cm en el que la energía total es 0,01 J.
- Calcular el módulo de la velocidad máxima del objeto. **(1 punto)**
- Calcular el módulo de la velocidad cuando el objeto se encuentra a 2 cm de la posición de equilibrio. **(1,5 puntos)**

Solución

Para calcular la velocidad máxima igualamos la energía cinética a la energía total, ya que en esta circunstancia la energía potencial será nula

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = E \quad \rightarrow \; v_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 0,082 \text{ m/s}$$

En cualquier punto de la oscilación se cumple que

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E \quad \rightarrow \; v = \sqrt{\frac{2E - kx^2}{m}}$$

Sólo necesitamos calcular la constante de recuperación *k*:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad \rightarrow \; k = \frac{2E}{A^2} = 12,5 \text{ N/m}$$

y sustituir los valores en la ecuación anterior:

$$v = \sqrt{\frac{2E - kx^2}{m}} = 0,071 \text{ m/s}$$

4. Al incidir sobre un metal una radiación de 200 nm de longitud de onda, los fotoelectrones son emitidos con una velocidad máxima de 10^6 m/s. Calcular la frecuencia umbral para que se produzca la fotoemisión de electrones en ese metal. **(2,5 puntos)**

Datos: $h = 6,63\times 10^{-34}$ J·s $= 4,14\times 10^{-15}$ eV·s. $c = 3\times 10^8$ m/s. eV $= 1,60\times 10^{-19}$ J. $m_e = 9,1\times 10^{-31}$ kg.

Solución

El balance energético en el efecto fotoeléctrico tiene la forma

$$E_{c\,\max} = h\nu - \phi$$

Por otro lado, la frecuencia umbral se calcula a partir de la función de trabajo, o energía de extracción del metal, ϕ, como

$$\nu_u = \frac{\phi}{h}.$$

Sustituyendo la ecuación de arriba en la de abajo tenemos

$$\nu_u = \frac{\phi}{h} = \frac{h\nu - E_{c\,\max}}{h} = \frac{hc/\lambda - m_e v_{\max}^2/2}{h} = 8{,}1\times 10^{14}\ \text{Hz}$$

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

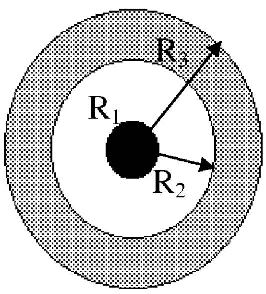
En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Una estación espacial se mueve con velocidad constante en una órbita circular estacionaria alrededor de la Tierra bajo la acción de su campo gravitatorio.
- Si su aceleración es 7 m/s^2 y el periodo de su órbita es de 2 horas, calcular el radio de la órbita. **(2 puntos)**
- ¿Con qué fuerza atraerá la Tierra a un astronauta de 70 kg que se encuentra en la estación? **(1 punto)**

2. Una esfera hueca de radio interior R_2 y radio exterior R_3 (ver figura) contiene una carga uniformemente distribuida por todo su volumen con una densidad ρ. En su centro hay una esfera sólida de radio R_1 cargada uniformemente con una carga total q.



Encuéntrese la magnitud y dirección del campo eléctrico creado por esta distribución de carga para:

a) $R_1 < r < R_2$ **(1 punto)**

b) $r > R_3$ **(1,5 puntos)**

3. Determinar el ángulo límite de incidencia a partir del cual se produce reflexión total entre un medio en el que la luz viaja a 2×10^5 km s^{-1} y el aire. **(1,5 puntos)**
¿Se podrá producir la reflexión total en las dos direcciones, medio→aire y aire→medio? Explicar razonadamente. **(1 punto)**
Datos: $n_{\text{aire}} = 1$. $c = 3\times10^8$ m/s.

4. La función de onda de una onda armónica que se propaga en una cuerda situada a lo largo del eje X es $y(x,t) = 0{,}03\,\text{sen}(2{,}2x + 3{,}5t)$, donde todas las magnitudes están en unidades del Sistema Internacional.
- Determinar cómo oscila un punto situado en el origen de coordenadas. (**1 punto)**
- Calcular la velocidad que tiene un punto de la cuerda situado en $x = 3$ m cuando $t = 2$ s. **(1 punto)**

OPCIÓN B

1. Supongamos que un satélite tarda el mismo tiempo en describir una órbita alrededor de la Tierra en su superficie que en describir una órbita alrededor de la Luna también en su superficie. Sabiendo que el radio de la Tierra es 3,67 veces más grande que el radio de la luna ($R_T = 3{,}67\times R_L$), calcular la relación entre las masas de la Tierra y la Luna. **(2,5 puntos)**

2. Supongamos una espira cuadrada de lado a situada en el plano del papel por la que circula una corriente de intensidad I en el sentido horario. La espira se encuentra en un campo magnético uniforme **B** perpendicular al plano de la espira saliendo del papel. Calcular la fuerza total que el campo magnético ejerce sobre la espira y cuál será el efecto de esas fuerzas sobre la misma: desplazarla, girarla, oprimirla o agrandarla. **(3 puntos)**

3. Considerar un objeto que realiza un movimiento armónico simple con la siguiente ecuación para la aceleración en función del tiempo: $a = -490\cos(9{,}9t)$ cm/s^2.
-¿Cuál es la amplitud de la oscilación? **(1 punto).**
-¿En qué tiempos alcanza el objeto los máximos desplazamientos? **(1 punto).**

4. Al incidir sobre un metal una radiación de 200 nm de longitud de onda, los fotoelectrones son emitidos con una velocidad máxima de 10^6 m/s. Calcular la frecuencia umbral para que se produzca la fotoemisión de electrones en ese metal. **(2,5 puntos)**

Datos: $h = 6{,}63\times10^{-34}$ J $\cdot$ s $= 4{,}14\times10^{-15}$ eV $\cdot$ s . $c = 3\times10^{8}$ m/s . eV $= 1{,}60\times10^{-19}$ J . $m_e = 9{,}1\times10^{-31}$ kg .

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Una estación espacial se mueve con velocidad constante en una órbita circular estacionaria alrededor de la Tierra bajo la acción de su campo gravitatorio.

- Si su aceleración es 7 m/s^2 y el periodo de su órbita es de 2 horas, calcular el radio de la órbita. **(2 puntos)**

- ¿Con qué fuerza atraerá la Tierra a un astronauta de 70 kg que se encuentra en la estación? **(1 punto)**

Solución

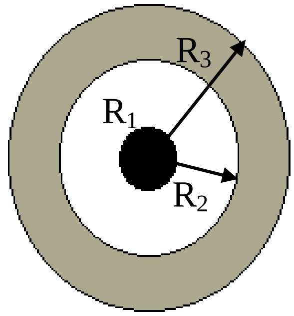
La aceleración del satélite es la aceleración centrípeta:

$$g = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = 9192 \text{ km}$$

El módulo de la fuerza con la que la Tierra atraerá al astronauta será

$$F = mg = 490 \text{ N}$$

2. Una esfera hueca de radio interior R_2 y radio exterior R_3 (ver figura) contiene una carga uniformemente distribuida por todo su volumen con una densidad ρ. En su centro hay una esfera sólida de radio R_1 cargada uniformemente con una carga total q.



Encuéntrese la magnitud y dirección del campo eléctrico creado por esta distribución de carga para:

a) $R_1 < r < R_2$ **(1 punto)**

b) $r > R_3$ **(1,5 puntos)**

Solución

Este problema se resuelve de forma muy sencilla aplicando el teorema de Gauss

$$\phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dA = 4\pi k Q_{\text{interior}},$$

y considerando superficies esféricas concéntricas de radio r, ya que en este caso tenemos

$$\mathbf{E}(r) = \frac{kQ_{\text{interior}}(r)}{r^2}\hat{\mathbf{n}}$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario normal a la superficie de la esfera considerada apuntando hacia afuera (también considerado como vector radial) .

a) Cuando $R_1 < r < R_2$

$$Q_{\text{interior}}(r) = q$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{kq}{r^2}\ \hat{\mathbf{n}}$$

b) Cuando $r > R_3$ tenemos que

$$Q_{\text{interior}}(r) = q + V\rho = q + \frac{4}{3}\pi\left(R_3^{\,3} - R_2^{\,3}\right)\rho$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{k\left(q + \frac{4}{3}\pi\left(R_3^{\,3} - R_2^{\,3}\right)\rho\right)}{r^2}\hat{\mathbf{n}}$$

3. Determinar el ángulo límite de incidencia a partir del cual se produce reflexión total entre un medio en el que la luz viaja a 2×10^5 km s^{-1} y el aire. **(1,5 puntos)**

¿Se podrá producir la reflexión total en las dos direcciones, medio→aire y aire→medio? Explicar razonadamente. **(1 punto)**

Datos: $n_{\text{aire}} = 1$. $c = 3\times10^8$ m/s.

Solución

El ángulo límite de reflexión total, θ_i^*, es aquel que produce un ángulo de refracción de 90º, $\theta_r = 90º$. Aplicando la ley de la refracción:

$$n_i \sin\theta_i = n_r \sin\theta_r$$

bajo este supuesto tenemos que

$$\theta_i^* = \arcsin\left(\frac{n_r}{n_i}\right) = \arcsin\left(\frac{v}{c}\right) = 41{,}8º\ .$$

(Recordamos que $n = c / v$)
Como se puede apreciar, para que se pueda producir la reflexión total, el medio refractante debe tener un índice de refracción menor que el medio de incidencia ($n_r < n_i$), o lo que es lo mismo, la velocidad de propagación de la luz en el medio refractante debe ser mayor que en el medio de incidencia ($v_r > v_i$). Por lo tanto, la reflexión total sólo podrá tener lugar en la dirección medio→aire, pero no al revés.

4. La función de onda de una onda armónica que se propaga en una cuerda situada a lo largo del eje X es $y(x,t) = 0{,}03\mathrm{sen}(2{,}2x + 3{,}5t)$, donde todas las magnitudes están en unidades del Sistema Internacional.

- Determinar cómo oscila un punto situado en el origen de coordenadas. (**1 punto)**
- Calcular la velocidad que tiene un punto de la cuerda situado en $x = 3$ m cuando $t = 2$ s. (**1 punto)**

Solución

La oscilación en el origen de coordenadas será

$$y(x=0,t) = 0{,}03\mathrm{sen}(3{,}5t)\ \mathrm{m}\ .$$

La velocidad de cualquier punto de la cuerda será

$$v_y = \frac{dy(x,t)}{dt} = 0{,}105\cos(2{,}2x + 3{,}5t)\ .$$

En el punto e instante pedidos será

$$v_y(x=3, t=2) = 0{,}105\cos(6{,}6+7) = 0{,}054\ \mathrm{m/s}$$

OPCIÓN B

1. Supongamos que un satélite tarda el mismo tiempo en describir una órbita alrededor de la Tierra en su superficie que en describir una órbita alrededor de la Luna también en su superficie. Sabiendo que el radio de la Tierra es 3,67 veces más grande que el radio de la luna ($R_T = 3,67 \times R_L$), calcular la relación entre las masas de la Tierra y la Luna. **(2,5 puntos)**

<u>Solución</u>

Como el satélite se mueve en ambos casos bajo la acción del campo gravitatorio de cada astro tenemos que

$$G\frac{M_T m}{R_T^2} = m\frac{v_T^2}{R_T} = m\omega_T^2 R_T = m\frac{4\pi^2}{T_T^2}R_T$$

$$G\frac{M_L m}{R_L^2} = m\frac{v_L^2}{R_L} = m\omega_L^2 R_L = m\frac{4\pi^2}{T_L^2}R_L$$

Como $T_T = T_L$, dividiendo ambas ecuaciones llegamos a

$$\frac{M_T}{M_L} = \frac{R_T^{\ 3}}{R_L^{\ 3}}$$

Por lo que el resultado final será $M_T = 49,4 \times M_L$.

2. Supongamos una espira cuadrada de lado *a* situada en el plano del papel por la que circula una corriente de intensidad *I* en el sentido horario. La espira se encuentra en un campo magnético uniforme **B** perpendicular al plano de la espira saliendo del papel. Calcular la fuerza total que el campo magnético ejerce sobre la espira y cuál será el efecto de esas fuerzas sobre la misma: desplazarla, girarla, oprimirla o agrandarla. **(3 puntos)**

<u>Solución</u>

La fuerza que siente cada lado de la espira es

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

Por tanto, los lados opuestos de la espira experimentarán fuerzas iguales en módulo y dirección, pero de sentidos opuestos ya que las corrientes son antiparalelas, de modo que se cancelarán y la fuerza total será nula. Por otro lado, es fácil comprobar que todas las fuerzas estarán contenidas en el plano de la espira, siendo perpendiculares a cada lado y apuntando hacia adentro de la espira, por lo que tenderán a constreñirla.

3. Considerar un objeto que realiza un movimiento armónico simple con la siguiente ecuación para la aceleración en función del tiempo: $a = -490\cos(9,9t)$ cm/s^2.

-¿Cuál es la amplitud de la oscilación? **(1 punto).**

-¿En qué tiempos alcanza el objeto los máximos desplazamientos? **(1 punto).**

<u>Solución</u>

Para un MAS se cumple que

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

de donde obtenemos la amplitud de la oscilación

$$A = \frac{|a|_{\max}}{\omega^2} = \frac{490}{9{,}9^2} = 5 \text{ cm}$$

Por otro lado tenemos que

$$x = 5\cos(9{,}9t) \text{ cm}$$

de modo que el objeto alcanzará los máximos desplazamientos cuando

$$|\cos(9{,}9t)| = 1 \quad \Rightarrow \quad 9{,}9t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi ... = n\pi, \quad n = 0,1,2,3...$$

es decir

$$t = \frac{n\pi}{9{,}9} \text{ s}, \quad n = 0,1,2,3...$$

4. Al incidir sobre un metal una radiación de 200 nm de longitud de onda, los fotoelectrones son emitidos con una velocidad máxima de 10^6 m/s. Calcular la frecuencia umbral para que se produzca la fotoemisión de electrones en ese metal. **(2,5 puntos)**

Datos: $h = 6{,}63\times10^{-34}$ J$\cdot$s $= 4{,}14\times10^{-15}$ eV$\cdot$s. $c = 3\times10^8$ m/s. eV $= 1{,}60\times10^{-19}$ J. $m_e = 9{,}1\times10^{-31}$ kg.

