Problemas & Resoluciones de

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

(Física, PAU-UNED 2013 & 14, «**MAS**»)

► **CONTENIDOS:** En la tabla siguiente, los problemas del año *2013* aparecen con los nombres **MAS-01** a **MAS-20**. Los del *2014* se corresponden con **MAS'-21** a **MAS'-37**.

La página referida para los problemas del *2013* se refiere al Dossier de la Academia; la de los problemas del *2014* se corresponde al pdf de la web en el cual están todos los enunciados y soluciones de este año ordenados.

El contenido temático de cada problema se especifica en la columna de "Comentarios".

Los años 2013 y 2014 sólo aparecieron 24 tipos diferentes de problema, representados por los que están en negrita en la tabla: **MAS-01**, **MAS-02**, **MAS-03**, etc.

TEMA	mod.	op.	probl.	pág.	Comentarios
MAS-01	1	B	3	*100*	$x(t)$, $v(t)$, $a(t)$; graficarlas
MAS-02	2	A	3	*101*	$x(0)$, $v(0)$ => $x(t)$
MAS-03	3	B	3	*106*	t pasar por origen; graf $x(t)$
MAS-04	4	B	3	*108*	$x(0)$, $v(0)$ => $x(t)$
MAS-05	5	A	3	*110*	similar al MAS-01
MAS-06	6	B	3	*115*	idéntico al MAS-03
MAS-07	7	B	3	*117*	v, a máxs; a en una x
MAS-08	8	A	3	*118*	$x(0)$, $v(0)$ => $x(t)$
MAS-09	9	A	3	*131*	$a(t)$ => $v\_máx$, t de $v\_máx$
MAS-10	10	B	3	*135*	A, $v(origen)$ => x, v, $a = f(t)$; graficarlas
MAS-11	11	A	3	*121*	m, k, $x(0)=A$ ==> $a(t)$
MAS-12	12	A	3	*123*	k, A, T, $x(0)=A$ ==> graficar $E\_p(t)$
MAS-13	13	B	3	*127*	m, A, E ==> $v\_máx$, $v(x)$
MAS-14	14	B	3	*129*	similar al MAS-09
MAS-15	15	B	3	*138*	m, k, v(orig) => E; x tal que v=$v\_máx$/2
MAS-16	16	B	3	*140*	m, A, datos tiempos => $x(t)$, $F(t)$
MAS-17	17	A	3	*142*	similar al MAS-12
MAS-18	18	B	3	*145*	$v(0)$, sgn[$x(0)$] ==> $x(t)$
MAS-19	19	B	3	*147*	$v(t)$ ==> $a\_máx$, t de $a\_máx$
MAS-20	20	A	3	*149*	f, $x(0)=0$, $v(0)$ ==> $x(t)$
MAS'-21	1	B	3	*3*	$x(0)$, sgn[$v(0)$] ==> $x(t)$

MAS'-22	2	B	3	*11*	A ==> x cuando a=a_$máx$/2
MAS'-23	3	A	3	*17*	m, A, f ==> E_c en el origen
MAS'-24	4	A	3	*25*	E: demostrar una fórmula (TEÓRICO)
MAS'-25	5	B	3	*34*	idéntico al MAS'-24
MAS'-26	6	B	3	*41*	idéntico al MAS'-21
MAS'-27	7	B	3	*50*	distancia recorrida tras t
MAS'-28	8	A	3	*56*	idéntico al MAS'-23
MAS'-29	10	A	3	*71*	idéntico al MAS'-27
MAS'-30	11	B	3	*80*	t en que pasa por 3ª vez por origen
MAS'-31	12	A	3	*88*	idéntico al MAS'-30
MAS'-32	13	A	3	*96*	idéntico al MAS'-22
MAS'-33	14	A	3	*104*	idéntico al MAS'-23
MAS'-34	16	B	3	*122*	f, a cuando x=A ==> A
MAS'-35	17	A	4	*129*	idéntico al MAS'-34
MAS'-36	18	B	4	*138*	A, algunos datos sobre a ==> $x(t)$
MAS'-37	19	A	3	*144*	idéntico al MAS'-36

► MAS-01 [m01—B3; *pág.100*]

3. Considérese un movimiento armónico simple de amplitud 5 cm, frecuencia 0,5 Hz y fase inicial π radianes (también denominada constante de fase).
- Obtener las ecuaciones de la posición x, la velocidad v y la aceleración a en función del tiempo. **(1 punto)**
- Representar gráficamente x, v y a en función de tiempo (no es necesario una representación exacta, basta simplemente con indicar los valores máximos y mínimos de cada función, los puntos de corte con los ejes y la forma de las funciones). **(1,5 puntos)**