Solución

El balance energético en el efecto fotoeléctrico tiene la forma

$$E_{c\ \max} = h\nu - \phi$$

Por otro lado, la frecuencia umbral se calcula a partir de la función de trabajo, o energía de extracción del metal, ϕ, como

$$\nu_u = \frac{\phi}{h}.$$

Sustituyendo la ecuación de arriba en la de abajo tenemos

$$\nu_u = \frac{\phi}{h} = \frac{h\nu - E_{c\ \max}}{h} = \frac{hc/\lambda - m_e v_{\max}^2/2}{h} = 8{,}1\times10^{14} \text{ Hz}$$

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Supongamos que lanzamos verticalmente un proyectil desde la superficie de la Tierra dirigido hacia la Luna. Si despreciamos cualquier tipo de rozamiento y la influencia de cualquier otro astro del Sistema Solar:

-¿En qué punto de su trayectoria la aceleración será nula? **(1 punto)**

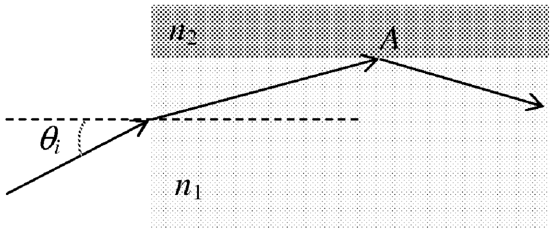
-¿Cuál sería la velocidad inicial mínima del cohete necesaria para llegar a este punto y caer en la Luna por acción de la gravedad lunar? **(2 puntos)**

Datos: $G = 6,67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2. $M_T = 5,98\times10^{24}$ kg. $R_T = 6370$ km. $M_{\text{Luna}} = 7,35\times10^{22}$ kg. $d_{\text{Tierra-Luna}} = 3,84\times10^{8}$ m.

2. Tres cargas puntuales positivas q_1, q_2 y q_3, se encuentran fijadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado l.

- Calcular la energía potencial electrostática de la distribución. **(1 punto)**
- Supongamos que las dejamos en libertad sucesivamente: primero la carga q_1 dejando fijas las otras dos; al cabo de un tiempo suficientemente grande liberamos la carga q_2 manteniendo fija q_3. Finalmente, después de esperar otra vez el tiempo necesario, soltamos la carga q_3. Calcular la energía cinética final que tendrá cada carga. **(1,5 puntos)**

3. Un rayo de luz monocromática incide desde al aire sobre un medio formado por dos láminas de distinto material, tal y como se muestra en la figura. El ángulo de incidencia es $\theta_i = 30^{\circ}$ y el índice de refracción del primer material es n_1=1,5. Después, el rayo alcanza el punto A de la separación con el otro material. ¿Cuál es el máximo valor de n_2 para que se produzca la reflexión total? **(2,5 puntos)**
Datos: $n_{\text{aire}} = 1$.



4. La ecuación del efecto Doppler: $f_r = \dfrac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f$, relaciona la frecuencia observada por el receptor, f_r, con la frecuencia del foco emisor f_f de una onda que se propaga por un medio en reposo con velocidad v, siendo u_f el módulo de la velocidad del foco emisor con respecto al medio y u_r el módulo de la velocidad del receptor. La elección correcta de los signos depende de si foco y receptor se alejan o se acercan entre sí. Sabiendo en qué consiste el efecto Doppler, responder razonadamente a las siguientes preguntas:
- ¿Qué signo deberá elegirse en el numerador cuando el receptor se mueve hacia el foco? **(1 punto)**
- ¿Qué ocurrirá cuando el foco y el emisor se mueven con la misma velocidad en la misma dirección y sentido? **(1 punto)**

OPCIÓN B

1. Dos planetas orbitan alrededor de una estrella de masa desconocida por la acción de su campo gravitatorio.
- El primero de ellos describe una órbita circular de radio 10^{10} m y periodo 1 año. Calcular la masa de la estrella. **(1 punto)**
- El segundo, sin embargo, describe una órbita elíptica, encontrándose el afelio (punto más alejado) a 2×10^{10} m de la estrella y el perihelio (punto más cercano) a $0,6\times10^{10}$ m. Aplicar la tercera Ley de Kepler para obtener el periodo de la órbita del segundo satélite. **(1,5 puntos)**
Datos: $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

2. Una carga q_1 se mueve con velocidad v_1 a lo largo del eje X en el sentido positivo. En un momento dado, cuando q_1 se encuentra en el punto (-b,0,0) m, otra carga q_2 que se mueve a lo largo del eje Y en el sentido también positivo con velocidad v_2, pasa por el origen de coordenadas. Discutir de forma razonada cuál de las dos cargas siente en ese momento la fuerza producida por el campo magnético inducido por la otra carga, y obtener el valor de la fuerza en función de los datos del enunciado. **(3 puntos)**
Datos: El campo magnético creado por una carga puntual q con velocidad $\mathbf{v}$ en el punto $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ vale $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

3. Un objeto de masa 2 kg ligado a un muelle de constante $k = 40$ N/m oscila libremente realizando un movimiento armónico simple. Cuando pasa por la posición de equilibrio el módulo de su velocidad es 25 cm/s.
- Calcular la energía total del objeto. **(1 punto)**
- ¿En qué posiciones el módulo de la velocidad es igual a la mitad de su valor máximo? **(1,5 puntos)**

4. Según el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, la energía total del electrón tiene la forma $E(n) = -\frac{E_0}{n^2} = -\frac{13{,}6}{n^2}$ eV. Calcular la longitud de onda del fotón emitido como consecuencia de la relajación del electrón desde el estado excitado $(n = 5)$ hasta el estado fundamental $(n = 1)$. **(2 puntos)**
Datos: $h = 6{,}63\times10^{-34}$ J·s $= 4{,}14\times10^{-15}$ eV·s. $c = 3\times10^8$ m/s.

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Supongamos que lanzamos verticalmente un proyectil desde la superficie de la Tierra dirigido hacia la Luna. Si despreciamos cualquier tipo de rozamiento y la influencia de cualquier otro astro del Sistema Solar:

-¿En qué punto de su trayectoria la aceleración será nula? **(1 punto)**

-¿Cuál sería la velocidad inicial mínima del cohete necesaria para llegar a este punto y caer en la Luna por acción de la gravedad lunar? **(2 puntos)**

Datos: $G = 6,67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2. $M_{\mathrm{T}} = 5,98\times10^{24}$ kg. $R_{\mathrm{T}} = 6370$ km. $M_{\mathrm{Luna}} = 7,35\times10^{22}$ kg. $d_{\mathrm{Tierra\text{-}Luna}} = 3,84\times10^{8}$ m.

<u>Solución</u>

La aceleración será nula cuando sobre el proyectil no actúe ninguna fuerza neta, o lo que es lo mismo, cuando la suma de las fuerzas que actúan sobre el mismo sea nula. En nuestro problema esto ocurrirá cuando la fuerza de atracción gravitatoria de la Tierra se anule con la atracción gravitatoria de la Luna (ya que tienen sentidos opuestos):

$$G\frac{M_T m}{r^2} = G\frac{M_L m}{\left(d_{T-L} - r\right)^2},$$

donde r está medida con respecto a la Tierra. Esta ecuación tiene dos soluciones, pero sólo nos interesa aquella que proporciona el punto entre la Tierra y la Luna en el que los campos tienen sentidos opuestos, es decir $r < d_{T-L}$, que es:

$$r = 3,46\times10^{8}\ \mathrm{m}$$

Para calcular la velocidad inicial mínima que debe tener el proyectil hasta llegar a este punto podemos aplicar el principio de conservación de la energía mecánica, suponiendo que llegará a este punto r con velocidad nula.

$$E_i = E_f$$
$$E_{c,i} + U_{T,i} + U_{L,i} = E_{c,f} + U_{T,f} + U_{L,f}$$
$$\frac{1}{2}mv_0^{\,2} - G\frac{M_T m}{R_T} - G\frac{M_L m}{d_{T-L} - R_T} = -G\frac{M_T m}{r} - G\frac{M_L m}{d_{T-L} - r}$$

donde hemos elegido el origen de energías potenciales en un punto infinitamente alejado: $U = 0$ en $r = \infty$.

<u>OBSERVACIÓN IMPORTANTE</u>: En la energía mecánica total de la partícula hay que tener en cuenta la energía potencial debida al campo gravitatorio lunar.

Despejando v_0 obtenemos la velocidad pedida:

$$v_0 = 11{,}08 \text{ km/s.}$$

2. Tres cargas puntuales positivas q_1, q_2 y q_3, se encuentran fijadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado l.

- Calcular la energía potencial electrostática de la distribución. **(1 punto)**
- Supongamos que las dejamos en libertad sucesivamente: primero la carga q_1 dejando fijas las otras dos; al cabo de un tiempo suficientemente grande liberamos la carga q_2 manteniendo fija q_3. Finalmente, después de esperar otra vez el tiempo necesario, soltamos la carga q_3. Calcular la energía cinética final que tendrá cada carga. **(1,5 puntos)**

<u>Solución</u>

La energía potencial electrostática de la distribución será

$$U = k\frac{(q_1q_2 + q_1q_3 + q_2q_3)}{l}$$

Las cargas, una vez en libertad, se mueven espontáneamente por la acción del campo eléctrico creado por las otras cargas buscando minimizar su energía potencial. En este caso, como todas son cargas positivas, tenderán a alejarse indefinidamente unas de otras. Como el campo electrostático es conservativo, la energía cinética final que tendrá cada carga será igual a la energía potencial que tenía en el momento de la liberación.

En el caso de q_1 tenemos que la energía cinética final será:

$$T_1 = U_1 = k\frac{(q_1q_2 + q_1q_3)}{l}$$

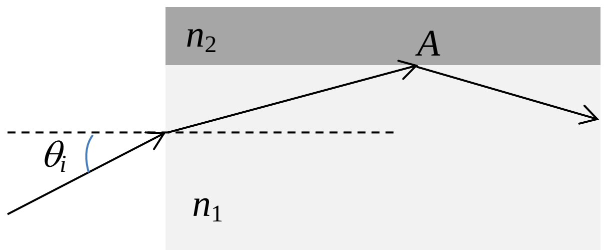
Para la carga q_2 tenemos

$$T_2 = U_2 = k\frac{q_2q_3}{l}.$$

En el caso de la carga q_3, como las otras dos se encuentran a una distancia infinita de ella, no sentirá la acción de ningún campo eléctrico por lo que se quedará en reposo en la posición en la que estaba inicialmente.

$$T_3 = 0$$

3. Un rayo de luz monocromática incide desde al aire sobre un medio formado por dos láminas de distinto material, tal y como se muestra en la figura. El ángulo de incidencia es $\theta_i = 30º$ y el índice de refracción del primer material es n_1=1,5. Después, el rayo alcanza el punto A de la separación con el otro material. ¿Cuál es el máximo valor de n_2 para que se produzca la reflexión total? **(2,5 puntos)**
Datos: $n_{\text{aire}} = 1$.



Solución

De la ley de la refracción

$$n_i \sin\theta_i = n_r \sin\theta_r \,,$$

obtenemos el ángulo de refracción del rayo en el primer material:

$$\theta_r = \arcsin\left(\sin\theta_i \frac{n_{aire}}{n_1}\right) = 19,47º$$

El ángulo complementario será el ángulo de incidencia sobre el segundo material: $\theta_i' = 90 - \theta_r = 70,53º$. Para que se produzca la reflexión total, el ángulo de refracción del rayo en este segundo material debe ser 90º, $\theta_r' = 90º$. Ahora debemos aplicar de nuevo la ley de la refracción bajo este supuesto

$$n_1 \sin\theta_i' = n_2 \sin\theta_r' \quad \Rightarrow \quad n_2 = n_1 \sin\theta_i' = 1,41$$

4. La ecuación del efecto Doppler: $f_r = \dfrac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f$, relaciona la frecuencia observada por el receptor, f_r, con la frecuencia del foco emisor f_f de una onda que se propaga por un medio en reposo con velocidad v, siendo u_f el módulo de la velocidad del foco emisor con respecto al medio y u_r el módulo de la velocidad del receptor. La elección correcta de los signos depende de si foco y receptor se alejan o se acercan entre sí. Sabiendo en qué consiste el efecto Doppler, responder razonadamente a las siguientes preguntas:

- ¿Qué signo deberá elegirse en el numerador cuando el receptor se mueve hacia el foco? **(1 punto)**
- ¿Qué ocurrirá cuando el foco y el receptor se mueven con la misma velocidad en la misma dirección y sentido? **(1 punto)**

Solución

La elección correcta del signo se determina recordando que la frecuencia tiende a aumentar cuando el foco se mueve hacia el receptor o cuándo éste se mueve hacia el foco. Si el receptor se mueve hacia el foco, en el numerador habrá que elegir el signo positivo, lo cual tiende a aumentar la frecuencia recibida. Cuando $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_f$ tenemos que el signo en el numerador y en el denominador será el mismo, por lo que $f_r = f_f$, es decir, la frecuencia observada es igual a la emitida.

OPCIÓN B

1. Dos planetas orbitan alrededor de una estrella de masa desconocida por la acción de su campo gravitatorio.
- El primero de ellos describe una órbita circular de radio 10^{10} m y periodo 1 año. Calcular la masa de la estrella. **(1 punto)**
- El segundo, sin embargo, describe una órbita elíptica, encontrándose el afelio (punto más alejado) a 2×10^{10} m de la estrella y el perihelio (punto más cercano) a $0,6\times10^{10}$ m. Aplicar la tercera Ley de Kepler para obtener el periodo de la órbita del segundo satélite. **(1,5 puntos)**

Datos: $G = 6,67\times10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2$.

Solución

Como la fuerza de atracción gravitatoria de la estrella es la responsable del movimiento orbital de los planetas podemos escribir:

$$G\frac{mM}{R_1^2} = m\omega_1^2 R_1 = m\frac{4\pi^2}{T_1^2}R_1 \quad\rightarrow\quad M = \frac{4\pi^2}{G}\frac{R_1^3}{T_1^2} = 5,95\times10^{26}\ \text{kg}\,.$$

Según la tercera Ley de Kepler, el cuadrado del periodo orbital de un planeta es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica o distancia media. Para el primer satélite esta longitud es el radio de la órbita, mientras que para el segundo será:

$$R_2 = \frac{d_{afelio} + d_{perihelio}}{2} = 1,3\times10^{10}\ \text{m}$$

Ahora podemos aplicar la tercera Ley de Kepler:

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} \quad\rightarrow\quad T_2 = T_1\left(R_2/R_1\right)^{3/2} = 1,48\ \text{años}$$

2. Una carga q_1 se mueve con velocidad v_1 a lo largo del eje X en el sentido positivo. En un momento dado, cuando q_1 se encuentra en el punto (-b,0,0) m, otra carga q_2 que se mueve a lo largo del eje Y en el sentido también positivo con velocidad v_2, pasa por el origen de coordenadas. Discutir de forma razonada cuál de las dos cargas siente en ese momento la fuerza producida por el campo magnético inducido por la otra carga, y obtener el valor de la fuerza en función de los datos del enunciado. **(3 puntos)**

Datos: El campo magnético creado por una carga puntual q situada en el origen con velocidad **v** en el punto $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ vale $\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

Solución

Los datos que tenemos son:

$$\mathbf{v}_1 = v_1\mathbf{i}$$
$$\mathbf{v}_2 = v_2\mathbf{j}$$
$$\mathbf{r}_{1\to 2} = b\mathbf{i}$$
$$\mathbf{r}_{2\to 1} = -b\mathbf{i}$$

El campo magnético creado por la carga 1 en la posición ocupada por la carga 2 es

$$\mathbf{B}_{1\to 2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1\mathbf{v}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_{1\to 2}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 v_1}{b^2}\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

por lo que la carga 2 no sentirá el campo de la carga 1 y no experimentará ninguna fuerza.
El campo magnético creado por la carga 2 en la posición ocupada por la carga 1 es

$$\mathbf{B}_{2\to 1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_2\mathbf{v}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_{2\to 1}}{r^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_2 v_2}{b^2}\mathbf{j}\times\mathbf{i} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_2 v_2}{b^2}\mathbf{k}$$

por lo que la carga 1 sentirá la fuerza

$$\mathbf{F}_{2\to 1} = q_1\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_{2\to 1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_2 v_2 q_1 v_1}{b^2}\mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_2 v_2 q_1 v_1}{b^2}\mathbf{j}$$

3. Un objeto de masa 2 kg ligado a un muelle de constante $k = 40\ \text{N/m}$ oscila libremente realizando un movimiento armónico simple. Cuando pasa por la posición de equilibrio el módulo de su velocidad es 25 cm/s.
- Calcular la energía total del objeto. **(1 punto)**
- ¿En qué posiciones el módulo de la velocidad es igual a la mitad de su valor máximo? **(1,5 puntos)**

Solución

Del estudio del MAS sabemos que la velocidad máxima se alcanza cuando el objeto pasa por la posición de equilibrio, por lo tanto tenemos que $v_{\max} = 0,25\ \text{m/s}$ y la energía total del objeto será (en este punto la energía potencial es nula)

$$E = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = 0,0625\ \text{J}$$

Para el segundo apartado podemos escribir

$$E_c + U = E$$
$$\frac{1}{2}m\left(\frac{v_{\max}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

Despejando obtenemos

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}\frac{mv_{\max}^2}{k}} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}\frac{E}{k}} = \pm 0,048\ \text{m}$$

4. Según el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, la energía total del electrón tiene la forma $E(n) = -\frac{E_0}{n^2} = -\frac{13,6}{n^2}\ \text{eV}$. Calcular la longitud de onda del fotón emitido como

consecuencia de la relajación del electrón desde el estado excitado $(n=5)$ hasta el estado fundamental $(n=1)$. **(2 puntos)**

Datos: $h=6,63\times10^{-34}$ J$\cdot$s $=4,14\times10^{-15}$ eV$\cdot$s ; $c=3\times10^{8}$ m/s.

<u>Solución</u>

La energía del fotón emitido vendrá dada por la diferencia de energías entre los niveles atómicos ocupados por el electrón:

$$h\nu = E_i - E_f = -E_0\left(\frac{1}{n_i^2}-\frac{1}{n_f^{\,2}}\right).$$

Despejando la longitud de onda

$$\lambda = -\frac{hc}{E_0}\left(\frac{1}{n_i^2}-\frac{1}{n_f^{\,2}}\right)^{-1} = 9,51\times10^{-8}\ \text{m}$$

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Supongamos que lanzamos verticalmente un proyectil desde la superficie de la Tierra dirigido hacia la Luna. Si despreciamos cualquier tipo de rozamiento y la influencia de cualquier otro astro del Sistema Solar:

-¿En qué punto de su trayectoria la aceleración será nula? **(1 punto)**

-¿Cuál sería la velocidad inicial mínima del cohete necesaria para llegar a este punto y caer en la Luna por acción de la gravedad lunar? **(2 puntos)**

Datos: $G = 6,67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2. $M_T = 5,98\times10^{24}$ kg. $R_T = 6370$ km. $M_{Luna} = 7,35\times10^{22}$ kg. $d_{Tierra\text{-}Luna} = 3,84\times10^{8}$ m.

2. Se lanzan desde el infinito dos protones el uno hacia el otro, cada uno con velocidad 4×10^{6} m/s. ¿Cuál será la distancia mínima de acercamiento? (masa y carga del protón $1,67\times10^{-27}$ kg y $1,6\times10^{-19}$ C respectivamente) **(2,5 puntos)**

Datos: $k = 9\times10^{9}$ Nm^{2}C^{-2}.

3. Un rayo de luz blanca incide desde el aire sobre una lámina de vidrio con un ángulo de incidencia de 30º. Sabiendo que la velocidad de propagación de la luz roja en el vidrio es de 186000 km s^{-1} y la de la luz azul es 180000 km s^{-1} ¿qué ángulo formarán entre sí, dentro del vidrio, los rayos rojo y azul? **(2,5 puntos)**

Datos: $n_{aire} = 1$. $c = 3\times10^{8}$ m/s

4. La función de onda de una onda armónica que se propaga en una cuerda situada a lo largo del eje X es $y(x,t) = 0{,}1\,\mathrm{sen}(2{,}2x - 0{,}5t - 0{,}21)$, donde todas las magnitudes están en unidades del Sistema Internacional.
- Determinar cómo oscila un punto situado en el origen de coordenadas. (**1 punto**)
- Calcular la aceleración que tiene un punto de la cuerda situado a 5 m del origen cuando $t = 1$ s. (**1 punto**)

OPCIÓN B

1. Un satélite geoestacionario es aquél cuya posición permanece siempre en la vertical de un determinado punto de la superficie terrestre a una distancia fija. Explicar razonadamente por qué los satélites geoestacionarios pueden estar solamente en la vertical de puntos del ecuador terrestre. **(2 puntos)**

2. Una carga q_1 se mueve con velocidad v_1 a lo largo del eje X en el sentido positivo. En un momento dado, cuando q_1 se encuentra en el punto (-b,0,0) m, otra carga q_2 que se mueve a lo largo del eje Y en el sentido también positivo con velocidad v_2, pasa por el origen de coordenadas. Discutir de forma razonada cuál de las dos cargas siente en ese momento la fuerza producida por el campo magnético inducido por la otra carga, y obtener el valor de la fuerza en función de los datos del enunciado. **(3 puntos)**
Datos: El campo magnético creado por una carga puntual q con velocidad $\mathbf{v}$ en el punto $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ vale $\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

3. Una masa puntual de 20 g oscila con un movimiento armónico simple en el eje X alrededor de la posición de equilibrio $(x = 0)$. Una persona con un cronómetro toma los tiempos en los que la masa pasa periódicamente por el mismo punto de amplitud máxima $x = 10$ cm. Si los tiempos anotados son: $t = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{2}...$:
- Obtener la ecuación del movimiento. **(1,5 puntos)**
- ¿Cuál es el valor de la fuerza recuperadora responsable del movimiento cuando $t = 5$ s? **(1 punto)**

4. Calcular la energía liberada en la fusión de dos núcleos de deuterio para dar un núcleo de helio: $2\,{}^2_1\mathrm{H} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He}$. **(2,5 puntos)**
Datos: $m_{{}^2_1\mathrm{H}} = 2{,}01355$ u ; $m_{{}^4_2\mathrm{He}} = 4{,}00150$ u ; $c^2 = 931{,}5$ MeV/u .

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. Supongamos que lanzamos verticalmente un proyectil desde la superficie de la Tierra dirigido hacia la Luna. Si despreciamos cualquier tipo de rozamiento y la influencia de cualquier otro astro del Sistema Solar:

-¿En qué punto de su trayectoria la aceleración será nula? **(1 punto)**

-¿Cuál sería la velocidad inicial mínima del cohete necesaria para llegar a este punto y caer en la Luna por acción de la gravedad lunar? **(2 puntos)**

Datos: $G = 6,67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2. $M_{\mathrm{T}} = 5,98\times10^{24}$ kg. $R_{\mathrm{T}} = 6370$ km. $M_{\mathrm{Luna}} = 7,35\times10^{22}$ kg. $d_{\mathrm{Tierra\text{-}Luna}} = 3,84\times10^{8}$ m.

Solución

La aceleración será nula cuando sobre el proyectil no actúe ninguna fuerza neta, o lo que es lo mismo, cuando la suma de las fuerzas que actúan sobre el mismo sea nula. En nuestro problema esto ocurrirá cuando la fuerza de atracción gravitatoria de la Tierra se anule con la atracción gravitatoria de la Luna (ya que tienen sentidos opuestos):

$$G\frac{M_T m}{r^2} = G\frac{M_L m}{\left(d_{T-L} - r\right)^2},$$

donde r está medida con respecto a la Tierra. Esta ecuación tiene dos soluciones, pero sólo nos interesa aquella que proporciona el punto entre la Tierra y la Luna en el que los campos tienen sentidos opuestos, es decir $r < d_{T-L}$, que es:

$$r = 3,46\times10^{8}\ \mathrm{m}$$

Para calcular la velocidad inicial mínima que debe tener el proyectil hasta llegar a este punto podemos aplicar el principio de conservación de la energía mecánica, suponiendo que llegará a este punto r con velocidad nula.

$$E_i = E_f$$
$$E_{c,i} + U_{T,i} + U_{L,i} = E_{c,f} + U_{T,f} + U_{L,f}$$
$$\frac{1}{2} m v_0{}^2 - G\frac{M_T m}{R_T} - G\frac{M_L m}{d_{T-L} - R_T} = -G\frac{M_T m}{r} - G\frac{M_L m}{d_{T-L} - r}$$

donde hemos elegido el origen de energías potenciales en un punto infinitamente alejado: $U = 0$ en $r = \infty$.

<u>OBSERVACIÓN IMPORTANTE</u>: En la energía mecánica total de la partícula hay que tener en cuenta la energía potencial debida al campo gravitatorio lunar.

Despejando v_0 obtenemos la velocidad pedida:

$$v_0 = 11{,}08 \text{ km/s.}$$

2. Se lanzan desde el infinito dos protones el uno hacia el otro, cada uno con velocidad 4×10^6 m/s. ¿Cuál será la distancia mínima de acercamiento? (masa y carga del protón $1{,}67\times10^{-27}$ kg y $1{,}6\times10^{-19}$ C respectivamente) **(2,5 puntos)**

Datos: $k = 9\times10^9$ Nm^{2}C^{-2}.

<u>Solución</u>

Este problema se resuelve fácilmente aplicando el principio de conservación de la energía mecánica. En el instante de máximo acercamiento las velocidades de los dos protones serán cero.

$$\Delta U = -\Delta E_c$$
$$U_f - U_i = E_{c,i} - E_{c,f}$$
$$k\frac{q^2}{r} - 0 = 2\frac{1}{2}mv^2 - 0 = \quad \rightarrow \quad r = \frac{kq^2}{mv^2} = 8{,}6\times10^{-15}\,\text{m}$$

3. Un rayo de luz blanca incide desde el aire sobre una lámina de vidrio con un ángulo de incidencia de 30º. Sabiendo que la velocidad de propagación de la luz roja en el vidrio es de 186000 km s^{-1} y la de la luz azul es 180000 km s^{-1} ¿qué ángulo formarán entre sí, dentro del vidrio, los rayos rojo y azul? **(2,5 puntos)**

Datos: $n_{\text{aire}} = 1$; $c = 3\times10^8$ m/s

<u>Solución</u>

A partir de la ley de la refracción:

$$\frac{\sin\theta_i}{v_i} = \frac{\sin\theta_r}{v_r}$$

obtenemos el ángulo de refracción de cada color

$$\theta_r = \arcsin\left(\sin\theta_i \frac{v_r}{c}\right)$$

Para el rojo tenemos $\theta_{rojo} = 18,06º$ y para el azul $\theta_{azul} = 17,46º$, por lo que el ángulo que forman entre sí es 0,6º.