Solución

La solución general de la ecuación del movimiento armónico simple es

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta)$$

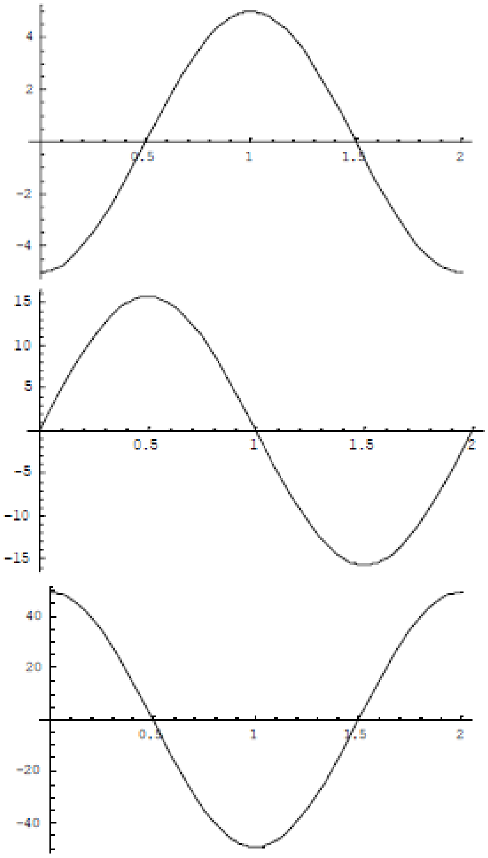
En nuestro caso tenemos que la frecuencia angular es $\omega = \pi$ rad/s y las ecuaciones del movimiento tendrán la forma:

$$x = 5\cos(\pi t + \pi) \text{ cm}$$

$$v = -15,7\sin(\pi t + \pi) \text{ cm/s}$$

$$a = -49,3\cos(\pi t + \pi) \text{ cm/s}^2$$

Se trata de funciones sinusoidales de periodo $T = 2$ s.



► MAS-02 [m02—A3; *pág.101*]

3. Un objeto oscila en el eje X con un movimiento armónico simple de frecuencia angular 8,0 rad/s alrededor de su posición de equilibrio ($x = 0$ cm). Sabiendo que en el instante inicial el objeto se encuentra en $x = 4$cm con una velocidad v = -25 cm/s, obtener la ecuación completa de la posición en función del tiempo. **(2,5 puntos)**

Solución

La solución general de la ecuación del movimiento armónico simple es

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$

En nuestro caso tenemos $\omega = 8,0$ rad/s. Sustituimos las condiciones iniciales

$$x(0) = 4 = A\cos(\delta) \text{ cm}$$

$$v(0) = -25 = -8A\sin(\delta) \text{ cm/s}$$

Si dividimos ambas ecuaciones y despejamos obtenemos la fase

$$\frac{v(0)}{x(0)} = \frac{-25}{4} = -8\tan(\delta) \quad \rightarrow \quad \delta = \arctan\left(\frac{25}{32}\right) = 0,663 \text{ rad}$$

Ahora podemos calcular la amplitud

$$x(0) = 4 = A\cos(\delta) \text{ cm} \quad \rightarrow \quad A = \frac{4}{\cos\delta} = 5,08 \text{ cm}$$

por lo que la ecuación del movimiento será

$$x = 5,08\cos(8t + 0,663) \text{ cm}$$

► MAS-03 [m03—B3; *pág.106*]

3. Tenemos dos masas idénticas de 1 kg. Cada una se encuentra sujeta a un muelle fijo que descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Los muelles son iguales y de constante $k = 100$ N/m. Un muelle se estira 10 cm y el otro 5 cm. Si se dejan en libertad al mismo tiempo ($t = 0$ s)

- ¿Cuál de las dos masas pasará primero por la posición de equilibrio? Razonar la respuesta. (1 punto)

- Representar en la misma gráfica la posición de ambos objetos en función del tiempo (no es necesario una representación exacta, basta simplemente con indicar los valores máximos y mínimos de cada función, los puntos de corte con los ejes y la forma de las funciones) **(2 puntos)**

Solución

El periodo de la oscilación sólo depende de k y de m, pero no de la amplitud de la oscilación, por lo que los periodos serán iguales y los objetos tardarán el mismo tiempo en pasar por la posición de equilibrio. El primer objeto tiene que recorrer una distancia doble pero también tiene una velocidad media doble.

De las condiciones del enunciado está claro que las masas realizarán un movimiento armónico simple, cuya ecuación de movimiento es

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

con $\omega = 2\pi / T$. En nuestro caso tenemos que

$$\omega = \sqrt{k/m} = 10 \text{ rad/s}$$

en ambos casos y fase inicial

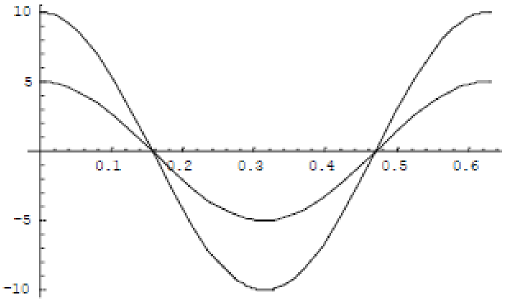
$$\delta = 0$$

ya que $x(0) = A$. Por consiguiente, las funciones a representar serán

$$x_1 = 10\cos(10t) \text{ cm}$$

$$x_2 = 5\cos(10t) \text{ cm}$$

ambas con el mismo periodo $T = \pi / 5 = 0,63$ s. Serán dos funciones sinusoidales con el mismo periodo pero distinta amplitud.