4. La función de onda de una onda armónica que se propaga en una cuerda situada a lo largo del eje X es $y(x,t) = 0,1\text{sen}(2,2x - 0,5t - 0,21)$, donde todas las magnitudes están en unidades del Sistema Internacional.
- Determinar cómo oscila un punto situado en el origen de coordenadas. (**1 punto)**
- Calcular la aceleración que tiene un punto de la cuerda situado a 5 m del origen cuando $t = 1$ s. (**1 punto)**

Solución

La oscilación en el origen de coordenadas será

$$y(x = 0, t) = 0,1\text{sen}(-0,5t - 0,21) \text{ m.}$$

La aceleración de cualquier punto de la cuerda será

$$a_y = \frac{d^2 y(x,t)}{dt^2} = -0,1 \times 0,5^2 \text{sen}(2,2x - 0,5t - 0,21) \text{ m/s}^2 .$$

En el punto e instante pedidos será

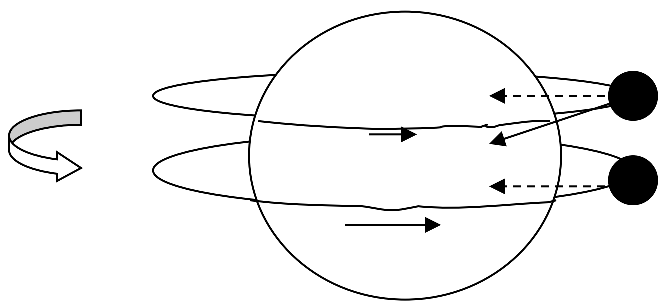
$$a_y(x = 5, t = 1) = -0,1 \times 0,5^2 \text{sen}(11 - 0,5 - 0,21) = 0,019 \text{ m/s}^2$$

OPCIÓN B

1. Un satélite geoestacionario es aquél cuya posición permanece siempre en la vertical de un determinado punto de la superficie terrestre a una distancia fija. Explicar razonadamente por qué los satélites geoestacionarios pueden estar solamente en la vertical de puntos del ecuador terrestre. **(2 puntos**)

Solución

Al permanecer siempre en la vertical de un determinado punto, los satélites geoestacionarios giran con la misma velocidad angular que lo hace la Tierra. La única fuerza que actúa sobre ellos es la atracción gravitatoria que está siempre dirigida hacia el centro de la Tierra. La fuerza gravitatoria entonces debe ejercer de fuerza centrípeta responsable del movimiento circular de los cuerpos. La fuerza centrípeta siempre apunta hacia el centro del giro.



En la figura vemos por qué un satélite geoestacionario tiene que estar siempre en la vertical de un punto de latitud 0º, es decir, sobre el Ecuador. Sólo en esa latitud, la fuerza gravitatoria puede ejercer como fuerza centrípeta ya que tendrían la misma dirección. En cualquier otra latitud, por ejemplo la ilustrada en la figura, la fuerza centrípeta (flecha con trazo discontinuo) y la gravitacional (flecha con trazo continuo) no coinciden en dirección, por lo que el satélite jamás podrá estar siempre sobre el mismo punto girando con la Tierra, únicamente por atracción gravitatoria.

2. Una carga q_1 se mueve con velocidad v_1 a lo largo del eje X en el sentido positivo. En un momento dado, cuando q_1 se encuentra en el punto (-b,0,0) m, otra carga q_2 que se mueve a lo largo del eje Y en el sentido también positivo con velocidad v_2, pasa por el origen de coordenadas. Discutir de forma razonada cuál de las dos cargas siente en ese momento la fuerza producida por el campo magnético inducido por la otra carga, y obtener el valor de la fuerza en función de los datos del enunciado. **(3 puntos)**

Datos: El campo magnético creado por una carga puntual q con velocidad $\mathbf{v}$ en el punto $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ vale $\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

Solución

Los datos que tenemos son:

$$\mathbf{v}_1 = v_1\mathbf{i}$$
$$\mathbf{v}_2 = v_2\mathbf{j}$$
$$\mathbf{r}_{1\to2} = b\mathbf{i}$$
$$\mathbf{r}_{2\to1} = -b\mathbf{i}$$

El campo magnético creado por la carga 1 en la posición ocupada por la carga 2 es

$$\mathbf{B}_{1\to2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1\mathbf{v}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_{1\to2}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 v_1}{b^2}\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

por lo que la carga 2 no sentirá el campo de la carga 1 y no experimentará ninguna fuerza.
El campo magnético creado por la carga 2 en la posición ocupada por la carga 1 es

$$\mathbf{B}_{2\to1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_2\mathbf{v}_2 \times \hat{\mathbf{r}}_{2\to1}}{r^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_2 v_2}{b^2}\mathbf{j}\times\mathbf{i} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_2 v_2}{b^2}\mathbf{k}$$

por lo que la carga 1 sentirá la fuerza

$$\mathbf{F}_{2\to1} = q_1\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_{2\to1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_2 v_2 q_1 v_1}{b^2}\mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_2 v_2 q_1 v_1}{b^2}\mathbf{j}$$

3. Una masa puntual de 20 g oscila con un movimiento armónico simple en el eje X alrededor de la posición de equilibrio $(x=0)$. Una persona con un cronómetro toma los tiempos en los que la masa pasa periódicamente por el mismo punto de amplitud máxima $x = 10$ cm. Si los tiempos anotados son: $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}...$:

- Obtener la ecuación del movimiento. **(1,5 puntos)**
- ¿Cuál es el valor de la fuerza recuperadora responsable del movimiento cuando $t = 5\,\text{s}$? **(1 punto)**

<u>Solución</u>

Primero debemos obtener la ecuación del movimiento, cuya forma general es

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

De los datos tomados por la persona tenemos que el periodo vale $T = \pi$ s. Así pues, podemos escribir

$$x(t) = 0{,}1\cos(2t + \delta)$$

Para obtener la fase δ utilizamos uno de los tiempos anotados, ya que sabemos la posición para ese tiempo. Utilizamos el primero, por ejemplo,

$$0{,}1 = 0{,}1\cos(\pi + \phi) \quad \Rightarrow \quad \phi = -\pi$$

Ahora tenemos que la fuerza recuperadora es

$$F(t) = ma(t) = -m\omega^2 x(t) = -0{,}08x(t) \;\; \text{N}$$

Por lo tanto

$$F(5) = -0{,}08\, x(5) = -6{,}7\cdot10^{-3}\,\text{N}$$

4. Calcular la energía liberada en la fusión de dos núcleos de deuterio para dar un núcleo de helio: $2\,{}^2_1\text{H} \to {}^4_2\text{He}$. **(2,5 puntos)**

Datos: $m_{{}^2_1\mathrm{H}} = 2,01355\ \mathrm{u}$; $m_{{}^4_2\mathrm{He}} = 4,00150\ \mathrm{u}$; $c^2 = 931,5\ \mathrm{MeV/u}$.

Solución

$$Q = -\Delta m \times c^2 = \left(2 \times 2,01355 - 4,00150\right) \times 931,5 = 23,85\ \mathrm{MeV}$$

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular alrededor de Venus por la acción de su campo gravitatorio es $\omega = 1{,}45\times10^{-4}$ rad/s.

- Calcular el radio de la órbita. **(1,5 puntos)**
- Calcular la velocidad mínima con la que debemos lanzar una sonda desde el satélite para que escape del campo gravitatorio de Venus. **(1,5 puntos)**

Datos: $M_{\text{Venus}} = 4{,}87\times10^{24}$ kg. $G = 6{,}67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

2. Tres cargas puntuales positivas q_1, q_2 y q_3, se encuentran fijadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado l.

- Calcular la energía potencial electrostática de la distribución. **(1 punto)**
- Supongamos que las dejamos en libertad sucesivamente: primero la carga q_1 dejando fijas las otras dos; al cabo de un tiempo suficientemente grande liberamos la carga q_2 manteniendo fija q_3. Finalmente, después de esperar otra vez el tiempo necesario, soltamos la carga q_3. Calcular la energía cinética final que tendrá cada carga. **(1,5 puntos)**

3. Supongamos que un cuerpo realiza un movimiento armónico simple alrededor de su posición de equilibrio ($x = 0$) debido a la acción de una fuerza $F = -kx$ con $k = 10$ N/m. La amplitud de la oscilación es 2 m y el tiempo que tarda es describir una oscilación completa es 2 segundos. Sabiendo que en $t = 0$ el desplazamiento es máximo y positivo, representar gráficamente la variación de la energía cinética en función del tiempo (no es necesario una representación exacta, basta simplemente con indicar los valores máximos y mínimos de cada función, los puntos de corte con los ejes y la forma de las funciones). **(2,5 puntos)**

4. En el análisis de ciertas sustancias cristalinas se emplea la difracción de rayos X, que se basa en efectos ondulatorios que suceden cuando la longitud de onda es comparable a la separación entre átomos del cristal. Si la separación entre los átomos de un cristal es de unos 4 angstroms, estímese la energía de los fotones de los rayos X que debemos emplear. **(2 puntos)**
Datos: $h = 6{,}63\times10^{-34}$ J·s $= 4{,}14\times10^{-15}$ eV·s. $c = 3\times10^{8}$ m/s.

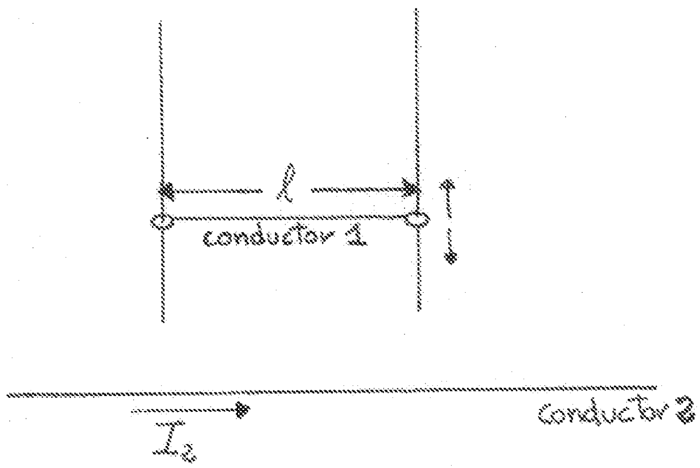
OPCIÓN B

1. Un satélite geoestacionario es aquél cuya posición permanece siempre en la vertical de un determinado punto de la superficie terrestre a una distancia fija. Explicar razonadamente por qué los satélites geoestacionarios pueden estar solamente en la vertical de puntos del ecuador terrestre. **(2 puntos)**

2. La ecuación del efecto Doppler: $f_r = \dfrac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f$, relaciona la frecuencia observada por el receptor, f_r, con la frecuencia del foco emisor f_f de una onda que se propaga por un medio en reposo con velocidad *v*, siendo u_f el módulo de la velocidad del foco emisor con respecto al medio y u_r el módulo de la velocidad del receptor. La elección correcta de los signos depende de si foco y receptor se alejan o se acercan entre sí. Sabiendo en qué consiste el efecto Doppler, responder razonadamente a las siguientes preguntas:
- ¿Qué signo deberá elegirse en el denominador cuando el foco se aleja del emisor? **(1 punto)**
- ¿Qué ocurrirá cuando el receptor se aleja de un foco emisor estático con una velocidad *v*? **(1,5 puntos)**

3. Por un conductor infinitamente largo (conductor 2) circula una corriente de intensidad I_2 tal y como se muestra en la figura. Podemos suponer que su dirección coincide con el eje X y que el sentido de la corriente es positivo. El conductor 1, de longitud l, se encuentra suspendido sobre el conductor 2 y es libre de moverse sin rozamiento en la dirección vertical (siempre quedando paralelo al conductor 2). Sabiendo que la masa del conductor 1 es m, calcular el sentido y el módulo de la corriente que debe circular por este conductor para que quede suspendido en equilibrio a una distancia d del conductor 2. Expresar el resultado en función de los datos del enunciado. **(3 puntos)**

Datos: El módulo del campo magnético producido por un conductor rectilíneo infinitamente largo por el que circula una corriente I, a una distancia r perpendicular al mismo es $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$.



4. Calcular la energía liberada en la fusión de dos núcleos de deuterio para dar un núcleo de helio: $2\,{}^2_1\mathrm{H} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He}$. **(2,5 puntos)**

Datos: $m_{{}^2_1\mathrm{H}} = 2{,}01355$ u ; $m_{{}^4_2\mathrm{He}} = 4{,}00150$ u ; $c^2 = 931{,}5$ MeV/u .

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular alrededor de Venus por la acción de su campo gravitatorio es $\omega = 1{,}45\times10^{-4}$ rad/s.

- Calcular el radio de la órbita. **(1,5 puntos)**
- Calcular la velocidad mínima con la que debemos lanzar una sonda desde el satélite para que escape del campo gravitatorio de Venus. **(1,5 puntos)**

Datos: $M_{\text{Venus}} = 4{,}87\times10^{24}$ kg. $G = 6{,}67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Solución

Si el satélite describe una órbita estacionaria, la fuerza centrípeta responsable de su movimiento es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce Venus sobre el satélite:

$$m\omega^2 R = G\frac{mM}{R^2}$$

Despejando obtenemos el radio de la órbita

$$R = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} = 24906 \text{ km}$$

La velocidad pedida es igual a la velocidad de escape del planeta a una distancia dada por el radio orbital:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 5{,}11 \text{ km/s}$$

2. Tres cargas puntuales positivas q_1, q_2 y q_3, se encuentran fijadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado l.
- Calcular la energía potencial electrostática de la distribución. **(1 punto)**
- Supongamos que las dejamos en libertad sucesivamente: primero la carga q_1 dejando fijas las otras dos; al cabo de un tiempo suficientemente grande liberamos la carga q_2 manteniendo fija q_3. Finalmente, después de esperar otra vez el tiempo necesario, soltamos la carga q_3. Calcular la energía cinética final que tendrá cada carga. **(1,5 puntos)**

Solución

La energía potencial electrostática de la distribución será

$$U = k\frac{(q_1q_2 + q_1q_3 + q_2q_3)}{l}$$

Las cargas, una vez en libertad, se mueven espontáneamente por la acción del campo eléctrico creado por las otras cargas buscando minimizar su energía potencial. En este caso, como todas son cargas positivas, tenderán a alejarse indefinidamente unas de otras. Como el campo electrostático es conservativo, la energía cinética final que tendrá cada carga será igual a la energía potencial que tenía en el momento de la liberación.