► MAS-04 [m04—B3; *pág.108*]

3. Una masa oscila con un movimiento armónico simple en la dirección del eje X alrededor de su posición de equilibrio ($x = 0$ cm) con un periodo de 10 s. Sabiendo que en el instante inicial el objeto se encuentra en $x = 1$ cm con una velocidad v= -15 cm/s, obtener la ecuación completa de la posición en función del tiempo. **(2,5 puntos)**

Solución

La solución general de la ecuación del movimiento armónico simple es

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$

En nuestro caso tenemos $\omega = 2\pi/10$ rad/s. Sustituimos las condiciones iniciales

$$x(0) = 1 = A\cos(\delta) \text{ cm}$$

$$v(0) = -15 = -\frac{2\pi}{10} A\sin(\delta) \text{ cm/s}$$

Si dividimos ambas ecuaciones y despejamos obtenemos la fase

$$\frac{v(0)}{x(0)} = \frac{-15}{1} = -\frac{2\pi}{10}\tan(\delta) \rightarrow \delta = \arctan\left(\frac{150}{2\pi}\right) = 1,53 \text{ rad}$$

Ahora podemos calcular la amplitud

$$x(0) = 1 = A\cos(\delta) \text{ cm} \rightarrow A = \frac{1}{\cos\delta} = 23,89 \text{ cm}$$

por lo que la ecuación del movimiento será

$$x = 23,89\cos\left(\frac{2\pi}{10}t + 1,53\right) \text{ cm}$$

► MAS-05 [m05—A3; *pág.110*] (Nota: parecido al **MAS-01**)

3. Considérese un movimiento armónico simple de amplitud 10 cm, frecuencia 0,25 Hz y fase inicial $\pi / 2$ radianes (también denominada constante de fase).
- Obtener las ecuaciones de la posición x, la velocidad v y la aceleración a en función del tiempo. **(1 punto)**
- Representar gráficamente x, v y a en función de tiempo (no es necesario una representación exacta, basta simplemente con indicar los valores máximos y mínimos de cada función, los puntos de corte con los ejes y la forma de las funciones). **(1,5 puntos)**

Solución

La solución general de la ecuación del movimiento armónico simple es

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta)$$

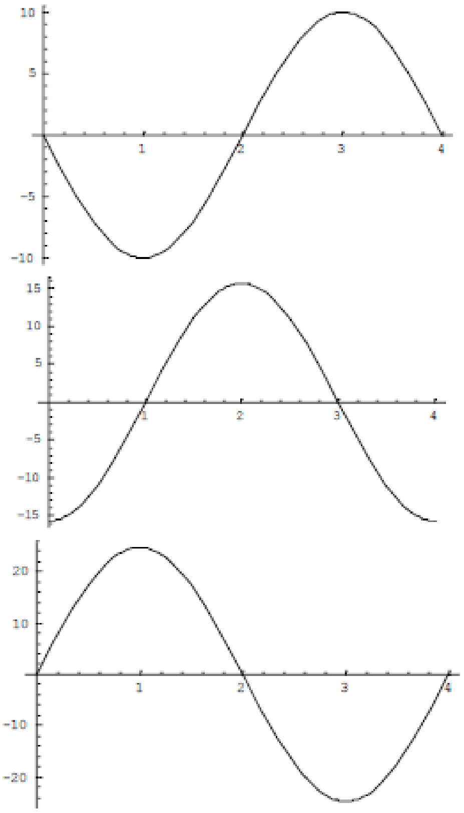
En nuestro caso tenemos que la frecuencia angular es $\omega = \pi/2$ rad/s y las ecuaciones del movimiento tendrán la forma:

$$x = 10\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}$$

$$v = -15,7\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm/s}$$

$$a = -24,7\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm/s}^2$$

Se trata de funciones sinusoidales de periodo $T = 4$ s.



► MAS-06 [m06—B3; *pág.115*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **MAS-03**

► MAS-07 [m07—B3; *pág.117*]

3. Un cuerpo está vibrando con movimiento armónico simple de amplitud 15 cm. Si realiza 4 vibraciones por segundo, calcular:
- Los valores máximos de la velocidad y de la aceleración. **(1 punto)**
- La aceleración cuando la elongación es 9 cm. **(1,5 puntos)**

Solución

La frecuencia es $f = 4$ Hz y la frecuencia angular será $\omega = 8\pi$ s^{-1}, por lo que las ecuaciones del movimiento son:

$$x(t) = 0,15\cos\left(8\pi t + \delta\right)$$

$$v(t) = -3,77\sin\left(8\pi t + \delta\right) \Rightarrow v_{\max} = 3,77 \text{ m/s}$$

$$a(t) = -94,75\cos\left(8\pi t + \delta\right) \Rightarrow a_{\max} = 94,75 \text{ m/s}^2$$

Si $x(t^*) = 0,09\,m$, entonces en ese instante t^* tenemos que $\cos\left(8\pi t^* + \delta\right) = 0,6$. Así pues

$$a(t^*) = -94,75\cos\left(8\pi t^* + \delta\right) = -56.85\,m/s^2$$

► MAS-08 [m08—A3; *pág.118*]

3. Un objeto realiza un movimiento armónico simple en la dirección del eje X ejecutando 5 oscilaciones por segundo. Sabiendo que en el instante inicial el objeto pasa por la posición de equilibrio ($x = 0$ cm) con una velocidad $v = -63$ cm/s, obtener la ecuación completa de la posición en función del tiempo. **(2,5 puntos)**

Solución

La solución general de la ecuación del movimiento armónico simple es

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$

En nuestro caso tenemos que la frecuencia es 5 Hz, por lo que la frecuencia angular será ω = 10π rad/s. Sustituimos la condición inicial de la posición para obtener la fase

$$x(0) = 0 = A\cos(\delta) \text{ cm} \quad \rightarrow \quad \delta = \frac{\pi}{2} \text{ ó } \frac{3\pi}{2}.$$

Elegimos $\delta = \dfrac{\pi}{2}$ porque la velocidad es negativa:

$$v(0) = -63 = -A10\pi\sin(\pi/2) \quad \rightarrow \quad A = \frac{63}{10\pi}$$

por lo que la ecuación del movimiento será

$$x = \frac{63}{10\pi}\cos\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}$$

► MAS-09 [m09—A3; *pág.131*]

3. Considerar un objeto que realiza un movimiento armónico simple con la siguiente ecuación para la aceleración en función del tiempo: $a(t) = -490\cos(9,9t)$ cm/s^2.

-¿Cuál es el valor máximo del módulo de la velocidad del objeto? **(1 punto).**

-¿En qué tiempos alcanza el objeto esta velocidad máxima? **(1,5 puntos).**

Solución

Las ecuaciones generales del movimiento son

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$

$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \delta)$$

de donde se deduce que

$$|v|_{\max} = \frac{|a|_{\max}}{\omega} = \frac{490}{9,9} = 49,5 \text{ cm/s}$$

Por otro lado tenemos que

$$v(t) = -49,5\sin(9,9t) \text{ cm/s}$$

de modo que el objeto alcanzará la velocidad máxima cuando

$$|\sin(9,9t)| = 1 \quad \Rightarrow \quad 9,9t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 0,1,2,3\ldots$$

es decir

$$t = \frac{\pi}{19,8}(2n+1) \text{ s}, \quad n = 0,1,2,3\ldots$$

► MAS-10 [m10—B3; *pág.135*]

3. Considérese una partícula que describe un movimiento armónico simple de amplitud 10 cm alrededor del origen ($x = 0$). En el instante inicial la partícula pasa por el origen con velocidad $v = -5\pi$ cm/s.

- Obtener las ecuaciones de la posición x, la velocidad v y la aceleración a en función del tiempo. **(1,5 puntos)**

- Representar gráficamente x, v y a en función de tiempo (no es necesario una representación exacta, basta simplemente con indicar los valores máximos y mínimos de cada función, los puntos de corte con los ejes y la forma de las funciones). **(1,5 puntos)**

Solución

La solución general de la ecuación del movimiento armónico simple es

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \delta)$$

En el instante inicial la partícula pasa por el origen, lo que significa que

$$x(0) = A\cos(\delta) = 0$$

$$v(0) = -A\omega\sin(\delta) = -5\pi$$

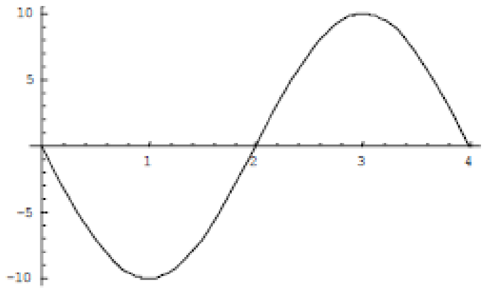
De estas ecuaciones queda claro que $\omega = \pi/2$ rad/s y $\delta = \pi/2$ rad:

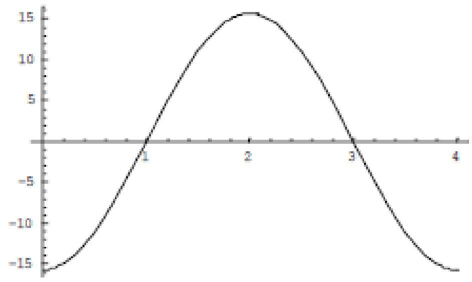
$$x = 10\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}$$

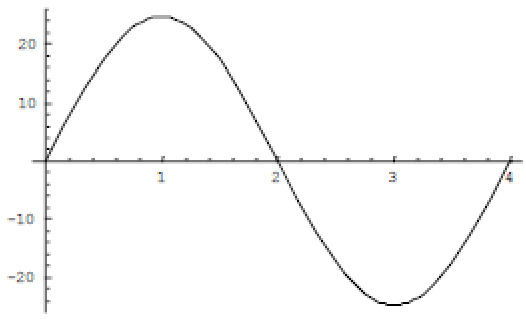
$$v = -15{,}7\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm/s}$$

$$a = -24{,}7\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm/s}^2$$

Se trata de funciones sinusoidales de periodo $T = 4$ s.