En el caso de q_1 tenemos que la energía cinética final será:

$$T_1 = U_1 = k\frac{(q_1q_2 + q_1q_3)}{l}$$

Para la carga q_2 tenemos

$$T_2 = U_2 = k\frac{q_2q_3}{l}.$$

En el caso de la carga q_3, como las otras dos se encuentran a una distancia infinita de ella, no sentirá la acción de ningún campo eléctrico por lo que se quedará en reposo en la posición en la que estaba inicialmente.

$$T_3 = 0$$

3. Supongamos que un cuerpo realiza un movimiento armónico simple alrededor de su posición de equilibrio ($x = 0$) debido a la acción de una fuerza $F = -kx$ con $k = 10$ N/m. La amplitud de la oscilación es 2 m y el tiempo que tarda es describir una oscilación completa es 2 segundos. Sabiendo que en $t = 0$ el desplazamiento es máximo y positivo, representar gráficamente la variación de la energía cinética en función del tiempo (no es necesario una representación exacta, basta simplemente con indicar los valores máximos y mínimos de cada función, los puntos de corte con los ejes y la forma de las funciones). **(2,5 puntos)**

Solución

Las ecuaciones generales del movimiento son

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$

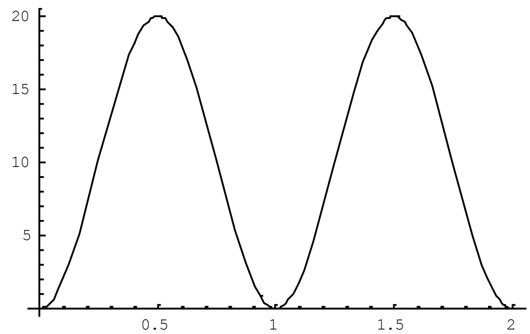
De los datos del enunciado deducimos que la fase inicial es nula ($\delta = 0$) ya que $x(0) = A = 2\text{ m}$, y la frecuencia angular es $\omega = 2\pi / T = \pi \text{ rad/s}$. Por lo tanto, las ecuaciones del movimiento serán

$$x = 2\cos(\pi t)\text{ m}$$

$$v = -2\pi \sin(\pi t)\text{ m/s}$$

La energía cinética será:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{k}{\omega^2}v^2 = 20\sin^2(\pi t)\text{ J}$$



4. En el análisis de ciertas sustancias cristalinas se emplea la difracción de rayos X, que se basa en efectos ondulatorios que suceden cuando la longitud de onda es comparable a la separación entre átomos del cristal. Si la separación entre los átomos de un cristal es de unos 4 angstroms, estímese la energía de los fotones de los rayos X que debemos emplear. **(2 puntos)**

Datos: $h = 6{,}63\times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s} = 4{,}14\times 10^{-15}\text{ eV}\cdot\text{s}$; $c = 3\times 10^{8}\text{ m/s}$.

Solución

Una longitud de onda de 4 angstroms corresponde a una frecuencia de

$$\nu = c/\lambda = 7{,}5\times 10^{17}\text{ Hz}.$$

Aplicando la fórmula de Planck tenemos que la energía de los fotones vale

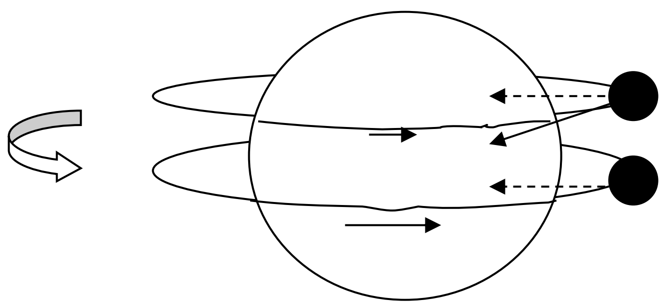
$$E = h\nu = 4{,}97\times 10^{-16}\text{ J} = 3105\text{ eV}.$$

OPCIÓN B

1. Un satélite geoestacionario es aquél cuya posición permanece siempre en la vertical de un determinado punto de la superficie terrestre a una distancia fija. Explicar razonadamente por qué los satélites geoestacionarios pueden estar solamente en la vertical de puntos del ecuador terrestre. **(2 puntos**)

Solución

Al permanecer siempre en la vertical de un determinado punto, los satélites geoestacionarios giran con la misma velocidad angular que lo hace la Tierra. La única fuerza que actúa sobre ellos es la atracción gravitatoria que está siempre dirigida hacia el centro de la Tierra. La fuerza gravitatoria entonces debe ejercer de fuerza centrípeta responsable del movimiento circular de los cuerpos. La fuerza centrípeta siempre apunta hacia el centro del giro.



En la figura vemos por qué un satélite geoestacionario tiene que estar siempre en la vertical de un punto de latitud 0º, es decir, sobre el Ecuador. Sólo en esa latitud, la fuerza gravitatoria puede ejercer como fuerza centrípeta ya que tendrían la misma dirección. En cualquier otra latitud, por ejemplo la ilustrada en la figura, la fuerza centrípeta (flecha con trazo discontinuo) y la gravitacional (flecha con trazo continuo) no coinciden en dirección, por lo que el satélite jamás podrá estar siempre sobre el mismo punto girando con la Tierra, únicamente por atracción gravitatoria.

2. La ecuación del efecto Doppler: $f_r = \dfrac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f$, relaciona la frecuencia observada por el receptor, f_r, con la frecuencia del foco emisor f_f de una onda que se propaga por un medio en reposo con velocidad *v*, siendo u_f el módulo de la velocidad del foco emisor con respecto al medio y u_r el módulo de la velocidad del receptor. La elección correcta de los signos depende de si foco y receptor se alejan o se acercan entre sí. Sabiendo en qué consiste el efecto Doppler, responder razonadamente a las siguientes preguntas:

- ¿Qué signo deberá elegirse en el denominador cuando el foco se aleja del receptor? **(1 punto)**

- ¿Qué ocurrirá cuando el receptor se aleja de un foco emisor estático con una velocidad *v*? **(1,5 puntos)**

Solución

La elección correcta del signo se determina recordando que la frecuencia tiende a aumentar cuando el foco se mueve hacia el receptor o cuándo éste se mueve hacia el foco. Si el foco se aleja del receptor, en el denominador habrá que elegir el signo positivo, lo cual tiende a disminuir la frecuencia recibida.

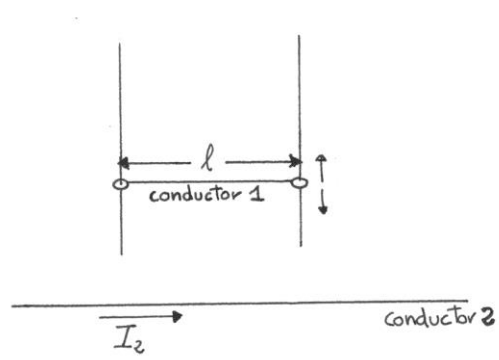
Cuando el receptor se aleja de un foco emisor estático con una velocidad *v*, en el numerador debemos emplear el signo negativo, de modo que

$$f_r = \frac{v - v}{v} f_f = 0 .$$

El resultado es lógico ya que el receptor escapa de la onda al moverse a la misma velocidad.

3. Por un conductor infinitamente largo (conductor 2) circula una corriente de intensidad I_2 tal y como se muestra en la figura. Podemos suponer que su dirección coincide con el eje X y que el sentido de la corriente es positivo. El conductor 1, de longitud *l*, se encuentra suspendido sobre el conductor 2 y es libre de moverse sin rozamiento en la dirección vertical (siempre quedando paralelo al conductor 2). Sabiendo que la masa del conductor 1 es *m*, calcular el sentido y el módulo de la corriente que debe circular por este conductor para que quede suspendido en equilibrio a una distancia *d* del conductor 2. Expresar el resultado en función de los datos del enunciado. **(3 puntos)**

Datos: El módulo del campo magnético producido por un conductor rectilíneo infinitamente largo por el que circula una corriente *I*, a una distancia *r* perpendicular al mismo es $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$.



Solución

El campo magnético producido por el conductor 2 con corriente $\mathbf{I}_2 = I_2\,\mathbf{i}$ en cualquier punto del conductor 1 es:

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}\mathbf{k},$$

saliendo del papel.

Ahora supongamos que por el conductor 1 circula una corriente $\mathbf{I}_1 = I_1\mathbf{i}$. La fuerza magnética que experimentará debido al campo magnético creado por el conductor 2 es

$$\mathbf{F} = I_1\left(\mathbf{L}_1 \times \mathbf{B}_2\right) = -\frac{\mu_0 I_2 I_1 l}{2\pi d}\mathbf{j}.$$

Para que este conductor se encuentre en equilibrio esta fuerza debe ser igual a su peso

$$\mathbf{F} + \mathbf{P} = 0 \Rightarrow -\frac{\mu_0 I_2 I_1 l}{2\pi d}\mathbf{j} - mg\mathbf{j} = 0 \Rightarrow I_1 = -\frac{mg2\pi d}{\mu_0 I_2 l}.$$

Por tanto tenemos que el sentido de la corriente debe ser contrario a la corriente del conductor 2 y su valor es

$$\mathbf{I} = -\frac{mg2\pi d}{\mu_0 I_2 l}\mathbf{i}$$

4. Calcular la energía liberada en la fusión de dos núcleos de deuterio para dar un núcleo de helio: $2\,{}^2_1\mathrm{H} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He}$. **(2,5 puntos)**

Datos: $m_{{}^2_1\mathrm{H}} = 2{,}01355\ \mathrm{u}$; $m_{{}^4_2\mathrm{He}} = 4{,}00150\ \mathrm{u}$; $c^2 = 931{,}5\ \mathrm{MeV/u}$.

<u>Solución</u>

$$Q = -\Delta m \times c^2 = \left(2 \times 2{,}01355 - 4{,}00150\right) \times 931{,}5 = 23{,}85\ \mathrm{MeV}$$

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular alrededor de la Tierra por la acción de su campo gravitatorio es $\omega = 5\times10^{-4}$ rad/s.
- Calcular el radio de la órbita. **(1,5 puntos)**
- Calcular la velocidad mínima con la que debemos lanzar una sonda desde el satélite para que escape del campo gravitatorio de la Tierra. **(1,5 puntos)**
Datos: $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg. $G = 6{,}67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

2. Supongamos que situamos una carga negativa en reposo en una región del espacio en la que existe un campo eléctrico constante y uniforme.
- Describir qué le ocurrirá a la carga y explicar razonadamente si aumentarán, disminuirán o permanecerán constantes las siguientes magnitudes: el potencial eléctrico en las posiciones ocupadas por la carga, la energía potencial de la carga y su energía cinética. **(1,5 puntos)**
-¿Qué cambiará en la respuesta anterior si la carga es positiva? **(1 punto)**

3. Un rayo de luz blanca incide desde el aire sobre una lámina de vidrio con un ángulo de incidencia de 30º. Sabiendo que el índice de refracción del vidrio para el rojo es $n_{\text{rojo}} = 1{,}612$ y para el azul $n_{\text{azul}} = 1{,}671$, ¿qué ángulo formarán entre sí, dentro del vidrio, los rayos rojo y azul? **(2 puntos)**
Datos: $n_{\text{aire}} = 1$.

4. Una sustancia radiactiva tiene un periodo de semidesintegración de 10 minutos. En el tiempo $t = 1$ min se observa que una cierta cantidad de esa sustancia tiene una actividad (número de desintegraciones por unidad de tiempo) de 100 desintegraciones/s. Determinar la actividad de la fuente al cabo de 5 minutos. **(2,5 puntos)**

OPCIÓN B

1. Un satélite artificial de masa m describe una órbita circular estacionaria de radio R alrededor de la Tierra, que tiene una masa M_T, bajo la acción de su campo gravitatorio.
- ¿Cuánto vale la energía total del satélite (energía potencial + energía cinética) en función del radio de la órbita? Considerar que el origen de energía potencial se encuentra en un punto infinitamente alejado. **(1 punto)**
- Supongamos ahora que en un instante dado, debido al rozamiento, el satélite pierde energía y se sitúa en una nueva órbita estacionaria, ¿aumentará o disminuirá el radio de la nueva órbita? Razonar la respuesta. **(0,75 puntos)**
- ¿Deberá aumentar o disminuir el satélite su velocidad para mantenerse en esa nueva órbita? Razonar la respuesta. **(0,75 puntos)**

2. La región del espacio donde existe un campo magnético está comprendida por todos aquellos punto del espacio en los que la coordenada y es mayor o igual que 0. En esa región el campo magnético es constante y uniforme, valiendo $\mathbf{B} = B_0\mathbf{k}$. Situamos una partícula con carga positiva q_0, masa m_0 y velocidad $\mathbf{v} = v_0\mathbf{j}$, siendo $v_0 > 0$, en el origen de coordenadas. Describir el movimiento de la partícula, calcular el tiempo que la partícula estará en la región del campo magnético y en qué punto del espacio abandonará dicho campo, en función de los datos del enunciado. **(3 puntos)**

3. Una masa oscila en el eje X alrededor de su posición de equilibrio ($x = 0$ cm) describiendo un movimiento armónico simple. En cada segundo realiza 2 oscilaciones completas de amplitud 10 cm. Sabiendo que en el instante inicial la masa tiene una velocidad $v = -20$ cm/s con valor positivo del desplazamiento, obtener la ecuación completa de la posición en función del tiempo. **(2,5 puntos)**

4. Al iluminar un metal con una luz de 460 nm de longitud de onda observamos que se emiten electrones con energía cinéticas que llegan hasta los 0,55 eV. Calcular la función de trabajo del metal. **(2 puntos)**
Datos: $h = 6{,}63\times10^{-34}$ J·s $= 4{,}14\times10^{-15}$ eV·s. $c = 3\times10^{8}$ m/s. eV $= 1{,}60\times10^{-19}$ J.

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular alrededor de la Tierra por la acción de su campo gravitatorio es $\omega = 5\times10^{-4}$ rad/s.

- Calcular el radio de la órbita. **(1,5 puntos)**
- Calcular la velocidad mínima con la que debemos lanzar una sonda desde el satélite para que escape del campo gravitatorio de la Tierra. **(1,5 puntos)**

Datos: $M_T = 5,98\times10^{24}$ kg. $G = 6,67\times10^{-11}$ $\mathrm{Nm^2/kg^2}$.