► MAS-11 [m11—A3; *pág.121*]

3. Un objeto de 2 kg se sujeta a un muelle fijo horizontal con una constante $k = 196$ N/m. El objeto se desplaza una distancia de 5 cm de su posición de equilibrio y se deja en libertad en el tiempo $t = 0$ s. Obtener la ecuación de la aceleración del objeto en función del tiempo suponiendo que no existe ningún tipo de rozamiento. **(2 puntos).**

Solución

De las condiciones del enunciado está claro que el objeto realizará un movimiento armónico simple cuyas ecuaciones generales son

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta)$$

con $\omega = 2\pi / T$. En nuestro caso tenemos que

$$\omega = \sqrt{k / m} = 9{,}9 \text{ rad/s}$$

y la fase inicial

$$\delta = 0$$

ya que $x(0) = A = 5$ cm. La ecuación de la aceleración en función del tiempo será

$$a = -490\cos(9{,}9t) \text{ cm/s}^2$$

► MAS-12 [m12—A3; *pág.123*]

3. Supongamos que un cuerpo realiza un movimiento armónico simple alrededor de su posición de equilibrio ($x = 0$) debido a la acción de una fuerza $F = -kx$ con $k = 10$ N/m. La amplitud de la oscilación es 2 m y el tiempo que tarda es describir una oscilación completa es 2 segundos. Sabiendo que en $t = 0$ el desplazamiento es máximo y positivo, representar gráficamente la variación de la energía potencial en función del tiempo (no es necesario una representación exacta, basta simplemente con indicar los valores máximos y mínimos de cada función, los puntos de corte con los ejes y la forma de las funciones). **(2,5 puntos)**

Solución

La ecuación general del movimiento es

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

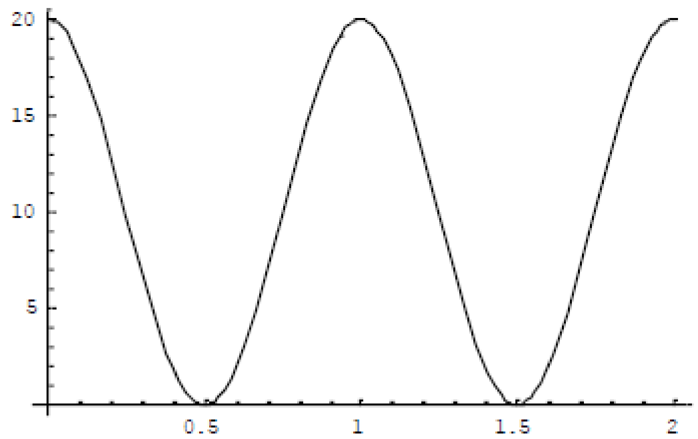
De los datos del enunciado deducimos que la fase inicial es nula ($\delta = 0$) ya que $x(0) = A = 2$ m, y la frecuencia angular es $\omega = 2\pi / T = \pi$ rad/s. Por lo tanto, la ecuación del movimiento será

$$x = 2\cos(\pi t) \text{ m}$$

y la energía potencial será:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = 20\cos^2(\pi t) \text{ J}$$

(Ver la gráfica en página siguiente)



► MAS-13 [m13—B3; *pág.127*]

3. Un objeto de 3 kg ligado a un muelle oscila libremente realizando un movimiento armónico simple de amplitud 4 cm en el que la energía total es 0,01 J.

- Calcular el módulo de la velocidad máxima del objeto. **(1 punto)**
- Calcular el módulo de la velocidad cuando el objeto se encuentra a 2 cm de la posición de equilibrio. **(1,5 puntos)**

<u>Solución</u>

Para calcular la velocidad máxima igualamos la energía cinética a la energía total, ya que en esta circunstancia la energía potencial será nula

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2 = E \quad \rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 0{,}082 \text{ m/s}$$

En cualquier punto de la oscilación se cumple que

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2E - kx^2}{m}}$$

Sólo necesitamos calcular la constante de recuperación k:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad \rightarrow \quad k = \frac{2E}{A^2} = 12{,}5 \text{ N/m}$$

y sustituir los valores en la ecuación anterior:

$$v = \sqrt{\frac{2E - kx^2}{m}} = 0{,}071 \text{ m/s}$$

► MAS-14 [m14—B3; *pág.129*] (Nota: parecido al **MAS-09**)

3. Considerar un objeto que realiza un movimiento armónico simple con la siguiente ecuación para la aceleración en función del tiempo: $a = -490\cos(9{,}9t)$ cm/s^2.

-¿Cuál es la amplitud de la oscilación? **(1 punto).**
-¿En qué tiempos alcanza el objeto los máximos desplazamientos? **(1 punto).**

Solución

Para un MAS se cumple que

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

de donde obtenemos la amplitud de la oscilación

$$A = \frac{|a|_{\max}}{\omega^2} = \frac{490}{9,9^2} = 5 \text{ cm}$$

Por otro lado tenemos que

$$x = 5\cos(9,9t) \text{ cm}$$

de modo que el objeto alcanzará los máximos desplazamientos cuando

$$|\cos(9,9t)| = 1 \quad \Rightarrow \quad 9,9t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi ... = n\pi, \quad n = 0,1,2,3...$$

es decir

$$t = \frac{n\pi}{9,9} \text{ s}, \quad n = 0,1,2,3...$$

► MAS-15 [m15—B3; *pág.138*]