Solución

Si el satélite describe una órbita estacionaria, la fuerza centrípeta responsable de su movimiento es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre el satélite:

$$m\omega^2 R = G\frac{mM}{R^2}$$

Despejando obtenemos el radio de la órbita

$$R = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} = 11685 \text{ km}$$

La velocidad pedida es igual a la velocidad de escape del planeta a una distancia dada por el radio orbital:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 8,26 \text{ km/s}$$

2. Supongamos que situamos una carga negativa en reposo en una región del espacio en la que existe un campo eléctrico constante y uniforme.

- Describir qué le ocurrirá a la carga y explicar razonadamente si aumentarán, disminuirán o permanecerán constantes las siguientes magnitudes: el potencial eléctrico en las posiciones ocupadas por la carga, la energía potencial de la carga y su energía cinética. **(1,5 puntos)**

-¿Qué cambiará en la respuesta anterior si la carga es positiva? **(1 punto)**

Solución

La carga experimentará una fuerza constante debido al campo eléctrico y se moverá de forma acelerada. Por ser negativa la carga, ésta se moverá espontáneamente en la dirección del campo pero en sentido contrario, es decir, hacia potenciales mayores, de modo que el potencial eléctrico en la posición ocupada por la carga aumentará $\Delta V > 0$. La energía potencial disminuirá ya que $\Delta U = q\Delta V < 0$ mientras que la energía cinética, por tratarse de un campo conservativo, aumentará.

Si la carga es positiva lo único que cambiará es que la carga se moverá en el sentido del campo eléctrico de modo que el potencial eléctrico disminuirá.

3. Un rayo de luz blanca incide desde el aire sobre una lámina de vidrio con un ángulo de incidencia de 30º. Sabiendo que el índice de refracción del vidrio para el rojo es $n_{\text{rojo}} = 1{,}612$ y para el azul $n_{\text{azul}} = 1{,}671$, ¿qué ángulo formarán entre sí, dentro del vidrio, los rayos rojo y azul? **(2 puntos)**

Datos: $n_{\text{aire}} = 1$.

Solución

A partir de la ley de la refracción:

$$n_i \sin\theta_i = n_r \sin\theta_r$$

obtenemos el ángulo de refracción de cada color

$$\theta_r = \arcsin\left(\sin\theta_i \frac{1}{n_r}\right)$$

Para el rojo tenemos $\theta_{rojo} = 18{,}07^{\circ}$ y para el azul $\theta_{azul} = 17{,}41^{\circ}$, por lo que el ángulo que forman entre sí es 0,6º.

4. Una sustancia radiactiva tiene un periodo de semidesintegración de 10 minutos. En el tiempo $t = 1\,\text{min}$ se observa que una cierta cantidad de esa sustancia tiene una actividad (número de desintegraciones por unidad de tiempo) de 100 desintegraciones/s. Determinar la actividad de la fuente al cabo de 5 minutos. **(2,5 puntos)**

Solución

La actividad de una muestra varía como

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}t}.$$

En $t = 1$ min tenemos

$$A(t=1) = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{10}} = 100 \quad \rightarrow \quad A_0 = 100 e^{\frac{\ln 2}{10}} = 107,2 \text{ Bq}$$

y al cabo de 5 min:

$$A(t=5) = 107,2 e^{-\frac{\ln 2}{2}} = 75,79 \text{ Bq}.$$

OPCIÓN B

1. Un satélite artificial de masa m describe una órbita circular estacionaria de radio R alrededor de la Tierra, que tiene una masa M_T, bajo la acción de su campo gravitatorio.
- ¿Cuánto vale la energía total del satélite (energía potencial + energía cinética) en función del radio de la órbita? Considerar que el origen de energía potencial se encuentra en un punto infinitamente alejado. **(1 punto)**
- Supongamos ahora que en un instante dado, debido al rozamiento, el satélite pierde energía y se sitúa en una nueva órbita estacionaria, ¿aumentará o disminuirá el radio de la nueva órbita? Razonar la respuesta. **(0,75 puntos)**
- ¿Deberá aumentar o disminuir el satélite su velocidad para mantenerse en esa nueva órbita? Razonar la respuesta. **(0,75 puntos)**

Solución

La energía potencial del satélite viene dada por la expresión $U = -\frac{GM_T m}{R} + U_0$, donde U_0 es una constante que depende del origen de energía potencial considerado. Si suponemos, por ejemplo, que $U = 0$ cuando $r = \infty$, tenemos entonces que $U_0 = 0$. Por otro lado la energía cinética se calcula a partir de

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{M_T m}{R^2} \quad \rightarrow \quad E_c = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{M_T m}{2R} \ .$$

Sumando ambas energías obtenemos que la energía total del satélite es:

$$E = E_c + U = -G\frac{M_T m}{2R} .$$

Vemos que cuanto mayor es el radio de la órbita, mayor es la energía total del satélite (ya que es negativa). Por tanto, si el satélite pierde energía, R disminuirá y descenderá a una órbita de radio menor. Por otro lado, hemos visto arriba que la energía cinética del satélite aumenta si disminuye el radio de la órbita estacionaria, por lo que la velocidad del satélite deberá ser mayor.

2. La región del espacio donde existe un campo magnético está comprendida por todos aquellos puntos del espacio en los que la coordenada y es mayor o igual que 0. En esa región el campo magnético es constante y uniforme, valiendo $\mathbf{B} = B_0\mathbf{k}$. Situamos una partícula con carga positiva q_0, masa m_0 y velocidad $\mathbf{v} = v_0\mathbf{j}$, siendo $v_0 > 0$, en el origen de coordenadas. Describir el movimiento de la partícula, calcular el tiempo que la partícula estará en la región del campo magnético y en qué punto del espacio abandonará dicho campo, en función de los datos del enunciado. **(3 puntos)**

Solución

Al penetrar la partícula en la región donde existe el campo magnético experimentará una fuerza perpendicular a la velocidad:

$$\mathbf{F} = q_0\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q_0 v_0 B_0 \mathbf{i} ,$$

por lo que el plano del movimiento será el plano XY y la trayectoria descrita será una semicircunferencia recorrida en el sentido horario, de radio (obtenido de igualar la fuerza magnética con la fuerza centrípeta)

$$R = \frac{m_0 v_0}{q_0 B_0} .$$

La partícula entrará en la región del campo por el origen de coordenadas y abandonará el campo en el punto $(2R,0,0) = \left(\frac{2m_0 v_0}{q_0 B_0}, 0, 0 \right)$ con una velocidad $\mathbf{v} = -v_0 \mathbf{j}$. El tiempo de permanencia en la región del campo será igual a la mitad del periodo del movimiento circular, o periodo ciclotrón:

$$t = \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{\pi m_0}{q_0 B_0} .$$

3. Una masa oscila en el eje X alrededor de su posición de equilibrio ($x = 0$ cm) describiendo un movimiento armónico simple. En cada segundo realiza 2 oscilaciones completas de amplitud 10 cm. Sabiendo que en el instante inicial la masa tiene una velocidad $v = -20$ cm/s con valor positivo del desplazamiento, obtener la ecuación completa de la posición en función del tiempo. **(2,5 puntos)**

<u>Solución</u>

La solución general de la ecuación del movimiento armónico simple es

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$$

En nuestro caso tenemos que la frecuencia *f* es 2 Hz, por lo que la frecuencia angular es ω = 4π rad/s y la ecuación del movimiento tiene la forma:

$$x(t) = 10\cos(4\pi t + \delta)$$

Sólo nos queda obtener la fase, la cual se calcula a partir de la condición inicial de la velocidad

$$v(0) = -20 = -40\pi \sin(\delta) \quad \to \quad \delta = \arcsin\left(\frac{20}{40\pi}\right) = 0{,}16 \ \text{ ó } \ \pi - 0{,}16$$

Elegimos la fase de 0,16 porque el desplazamiento es positivo, por lo que la ecuación del movimiento será

$$x = 10\cos(4\pi t + 0{,}16) \ \text{cm}$$

4. Al iluminar un metal con una luz de 460 nm de longitud de onda observamos que se emiten electrones con energía cinéticas que llegan hasta los 0,55 eV. Calcular la función de trabajo del metal. **(2 puntos)**

Datos: $h = 6{,}63\times10^{-34}$ J·s $= 4{,}14\times10^{-15}$ eV·s ; $c = 3\times10^{8}$ m/s ; eV $= 1{,}60\times10^{-19}$ J .

<u>Solución</u>

La energía cinética máxima de los fotoelectrones está relacionada con la energía de los fotones de la radiación incidente y la función del trabajo del metal mediante:

$$E_{c\ \mathrm{max}} = h\nu - \phi\,.$$

Despejamos la función de trabajo

$$\phi = h\nu - E_{c\ \mathrm{max}} = h\frac{c}{\lambda} - 0{,}55 = 2{,}15\ \mathrm{eV}\,.$$

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

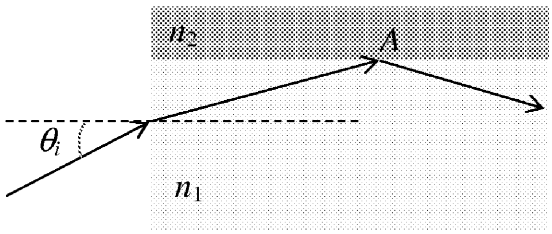
OPCIÓN A

1. La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular alrededor de Venus por la acción de su campo gravitatorio es $\omega = 1{,}45\times10^{-4}$ rad/s. Sabiendo que su energía cinética es de 10^9 J, calcular la masa del satélite. **(2,5 puntos)**
Datos: $M_{\text{Venus}} = 4{,}87\times10^{24}$ kg. $G = 6{,}67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

2. Supongamos una espira cuadrada de lado a situada en el plano del papel por la que circula una corriente de intensidad I en el sentido horario. La espira se encuentra en un campo magnético uniforme **B** perpendicular al plano de la espira entrando en el papel. Calcular la fuerza total que el campo magnético ejerce sobre la espira y cuál será el efecto de esas fuerzas sobre la misma: desplazarla, girarla, oprimirla o agrandarla. **(3 puntos)**

3. Explicar brevemente cómo se propagan las ondas sonoras, ¿cuál es la perturbación que se propaga? (**2 puntos)**

4. Un rayo de luz monocromática incide desde al aire sobre un medio formado por dos láminas de distinto material, tal y como se muestra en la figura. El índice de refracción del primer material es n_1=1,5 y el del segundo es n_2=1,4. Después, el rayo alcanza el punto A de la separación con el otro material. ¿Calcular el mayor ángulo de incidencia θ_i para que se produzca la reflexión total en el punto A? **(2,5 puntos)**
Datos: $n_{\text{aire}} = 1$.



OPCIÓN B

1. Un satélite artificial de masa m describe una órbita circular estacionaria de radio R alrededor de la Tierra, que tiene una masa M_T, bajo la acción de su campo gravitatorio.
- ¿Cuánto vale la energía total del satélite (energía potencial + energía cinética) en función del radio de la órbita? Considerar que el origen de energía potencial se encuentra en un punto infinitamente alejado. **(1 punto)**
- Supongamos ahora que en un instante dado, debido al rozamiento, el satélite pierde energía y se sitúa en una nueva órbita estacionaria, ¿aumentará o disminuirá el radio de la nueva órbita? Razonar la respuesta. **(0,75 puntos)**
- ¿Deberá aumentar o disminuir el satélite su velocidad para mantenerse en esa nueva órbita? Razonar la respuesta. **(0,75 puntos)**

2. Se lanzan desde el infinito dos protones el uno hacia el otro, cada uno con velocidad 4×10^6 m/s. ¿Cuál será la distancia mínima de acercamiento? (masa y carga del protón $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg y $1{,}6 \times 10^{-19}$ C respectivamente) **(2,5 puntos)**
Datos: $k = 9 \times 10^9$ Nm^{2}C^{-2}.

3. Considerar un objeto que realiza un movimiento armónico simple con la siguiente ecuación para la velocidad en función del tiempo: $v = -49{,}5\,\text{sen}(9{,}9t)$ cm/s.
-¿Cuál es el valor máximo del módulo de la aceleración del objeto? **(1 punto).**
-¿En qué tiempos alcanza el objeto esta aceleración máxima? **(1 punto).**

4. Responder razonadamente a las siguientes preguntas sobre física nuclear:

- Supongamos que tenemos tres especies radiactivas y sabemos que cada una emite un tipo distinto radiación: α, β^- y γ, pero no sabemos el tipo de desintegración de cada una. Si hacemos pasar cada radiación por un campo eléctrico perpendicular a la dirección de emisión, ¿esto nos ayudará a distinguir el tipo de radiación emitida por cada fuente? Razonar la respuesta. **(1,5 puntos)**

- Sabiendo que en núcleos pesados como el uranio el número de neutrones es aproximadamente el doble que el de protones, y que en los núcleos estables más ligeros la relación es de 1 a 1, ¿qué tipo de tipo de emisiones son esperables durante la fisión de núcleos pesados a núcleos estables? Escoger la opción correcta y razonar la elección. **(1,5 puntos)**

a) Neutrones y partículas $\beta -$ (electrones)
b) Neutrones y partículas α
c) Protones y partículas α
d) Sólo partículas α

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular alrededor de Venus por la acción de su campo gravitatorio es ω = 1,45×10^{-4} rad/s. Sabiendo que su energía cinética es de 10^9 J, calcular la masa del satélite. **(2,5 puntos)**

Datos: $M_{\text{Venus}} = 4,87\times10^{24}$ kg. $G = 6,67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Solución

En primer lugar debemos calcular el radio de la órbita. Si el satélite describe una órbita estacionaria, la fuerza centrípeta responsable de su movimiento es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce Venus sobre el satélite:

$$m\omega^2 R = G\frac{mM}{R^2}$$

Despejando obtenemos el radio de la órbita

$$R = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} = 24906 \text{ km}$$

Ahora podemos calcular la masa del satélite a partir de la energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \rightarrow m = \frac{2E_c}{\omega^2 R^2} = 153,3 \text{ kg}$$

2. Supongamos una espira cuadrada de lado *a* situada en el plano del papel por la que circula una corriente de intensidad *I* en el sentido horario. La espira se encuentra en un campo magnético uniforme **B** perpendicular al plano de la espira entrando en el papel.