3. Un objeto de masa 2 kg ligado a un muelle de constante $k = 40$ N/m oscila libremente realizando un movimiento armónico simple. Cuando pasa por la posición de equilibrio el módulo de su velocidad es 25 cm/s.
- Calcular la energía total del objeto. **(1 punto)**
- ¿En qué posiciones el módulo de la velocidad es igual a la mitad de su valor máximo? **(1,5 puntos)**

Solución

Del estudio del MAS sabemos que la velocidad máxima se alcanza cuando el objeto pasa por la posición de equilibrio, por lo tanto tenemos que $v_{\max} = 0,25$ m/s y la energía total del objeto será (en este punto la energía potencial es nula)

$$E = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = 0,0625 \text{ J}$$

Para el segundo apartado podemos escribir

$$E_c + U = E$$

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{v_{\max}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} k x^2 = E = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

Despejando obtenemos

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}\frac{m v_{\max}^2}{k}} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}\frac{E}{k}} = \pm 0,048 \text{ m}$$

► MAS-16 [m16—B3; *pág.140*]

3. Una masa puntual de 20 g oscila con un movimiento armónico simple en el eje X alrededor de la posición de equilibrio $(x = 0)$. Una persona con un cronómetro toma los tiempos en los que la masa pasa periódicamente por el mismo punto de amplitud máxima $x = 10$ cm. Si los tiempos anotados son: $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} ...$:

- Obtener la ecuación del movimiento. **(1,5 puntos)**
- ¿Cuál es el valor de la fuerza recuperadora responsable del movimiento cuando $t = 5$ s? **(1 punto)**

Solución

Primero debemos obtener la ecuación del movimiento, cuya forma general es

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

De los datos tomados por la persona tenemos que el periodo vale $T = \pi$ s. Así pues, podemos escribir

$$x(t) = 0{,}1\cos(2t + \delta)$$

Para obtener la fase δ utilizamos uno de los tiempos anotados, ya que sabemos la posición para ese tiempo. Utilizamos el primero, por ejemplo,

$$0{,}1 = 0{,}1\cos(\pi + \phi) \quad \Rightarrow \quad \phi = -\pi$$

Ahora tenemos que la fuerza recuperadora es

$$F(t) = ma(t) = -m\omega^2 x(t) = -0{,}08x(t) \text{ N}$$

Por lo tanto

$$F(5) = -0{,}08\, x(5) = -6{,}7 \cdot 10^{-3}\text{N}$$

► MAS-17 [m17—A3; *pág.142*] (Nota: parecido al **MAS-12**)

3. Supongamos que un cuerpo realiza un movimiento armónico simple alrededor de su posición de equilibrio $(x = 0)$ debido a la acción de una fuerza $F = -kx$ con $k = 10$ N/m. La amplitud de la oscilación es 2 m y el tiempo que tarda es describir una oscilación completa es 2 segundos. Sabiendo que en $t = 0$ el desplazamiento es máximo y positivo, representar gráficamente la variación de la energía cinética en función del tiempo (no es necesario una representación exacta, basta simplemente con indicar los valores máximos y mínimos de cada función, los puntos de corte con los ejes y la forma de las funciones). **(2,5 puntos)**

Solución

Las ecuaciones generales del movimiento son

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$

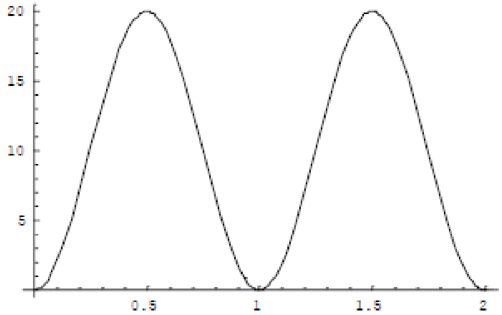
De los datos del enunciado deducimos que la fase inicial es nula $(\delta = 0)$ ya que $x(0) = A = 2$ m, y la frecuencia angular es $\omega = 2\pi / T = \pi$ rad/s. Por lo tanto, las ecuaciones del movimiento serán

$$x = 2\cos(\pi t) \text{ m}$$

$$v = -2\pi\sin(\pi t) \text{ m/s}$$

La energía cinética será:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{k}{\omega^2}v^2 = 20\sin^2(\pi t) \text{ J}$$



► MAS-18 [m18—B3; *pág.145*]

3. Una masa oscila en el eje X alrededor de su posición de equilibrio ($x = 0$ cm) describiendo un movimiento armónico simple. En cada segundo realiza 2 oscilaciones completas de amplitud 10 cm. Sabiendo que en el instante inicial la masa tiene una velocidad $v = -20$ cm/s con valor positivo del desplazamiento, obtener la ecuación completa de la posición en función del tiempo. **(2,5 puntos)**

Solución

La solución general de la ecuación del movimiento armónico simple es

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$

En nuestro caso tenemos que la frecuencia f es 2 Hz, por lo que la frecuencia angular es $\omega = 4\pi$ rad/s y la ecuación del movimiento tiene la forma:

$$x(t) = 10\cos(4\pi t + \delta)$$

Sólo nos queda obtener la fase, la cual se calcula a partir de la condición inicial de la velocidad

$$v(0) = -20 = -40\pi\sin(\delta) \quad \rightarrow \quad \delta = \arcsin\left(\frac{20}{40\pi}\right) = 0{,}16 \text{ ó } \pi - 0{,}16$$

Elegimos la fase de 0,16 porque el desplazamiento es positivo, por lo que la ecuación del movimiento será

$$x = 10\cos(4\pi t + 0{,}16) \text{ cm}$$

► MAS-19 [m19—B3; *pág.147*]

3. Considerar un objeto que realiza un movimiento armónico simple con la siguiente ecuación para la velocidad en función del tiempo: $v(t) = -49{,}5\text{sen}(9{,}9t)$ cm/s.