Calcular la fuerza total que el campo magnético ejerce sobre la espira y cuál será el efecto de esas fuerzas sobre la misma: desplazarla, girarla, oprimirla o agrandarla. **(3 puntos)**

Solución

La fuerza que siente cada lado de la espira es

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L}\times\mathbf{B}$$

Por tanto, los lados opuestos de la espira experimentarán fuerzas iguales en módulo y dirección, pero de sentidos opuestos ya que las corrientes son antiparalelas, de modo que se cancelarán y la fuerza total será nula. Por otro lado, es fácil comprobar que todas las fuerzas estarán contenidas en el plano de la espira, siendo perpendiculares a cada lado y apuntando hacia afuera de la espira, por lo que tenderán a agrandarla.

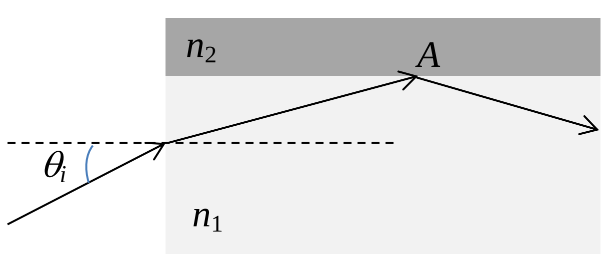
3. Explicar brevemente cómo se propagan las ondas sonoras, ¿cuál es la perturbación que se propaga? (**2 puntos)**

Solución

Las ondas sonoras se generan mediante una vibración en el medio. La fuente vibrante hace que las moléculas oscilen alrededor de sus posiciones de equilibrio en la dirección de la propagación (ondas longitudinales). Estas moléculas chocan con otras moléculas próximas haciéndolas oscilar y, por lo tanto, propagan la onda sonora. La perturbación que se propaga es, por tanto, el desplazamiento de las moléculas del medio con respecto a su posición de equilibrio a lo largo de la dirección del movimiento de la onda. Estos desplazamientos dan lugar a variaciones en la densidad y por tanto, en la presión en el medio, lo que da lugar a oscilaciones de las mismas. Por esa razón también se puede decir que las ondas sonoras propagan oscilaciones o cambios en la densidad y presión, esto es, son ondas de presión.

4. Un rayo de luz monocromática incide desde al aire sobre un medio formado por dos láminas de distinto material, tal y como se muestra en la figura. El índice de refracción del primer material es n_1=1,5 y el del segundo es n_2=1,4. Después, el rayo alcanza el punto *A* de la separación con el otro material. Calcular el mayor ángulo de incidencia θ_i para que se produzca la reflexión total en el punto *A*. **(2,5 puntos)**

Datos: $n_{\text{aire}} = 1$.



Solución

Para que se produzca la reflexión total, el ángulo de refracción del rayo en el punto *A* debe ser de 90º, $\theta_r' = 90^\circ$. Aplicando la ley de la refracción bajo este supuesto tenemos que

$$n_1 \sin\theta_i' = n_2 \sin\theta_r' \quad \Rightarrow \quad \theta_i' = \arcsin\frac{n_2}{n_1} = 69^\circ$$

Para ángulos de incidencia menores que este ángulo crítico se producirá la refracción. Por otro lado, este ángulo es complementario al ángulo de refracción θ_r del rayo cuando pasa del aire al medio 1:

$$\theta_r = 90^\circ - \theta_i' = 21^\circ$$

Ángulos de refracción mayores que 21º no producirán reflexión total entre el medio 1 y el 2. Aplicando nuevamente la ley de refracción tenemos

$$n_{aire} \sin\theta_i = n_1 \sin\theta_r .$$

Despejando

$$\theta_r = \arcsin\left(\sin\theta_i \frac{n_{aire}}{n_1}\right) \le 21^\circ \quad \Rightarrow \quad \theta_i \le \arcsin\left(\sin 21^\circ \frac{n_1}{n_{aire}}\right) = 32{,}5^\circ$$

OPCIÓN B

1. Un satélite artificial de masa m describe una órbita circular estacionaria de radio R alrededor de la Tierra, que tiene una masa M_T, bajo la acción de su campo gravitatorio.
- ¿Cuánto vale la energía total del satélite (energía potencial + energía cinética) en función del radio de la órbita? Considerar que el origen de energía potencial se encuentra en un punto infinitamente alejado. **(1 punto)**
- Supongamos ahora que en un instante dado, debido al rozamiento, el satélite pierde energía y se sitúa en una nueva órbita estacionaria, ¿aumentará o disminuirá el radio de la nueva órbita? Razonar la respuesta. **(0,75 puntos)**
- ¿Deberá aumentar o disminuir el satélite su velocidad para mantenerse en esa nueva órbita? Razonar la respuesta. **(0,75 puntos)**

Solución

La energía potencial del satélite viene dada por la expresión $U = -\frac{GM_T m}{R} + U_0$, donde U_0 es una constante que depende del origen de energía potencial considerado. Si suponemos, por ejemplo, que $U = 0$ cuando $r = \infty$, tenemos entonces que $U_0 = 0$. Por otro lado la energía cinética se calcula a partir de

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{M_T m}{R^2} \quad \rightarrow \quad E_c = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{M_T m}{2R} \quad .$$

Sumando ambas energías obtenemos que la energía total del satélite es:

$$E = E_c + U = -G\frac{M_T m}{2R} .$$

Vemos que cuanto mayor es el radio de la órbita, mayor es la energía total del satélite (ya que es negativa). Por tanto, si el satélite pierde energía, R disminuirá y descenderá a una órbita de radio menor. Por otro lado, hemos visto arriba que la energía cinética del satélite aumenta si disminuye el radio de la órbita estacionaria, por lo que la velocidad del satélite deberá ser mayor.

2. Se lanzan desde el infinito dos protones el uno hacia el otro, cada uno con velocidad 4×10^6 m/s. ¿Cuál será la distancia mínima de acercamiento? (masa y carga del protón $1{,}67\times10^{-27}$ kg y $1{,}6\times10^{-19}$ C respectivamente) **(2,5 puntos)**
Datos: $k = 9\times10^9$ Nm^{2}C^{-2}.

Solución

Este problema se resuelve fácilmente aplicando el principio de conservación de la energía mecánica. En el instante de máximo acercamiento las velocidades de los dos protones serán cero.

$$\Delta U = -\Delta E_c$$
$$U_f - U_i = E_{c,i} - E_{c,f}$$
$$k\frac{q^2}{r} - 0 = 2\frac{1}{2}mv^2 - 0 = \quad \rightarrow \quad r = \frac{kq^2}{mv^2} = 8,6\times10^{-15}\,\mathrm{m}$$

3. Considerar un objeto que realiza un movimiento armónico simple con la siguiente ecuación para la velocidad en función del tiempo: $v(t) = -49,5\,\mathrm{sen}(9,9t)$ cm/s .

-¿Cuál es el valor máximo del módulo de la aceleración del objeto? **(1 punto).**

-¿En qué tiempos alcanza el objeto esta aceleración máxima? **(1 punto).**

Solución

Las ecuaciones generales del movimiento son

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$
$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$
$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \delta)$$

de donde se deduce que

$$|a|_{\max} = \omega|v|_{\max} = 49,5\times 9,9 = 490\ \mathrm{cm/s^2}$$

Por otro lado tenemos que

$$a(t) = -490\cos(9,9t)\ \mathrm{cm/s^2}$$

de modo que el objeto alcanzará la aceleración máxima cuando

$$|\cos(9,9t)| = 1 \quad \Rightarrow \quad 9,9t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi ... = n\pi, \quad n = 0,1,2,3...$$

es decir

$$t = \frac{n\pi}{9,9}\ \mathrm{s}, \quad n = 0,1,2,3...$$

4. Responder razonadamente a las siguientes preguntas sobre física nuclear:

- Supongamos que tenemos tres especies radiactivas y sabemos que cada una emite un tipo distinto radiación: α, β^- y γ, pero no sabemos el tipo de desintegración de cada una. Si hacemos pasar cada radiación por un campo eléctrico perpendicular a la dirección de emisión, ¿esto nos ayudará a distinguir el tipo de radiación emitida por cada fuente? Razonar la respuesta. **(1,5 puntos)**

Solución

Es evidente que sí, puesto que la radiación alfa está compuesta por partículas con carga positiva (núcleos de He), la radiación beta por partículas con carga negativa (electrones) y la radiación gamma por fotones sin carga. En los dos primeros casos, las fuerzas que experimentarán las partículas de las radiaciones, debidas al campo eléctrico, tendrán sentidos opuestos (por tener cargas opuestas) y distinto módulo (por tener diferente carga neta), de modo que unas partículas se desviarán en un sentido y las otras en otro, mientras que la dirección de los fotones sin carga de la radiación gamma no se verá afectada.

- Sabiendo que en núcleos pesados como el uranio el número de neutrones es aproximadamente el doble que el de protones, y que en los núcleos estables más ligeros la relación es de 1 a 1, ¿qué tipo de tipo de emisiones son esperables durante la fisión de núcleos pesados a núcleos estables? Escoger la opción correcta y razonar la elección. **(1,5 puntos)**

a) Neutrones y partículas $\beta-$ (electrones)

b) Neutrones y partículas α

c) Protones y partículas α

d) Sólo partículas α

Solución

El proceso de fisión de un núcleo pesado como el uranio debe dar lugar a núcleos más ligeros en los que el número de protones se iguale al número de neutrones. Esto implica disminuir el número de neutrones (emitiendo radiación de neutrones, por ejemplo), y aumentar el número de protones a costa de disminuir el de neutrones (radiación beta). La respuesta correcta será, por tanto, la a).

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular alrededor de la Tierra por la acción de su campo gravitatorio es $\omega = 5\times10^{-4}$ rad/s. Sabiendo que su energía cinética es de 10^9 J, calcular la masa del satélite. **(2,5 puntos)**
Datos: $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg. $G = 6{,}67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

2. Supongamos que situamos una carga negativa en reposo en una región del espacio en la que existe un campo eléctrico constante y uniforme.
- Describir qué le ocurrirá a la carga y explicar razonadamente si aumentarán, disminuirán o permanecerán constantes las siguientes magnitudes: el potencial eléctrico en las posiciones ocupadas por la carga, la energía potencial de la carga y su energía cinética. **(1,5 puntos)**
-¿Qué cambiará en la respuesta anterior si la carga es positiva? **(1 punto)**

3. Una masa oscila en el eje X alrededor de su posición de equilibrio ($x = 0$ cm) describiendo un movimiento armónico simple con frecuencia 2 Hz. Sabiendo que en el instante inicial la masa pasa por la posición de equilibrio con una velocidad $v = -20$ cm/s, obtener la ecuación completa de la posición en función del tiempo. **(2,5 puntos)**

4. La serie de Lyman del espectro de emisión del átomo de hidrógeno corresponde a transiciones electrónicas que terminan en el estado fundamental ($n=1$). Sabiendo que según el modelo de Bohr de este átomo, la energía total del electrón tiene la forma $E(n) = -\frac{E_0}{n^2} = -\frac{13,6}{n^2}$ eV, determinar la longitud de onda más larga de todas las rayas de la serie de Lyman. **(2,5 puntos)**

Datos: $h = 6,63\times10^{-34}$ J·s $= 4,14\times10^{-15}$ eV·s. $c = 3\times10^{8}$ m/s.

OPCIÓN B

1. Dos planetas orbitan alrededor de una estrella de masa desconocida por la acción de su campo gravitatorio.

- El primero de ellos describe una órbita circular de radio 10^{10} m y periodo 1 año. Calcular la masa de la estrella. **(1 punto)**
- El segundo, sin embargo, describe una órbita elíptica, encontrándose el afelio (punto más alejado) a 2×10^{10} m de la estrella y el perihelio (punto más cercano) a $0,6\times10^{10}$ m. Aplicar la tercera Ley de Kepler para obtener el periodo de la órbita del segundo satélite. **(1,5 puntos)**

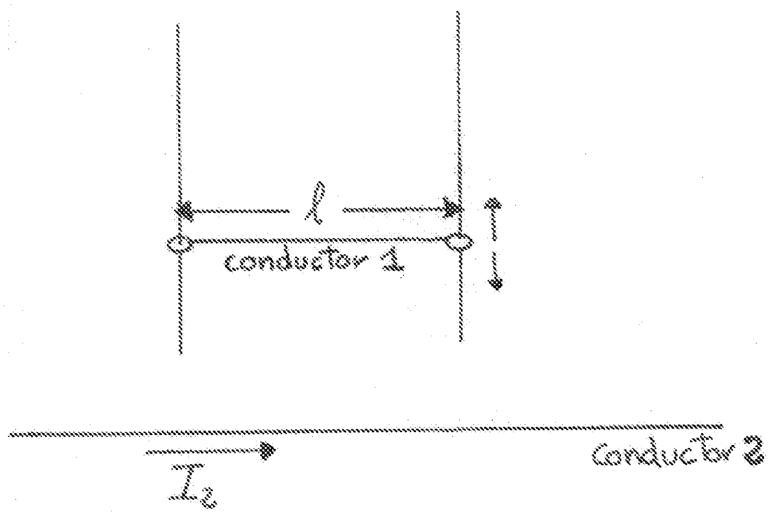
Datos: $G = 6,67\times10^{-11}$ Nm²/kg².