-¿Cuál es el valor máximo del módulo de la aceleración del objeto? **(1 punto).**

-¿En qué tiempos alcanza el objeto esta aceleración máxima? **(1 punto).**

Solución

Las ecuaciones generales del movimiento son

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$
$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$
$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \delta)$$

de donde se deduce que

$$|a|_{max} = \omega |v|_{max} = 49,5 \times 9,9 = 490 \text{ cm/s}^2$$

Por otro lado tenemos que

$$a(t) = -490\cos(9,9t) \text{ cm/s}^2$$

de modo que el objeto alcanzará la aceleración máxima cuando

$$|\cos(9,9t)| = 1 \quad \Rightarrow \quad 9,9t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi... = n\pi, \quad n = 0,1,2,3...$$

es decir

$$t = \frac{n\pi}{9,9} \text{ s}, \quad n = 0,1,2,3...$$

► MAS-20 [m20—A3; *pág.149*]

3. Una masa oscila en el eje X alrededor de su posición de equilibrio ($x = 0$ cm) describiendo un movimiento armónico simple con frecuencia 2 Hz. Sabiendo que en el instante inicial la masa pasa por la posición de equilibrio con una velocidad $v = -20$ cm/s, obtener la ecuación completa de la posición en función del tiempo. **(2,5 puntos)**

Solución

La solución general de la ecuación del movimiento armónico simple es

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$
$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$

En nuestro caso tenemos que la frecuencia angular es ω = 4π rad/s. Sustituimos la condición inicial de la posición para obtener la fase

$$x(0) = 0 = A\cos(\delta) \text{ cm} \quad \rightarrow \quad \delta = \frac{\pi}{2} \text{ ó } \frac{3\pi}{2}$$

Elegimos $\delta = \frac{\pi}{2}$ porque la velocidad es negativa:

$$v(0) = -20 = -A4\pi\sin(\pi/2) \quad \rightarrow \quad A = \frac{5}{\pi}$$

por lo que la ecuación del movimiento será

$$x(t) = \frac{5}{\pi}\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ cm}$$

► MAS'-21 [m01—B3; *pág.3*]

3. Los valores extremos de la aceleración de un movimiento armónico simple en el eje X son $\pm 16\pi^2$ cm/s^2. Obtener la ecuación completa de la posición en función del tiempo sabiendo que la frecuencia de la oscilación es de 4 Hz y que cuando t = 1/8 s la posición es x = 0,125 cm con velocidad negativa. **(2,5 puntos)**

Solución

La solución general de la ecuación del movimiento armónico simple es

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$
$$v = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$
$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x$$

De los datos del enunciado tenemos $\omega = 2\pi f = 8\pi$ rad/s

Además:

$$A\omega^2 = 16\pi^2 \quad \rightarrow \quad A = 16\pi^2/\omega^2 = 0,25 \text{ cm}$$

Ahora sólo queda calcular la fase inicial a partir de la condición inicial

$$x(t = 1/8) = 0,125 \ \text{ cm} = 0,250\cos(\pi + \delta).$$

Despejando

$$\cos(\pi + \delta) = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad (\pi + \delta) = \arccos\frac{1}{2} = \pm\frac{\pi}{3} \quad \rightarrow \quad \delta = \begin{cases} -\dfrac{2\pi}{3} \\ -\dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$$

Para distinguir entre las dos posibles fases debemos utilizar el dato de la velocidad

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \delta) = \begin{cases} -5.44 \quad \text{si } \delta = -\dfrac{2\pi}{3} \\ 5.44 \quad \text{si } \delta = -\dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$$

por lo que la ecuación del movimiento será

$$x(t) = 0,250\cos\left(8\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

► MAS'-22 [m02—B3; *pág.11*]

3. Una masa unida al extremo de un muelle horizontal de masa despreciable describe un movimiento armónico simple de amplitud 1 m. Calcular la elongación del muelle en el instante en el que la aceleración de la masa es la mitad de su valor máximo. **(2 puntos)**

Solución

La solución general de la ecuación del movimiento armónico simple es

$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x(t)$$

En el instante que se menciona en el enunciado tenemos que

$$a(t^*) = \frac{1}{2}A\omega^2 = -\omega^2 x(t^*) \quad \rightarrow \quad x(t^*) = -\frac{1}{2}\text{cm}$$

► MAS'-23 [m03—A3; *pág.17*]

3. Una partícula de 0,5 kg de masa describe un movimiento armónico simple de 10 cm de amplitud, realizando 2 oscilaciones en cada segundo. Calcular la energía cinética que poseerá la partícula cuando pase por su posición de equilibrio. **(2 puntos)**

Solución

La velocidad de la partícula cuando pasa por la posición de equilibrio es la velocidad máxima: $v_{max} = A\omega = A2\pi f = 1,257$ m/s

La energía cinética será

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = 0,395 \text{ J}$$

► MAS'-24 [m04—A3; *pág.25*]

3. Demostrar que la energía total (cinética más potencial) de una partícula que describe un movimiento armónico simple tiene la forma $E = 2\pi^2 M A^2 f^2$, donde M es la masa de la partícula, A la amplitud y f la frecuencia (en Hz). **(2 puntos)**

Solución

La energía total de un movimiento armónico simple tiene la forma

$$\begin{aligned} E = E_c + E_p &= \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} M\omega^2 x^2 \\ &= \frac{1}{2} M A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2} M\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \delta) \\ &= \frac{1}{2} M A^2 \omega^2 = 2\pi^2 M A^2 f^2 \end{aligned}$$

► MAS'-25 [m05—B3; *pág.34*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **MAS'-24**

► MAS'-26 [m06—B3; *pág.41*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **MAS'-21**

► MAS'-27 [m07—B3; *pág.50*]

3. Una partícula oscila en el eje X con un movimiento armónico simple cuya ecuación es $x(t) = 2\cos(4\pi t)$ cm. Calcular el espacio total que ha recorrido la partícula cuando $t = 1,2$ s. **(2,5 puntos)**

Solución

La posición inicial de la partícula es la posición de máximo desplazamiento

$$x_i = x(t=0) = 2 \text{ cm}.$$

La posición final es

$$x_f = x(t=1,2) = -1.618 \text{ cm},$$

moviéndose hacia la izquierda (velocidad negativa). Como el periodo de oscilación de la partícula es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{2} \text{ s},$$

en esos primeros 1,2 s ha realizado dos oscilaciones completas, lo que equivale a una distancia total de 8 veces la amplitud de la oscilación, 16 cm (en cada oscilación recorre 4 veces la máxima elongación). A esto hay que añadir el valor absoluto de la diferencia entre la posición inicial y la final:

$$d = 16 + \left| x_f - x_i \right| = 19,618 \text{ cm}$$

► MAS'-28 [m08—A3; *pág.56*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **MAS'-23**

► MAS'-29 [m10—A3; *pág.71*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **MAS'-27**

► MAS'-30 [m11—B3; *pág.80*]

3. Una partícula oscila en el eje X con un movimiento armónico simple cuya ecuación es $x(t) = 10^{-2} \cos\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ cm}$. Calcular el tiempo que tarda la partícula en pasar por tercera vez por la posición de equilibrio ($x = 0$ cm). **(2,5 puntos)**

Solución

En la posición de equilibrio se cumple $x(T) = 0$. Sustituyendo tenemos

$$\cos\left(8\pi T + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad 8\pi T + \frac{\pi}{6} = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Despejando llegamos a

$$T = \frac{6n+2}{48} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

La tercera vez ocurrirá cuando $n = 2$: $T = \frac{14}{48} = 0,292 \text{ s}$.

► MAS'-31 [m12—A3; *pág.88*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **MAS'-30**

► MAS'-32 [m13—A3; *pág.96*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **MAS'-22**

► MAS'-33 [m14—A3; *pág.104*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **MAS'-23**

► MAS'-34 [m16—B3; *pág.122*]

3. Una partícula describe un movimiento armónico simple realizando 0,3 oscilaciones en cada segundo. En el momento de máximo desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio, la aceleración de la partícula es de -0,5 cm/s^2. Calcular la amplitud de la oscilación. **(2 puntos)**

Solución

En el momento de máximo desplazamiento la aceleración también es máxima (en valor absoluto), de modo que tenemos que

$$|a_{max}| = A\omega^2 = A(2\pi f)^2 \quad \rightarrow \quad A = \frac{|a_{max}|}{(2\pi f)^2} = 0{,}14 \text{ cm}$$

► MAS'-35 [m17—A4; *pág.129*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **MAS'-34**

► MAS'-36 [m18—B4; *pág.138*]

4. La aceleración de un movimiento armónico simple en el eje X está determinada por la expresión $a(t) = -16\pi^2 x(t)$ cm/s^2, siendo $x(t)$ la posición con respecto a la posición de equilibrio ($x = 0$ cm). Sabiendo que el desplazamiento máximo es 4 cm y que $a(t=0) = 64\pi^2$ cm/s^2, determinar la ecuación completa de la posición en función del tiempo. **(2,5 puntos)**

Solución

La solución general de la ecuación del movimiento armónico simple es

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x$$

De los datos del enunciado tenemos $\omega = 4\pi$ rad/s y A = 4 cm.

$$x = 4\cos(4\pi t + \delta)$$

Ahora sólo queda utilizar la condición inicial $x(t=0) = -4$ cm para calcular la fase inicial. Sustituimos las condiciones iniciales

$$x(0) = -4 \text{ cm} = 4\cos(\delta) \text{ cm} \quad \rightarrow \quad \delta = \pi$$

por lo que la ecuación del movimiento será

$$x = 4\cos(4\pi t + \pi) \text{ cm}$$

► MAS'-37 [m19—A3; *pág.144*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **MAS'-36**