2. La ecuación del efecto Doppler: $f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f$, relaciona la frecuencia observada por el receptor, f_r, con la frecuencia del foco emisor f_f de una onda que se propaga por un medio en reposo con velocidad *v*, siendo u_f el módulo de la velocidad del foco emisor con respecto al medio y u_r el módulo de la velocidad del receptor. La elección correcta de los signos depende de si foco y receptor se alejan o se acercan entre sí. Sabiendo en qué consiste el efecto Doppler, responder razonadamente a las siguientes preguntas:

- ¿Qué signo deberá elegirse en el denominador cuando el foco se acerca al emisor? **(1 punto)**
- ¿En qué condiciones el receptor medirá la máxima frecuencia y cuál es ese valor? **(1,5 puntos)**

03100481		Física (F.E.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Septiembre - 2013	Duración: 90min.		MODELO 20
				Hoja: 3 de 3

3. Por un conductor infinitamente largo (conductor 2) circula una corriente de intensidad I_2 tal y como se muestra en la figura. Podemos suponer que su dirección coincide con el eje X y que el sentido de la corriente es positivo. El conductor 1, de longitud l, se encuentra suspendido sobre el conductor 2 y es libre de moverse sin rozamiento en la dirección vertical (siempre quedando paralelo al conductor 2). Sabiendo que la masa del conductor 1 es m, calcular el sentido y el módulo de la corriente que debe circular por este conductor para que quede suspendido en equilibrio a una distancia d del conductor 2. Expresar el resultado en función de los datos del enunciado. **(3 puntos)**
Datos: El módulo del campo magnético producido por un conductor rectilíneo infinitamente largo por el que circula una corriente I, a una distancia r perpendicular al mismo es $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$.



4. En muchos materiales el índice de refracción disminuye ligeramente cuando crece la longitud de onda de la luz, ¿qué longitudes de onda se desviarán menos (las cortas o las largas) con respecto a la dirección incidente al atravesar el material? Justificar razonadamente la respuesta. **(2 puntos)**

NOTA IMPORTANTE:

Este documento incluye DOS MODELOS DE EXAMEN llamados OPCIÓN A y OPCIÓN B. Cada una de las opciones está compuesta de cuatro ejercicios que podrán contener apartados. La puntuación máxima de cada ejercicio y/o apartado aparece al final del mismo.

El alumno deberá elegir una opción y responder a los ejercicios planteados en la misma. La opción elegida deberá estar claramente indicada en el examen, así como el ejercicio al que se está respondiendo.

En algunos ejercicios no se proporcionan datos numéricos, sino símbolos o expresiones que representan variables. En tal caso deberá desarrollar el problema operando con los símbolos.

En caso de que se responda a ejercicios de ambas opciones sólo se considerarán aquellos pertenecientes a la opción del primer ejercicio que aparezca en las hojas de respuesta.

Está permitido el uso de calculadora científica NO PROGRAMABLE.

OPCIÓN A

1. La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular alrededor de la Tierra por la acción de su campo gravitatorio es $\omega = 5\times10^{-4}$ rad/s. Sabiendo que su energía cinética es de 10^9 J, calcular la masa del satélite. **(2,5 puntos)**

Datos: $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg. $G = 6{,}67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

<u>Solución</u>

En primer lugar debemos calcular el radio de la órbita. Si el satélite describe una órbita estacionaria, la fuerza centrípeta responsable de su movimiento es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre el satélite:

$$m\omega^2 R = G\frac{mM}{R^2}$$

Despejando obtenemos el radio de la órbita

$$R = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} = 11685 \text{ km}$$

Ahora podemos calcular la masa del satélite a partir de la energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2R^2 \to m = \frac{2E_c}{\omega^2R^2} = 58{,}6 \text{ kg}$$

2. Supongamos que situamos una carga negativa en reposo en una región del espacio en la que existe un campo eléctrico constante y uniforme.

- Describir qué le ocurrirá a la carga y explicar razonadamente si aumentarán, disminuirán o permanecerán constantes las siguientes magnitudes: el potencial eléctrico en las posiciones ocupadas por la carga, la energía potencial de la carga y su energía cinética. **(1,5 puntos)**

-¿Qué cambiará en la respuesta anterior si la carga es positiva? **(1 punto)**

Solución

La carga experimentará una fuerza constante debido al campo eléctrico y se moverá de forma acelerada. Por ser negativa la carga, ésta se moverá espontáneamente en la dirección del campo pero en sentido contrario, es decir, hacia potenciales mayores, de modo que el potencial eléctrico en la posición ocupada por la carga aumentará $\Delta V > 0$. La energía potencial disminuirá ya que $\Delta U = q\Delta V < 0$ mientras que la energía cinética, por tratarse de un campo conservativo, aumentará.

Si la carga es positiva lo único que cambiará es que la carga se moverá en el sentido del campo eléctrico de modo que el potencial eléctrico disminuirá.

3. Una masa oscila en el eje X alrededor de su posición de equilibrio ($x = 0$ cm) describiendo un movimiento armónico simple con frecuencia 2 Hz. Sabiendo que en el instante inicial la masa pasa por la posición de equilibrio con una velocidad $v = -20$ cm/s, obtener la ecuación completa de la posición en función del tiempo. **(2,5 puntos)**

Solución

La solución general de la ecuación del movimiento armónico simple es

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$

En nuestro caso tenemos que la frecuencia angular es ω = 4π rad/s. Sustituimos la condición inicial de la posición para obtener la fase

$$x(0) = 0 = A\cos(\delta) \text{ cm} \quad \rightarrow \quad \delta = \frac{\pi}{2} \text{ ó } \frac{3\pi}{2}$$

Elegimos $\delta = \frac{\pi}{2}$ porque la velocidad es negativa:

$$v(0) = -20 = -A4\pi\sin(\pi/2) \quad \rightarrow \quad A = \frac{5}{\pi}$$

por lo que la ecuación del movimiento será

$$x(t) = \frac{5}{\pi}\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}$$

4. La serie de Lyman del espectro de emisión del átomo de hidrógeno corresponde a transiciones electrónicas que terminan en el estado fundamental ($n = 1$). Sabiendo que según el modelo de Bohr de este átomo, la energía total del electrón tiene la forma

$E(n) = -\frac{E_0}{n^2} = -\frac{13,6}{n^2}$ eV, determinar la longitud de onda más larga de todas las rayas de la serie de Lyman. **(2,5 puntos)**

Datos: $h = 6,63\times 10^{-34}$ J·s $= 4,14\times 10^{-15}$ eV·s; $c = 3\times 10^{8}$ m/s.

<u>Solución</u>

Para la serie de Lyman tendremos

$$h\nu = E_i - E_f = -E_0\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{1^2}\right)$$

La mayor longitud de onda corresponderá a la menor frecuencia (o menor energía), esto es, a la transición menos energética, por lo que el estado inicial será al primer estado excitado $n = 2$:

$$\lambda = -\frac{hc}{E_0}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right)^{-1} = 1,22\times 10^{-7} \text{ m}$$

OPCIÓN B

1. Dos planetas orbitan alrededor de una estrella de masa desconocida por la acción de su campo gravitatorio.
- El primero de ellos describe una órbita circular de radio 10^{10} m y periodo 1 año. Calcular la masa de la estrella. **(1 punto)**
- El segundo, sin embargo, describe una órbita elíptica, encontrándose el afelio (punto más alejado) a 2×10^{10} m de la estrella y el perihelio (punto más cercano) a $0,6\times10^{10}$ m. Aplicar la tercera Ley de Kepler para obtener el periodo de la órbita del segundo satélite. **(1,5 puntos)**

Datos: $G = 6,67\times10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.

<u>Solución</u>

Como la fuerza de atracción gravitatoria de la estrella es la responsable del movimiento orbital de los planetas podemos escribir:

$$G\frac{mM}{R_1^2} = m\omega_1^2 R_1 = m\frac{4\pi^2}{T_1^2}R_1 \quad \rightarrow \quad M = \frac{4\pi^2}{G}\frac{R_1^3}{T_1^2} = 5,95\times10^{26}\ \mathrm{kg}\,.$$

Según la tercera Ley de Kepler, el cuadrado del periodo orbital de un planeta es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica o distancia media. Para el primer satélite esta longitud es el radio de la órbita, mientras que para el segundo será:

$$R_2 = \frac{d_{afelio} + d_{perihelio}}{2} = 1,3\times10^{10}\ \mathrm{m}$$

Ahora podemos aplicar la tercera Ley de Kepler:

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} \quad \rightarrow \quad T_2 = T_1\left(R_2 / R_1\right)^{3/2} = 1,48\ \text{años}$$

2. La ecuación del efecto Doppler: $f_r = \dfrac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f$, relaciona la frecuencia observada por el receptor, f_r, con la frecuencia del foco emisor f_f de una onda que se propaga por un medio en reposo con velocidad *v*, siendo u_f el módulo de la velocidad del foco emisor con respecto al medio y u_r el módulo de la velocidad del receptor. La elección correcta de los signos depende de si foco y receptor se alejan o se acercan entre sí. Sabiendo en qué consiste el efecto Doppler, responder razonadamente a las siguientes preguntas:
- ¿Qué signo deberá elegirse en el denominador cuando el foco se acerca al receptor? **(1 punto)**
- ¿En qué condiciones el receptor medirá la máxima frecuencia y cuál es ese valor? **(1,5 puntos)**

<u>Solución</u>

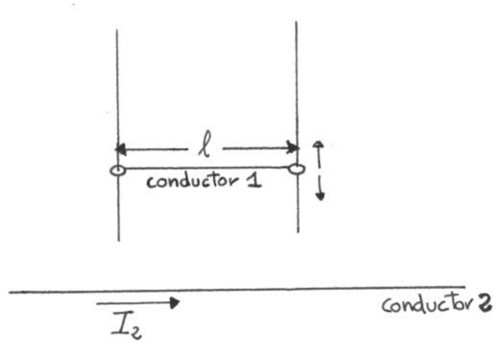
La elección correcta del signo se determina recordando que la frecuencia tiende a aumentar cuando el foco se mueve hacia el receptor o cuándo éste se mueve hacia el foco. Si el foco

se acerca al recector, en el denominador habrá que elegir el signo negativo, lo cual tiende a aumentar la frecuencia recibida.
En realidad, de la ecuación se deduce que la frecuencia recibida no está acotada y que se hace tan grande como queramos a medida que la velocidad del foco emisor se aproxima a la velocidad de transmisión de la onda en el medio, *v*. En este caso el foco emisor debe aproximarse al receptor, que puede ser considerado estático o con una velocidad muy inferior a *v*, para que se utilice el signo negativo en el denominador:

$$\lim_{u_f \to v} f_r = \lim_{u_f \to v} \frac{v}{v - u_f} = \infty$$

En el caso del sonido, por ejemplo, este límite produce una onda de choque que es percibida por el receptor como un estallido.

3. Por un conductor infinitamente largo (conductor 2) circula una corriente de intensidad I_2 tal y como se muestra en la figura. Podemos suponer que su dirección coincide con el eje X y que el sentido de la corriente es positivo. El conductor 1, de longitud *l*, se encuentra suspendido sobre el conductor 2 y es libre de moverse sin rozamiento en la dirección vertical (siempre quedando paralelo al conductor 2). Sabiendo que la masa del conductor 1 es *m*, calcular el sentido y el módulo de la corriente que debe circular por este conductor para que quede suspendido en equilibrio a una distancia *d* del conductor 2. Expresar el resultado en función de los datos del enunciado. **(3 puntos)**
Datos: El módulo del campo magnético producido por un conductor rectilíneo infinitamente largo por el que circula una corriente *I*, a una distancia *r* perpendicular al mismo es $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$.



Solución

El campo magnético producido por el conductor 2 con corriente $\mathbf{I}_2 = I_2\,\mathbf{i}$ en cualquier punto del conductor 1 es:

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}\mathbf{k},$$

saliendo del papel.

Ahora supongamos que por el conductor 1 circula una corriente $\mathbf{I}_1 = I_1\,\mathbf{i}$. La fuerza magnética que experimentará debido al campo magnético creado por el conductor 2 es

$$\mathbf{F} = I_1\left(\mathbf{L}_1 \times \mathbf{B}_2\right) = -\frac{\mu_0 I_2 I_1 l}{2\pi d}\,\mathbf{j}\,.$$

Para que este conductor se encuentre en equilibrio esta fuerza debe ser igual a su peso

$$\mathbf{F} + \mathbf{P} = 0 \Rightarrow -\frac{\mu_0 I_2 I_1 l}{2\pi d}\,\mathbf{j} - mg\mathbf{j} = 0 \Rightarrow I_1 = -\frac{mg2\pi d}{\mu_0 I_2 l}\,.$$

Por tanto tenemos que el sentido de la corriente debe ser contrario a la corriente del conductor 2 y su valor es

$$\mathbf{I} = -\frac{mg2\pi d}{\mu_0 I_2 l}\,\mathbf{i}$$

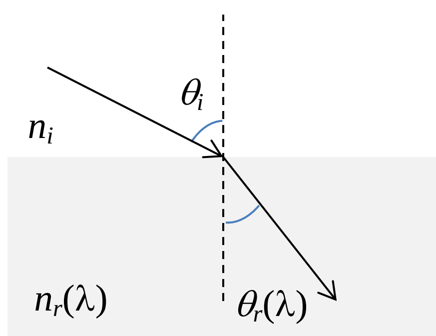
4. En muchos materiales el índice de refracción disminuye ligeramente cuando crece la longitud de onda de la luz, ¿qué longitudes de onda se desviarán menos (las cortas o las largas) con respecto a la dirección incidente al atravesar el material? Justificar razonadamente la respuesta. **(2 puntos)**

Solución

Partimos de la ley de Snell de la refracción

$$n_i \sin\theta_i = n_r \sin\theta_r$$

y supondremos que el rayo incidente tiene la misma dirección y viene del mismo medio independientemente de la longitud de onda (lo que ocurriría, por ejemplo, en el caso de un haz de luz blanca incidiendo con un cierto ángulo sobre la superficie del material)



Tenemos que $n_i \sin\theta_i = \mathrm{cte}$ y por consiguiente

$$\sin\theta_r(\lambda) = \frac{\mathrm{cte}}{n_r(\lambda)}$$

Vemos que al aumentar la longitud onda y disminuir el índice de refracción, el seno –y por consiguiente el ángulo de refracción- aumentan, por lo que la desviación con respecto a la dirección de incidencia será menor. Por lo tanto, se desviarán menos las longitudes de onda largas