Problemas & Resoluciones de **GRAVITACIÓN**

(Física, PAU-UNED 2013 & 14, «**g**»)

► **CONTENIDOS:** En la tabla siguiente, los problemas del año *2013* aparecen con los nombres **g-01** a **g-40**. Los del *2014* se corresponden con **g'-41** a **g'-80**.

La página referida para los problemas del *2013* se refiere al Dossier de la Academia; la de los problemas del *2014* se corresponde al pdf de la web en el cual están todos los enunciados y soluciones de este año ordenados.

El contenido temático de cada problema se especifica en la columna de "Comentarios".

Los años 2013 y 2014 sólo aparecieron 37 tipos diferentes de problema, representados por los que están en negrita en la tabla: **g-01**, **g-02**, **g-04**, etc.

NOMBRE	mod.	op.	probl.	pág.	Comentarios
g-01	1	A	1	*98*	sat: puesta en orb
g-02	1	B	1	*99*	*v_esc*: agujero negro
g-03	2	A	1	*101*	similar al g-01
g-04	2	B	1	*102*	lanzam proyectil: *v* en infinito
g-05	3	A	1	*104*	lanzam proyectil: *h_máx*
g-06	3	B	1	*105*	3ª Kep: cálculo *T*
g-07	4	A	1	*107*	similar al g-05
g-08	4	B	1	*108*	3ª Kep: deducción teórica
g-09	5	A	1	*110*	sat: *T* ==> *R*; *v* puesta en orb
g-10	5	B	1	*111*	Luna: *v* orbital
g-11	6	A	1	*113*	similar al g-09
g-12	6	B	1	*114*	idéntico al g-08
g-13	7	A	1	*116*	conserv *E*: cálculo de *v*
g-14	7	B	1	*117*	similar al g-10
g-15	8	A	1	*118*	similar al g-13
g-16	8	B	1	*119*	similar al g-06
g-17	9	A	1	*131*	sat: deduc teórica *E* orbital
g-18	9	B	1	*132*	similar al g-04
g-19	10	A	1	*133*	similar al g-17
g-20	10	B	1	*134*	idéntico al g-02
g-21	11	A	1	*121*	conserv *E*: *v_esc* y *R* de 10% *E_cin*
g-22	11	B	1	*122*	sat: *T* y *R* orbital (teórico)
g-23	12	A	1	*123*	similar al g-21

g-24	12	B	1	*124*	similar al g-26
g-25	13	A	1	*126*	similar al g-27
g-26	13	B	1	*127*	sat: v y R orbitales; momento ang
g-27	14	A	1	*128*	sat: g y *a_centrípeta*; 2a ley Newt
g-28	14	B	1	*129*	idéntico al g-22
g-29	15	A	1	*136*	2ª ley Newt; conserv E
g-30	15	B	1	*137*	3ª Kep (elipse!); R y *T_orb* en MCU
g-31	16	A	1	*139*	idéntico al g-29
g-32	16	B	1	*140*	sat geost: *a_centrípeta* (teórico)
g-33	17	A	1	*141*	sat: R orbital; escape
g-34	17	B	1	*142*	idéntico al g-32
g-35	18	A	1	*144*	similar al g-33
g-36	18	B	1	*145*	sat: E orbital, cambio orb (teórico)
g-37	19	A	1	*146*	sat: R y ω orbitales
g-38	19	B	1	*147*	idéntico al g-36
g-39	20	A	1	*149*	similar al g-37
g-40	20	B	1	*150*	idéntico al g-30
g'-41	1	A	1	*2*	similar al g-10
g'-42	1	B	1	*3*	similar al g-09
g'-43	2	A	1	*9*	sat: E, E_p, E_c en función de R
g'-44	2	B	1	*10*	pesos a difs alturas ==> *R_planeta*
g'-45	3	A	1	*17*	sat: E y ω ==> m
g'-46	3	B	1	*18*	g Tierra a distancia 6R
g'-47	4	A	1	*25*	peso objeto ==> d a centro Tierra
g'-48	4	B	1	*26*	idéntico al g'-41
g'-49	5	A	1	*32*	escape del Sol; ω en orb circ
g'-50	5	B	1	*33*	idéntico al g'-46
g'-51	6	A	1	*40*	sat: ω ==> E; ΔE cambio orb
g'-52	6	B	1	*41*	*g_sup* y *v_escape* en Tierra y Luna
g'-53	7	A	1	*48*	sat: 3ª Kep, E orbital (teórico)
g'-54	7	B	1	*50*	*g_sup* Tierra ==> *g_sup* Luna
g'-55	8	A	1	*56*	idéntico al g'-42
g'-56	8	B	1	*57*	idéntico al g'-43
g'-57	9	A	1	*62*	idéntico al g'-44
g'-58	9	B	1	*63*	escape de Sol y de Tierra
g'-59	10	A	1	*70*	idéntico al g'-53
g'-60	10	B	1	*71*	similar al g'-52
g'-61	11	A	1	*78*	idéntico al g'-52
g'-62	11	B	1	*79*	idéntico al g'-47
g'-63	12	A	1	*87*	idéntico al g'-49
g'-64	12	B	1	*88*	idéntico al g'-60
g'-65	13	A	1	*95*	sat: ω y E ==> m
g'-66	13	B	1	*96*	idéntico al g'-58
g'-67	14	A	1	*104*	idéntico al g'-54
g'-68	14	B	1	*105*	idéntico al g'-51

g'-69	15	A	1	*113*	pesos en sups de difs planetas
g'-70	15	B	1	*114*	similar al g-06
g'-71	16	A	1	*121*	eq entre los **g** de Tierra y Luna
g'-72	16	B	1	*122*	sat: *T*, *R* ==> *g* que actúa sobre él
g'-73	17	A	1	*128*	sat: *T*, *R*, *m* ==> *E*, *E_p*; *E_c*
g'-74	17	B	1	*129*	sat: *R*, *g* ==> *v_orbital*
g'-75	18	A	1	*137*	idéntico al g'-69
g'-76	18	B	1	*138*	idéntico al g'-72
g'-77	19	A	1	*144*	idéntico al g'-73
g'-78	19	B	1	*145*	idéntico al g'-70
g'-79	20	A	1	*153*	idéntico al g'-71
g'-80	20	B	1	*154*	idéntico al g'-74

► g-01 [m01—A1; *pág.98*]

1. Se quiere poner un satélite en órbita circular alrededor de la Tierra. Para ello, se lanza desde la superficie de la Tierra con una velocidad de 5 km/s.
-Calcular la altura máxima alcanzada. **(1,5 puntos)**
-Cuando el satélite alcanza la altura máxima se le impulsa para que describa una órbita circular alrededor de la Tierra. Determinar la velocidad con la que se le debe impulsar para que tenga lugar el movimiento circular bajo la acción del campo gravitatorio terrestre. **(1,5 puntos)**
Datos: $R_T = 6370$ km. $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg. $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Solución

Primero debemos averiguar cuál es la altura máxima alcanzada. Si elegimos el origen de energía potencial ($U = 0$) cuando $r = \infty$, la expresión de la energía potencial en función de la altura es

$$U = -G\frac{M_T m}{r}.$$

Por lo tanto, igualando energías en la superficie de la Tierra y en la altura máxima tenemos que:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = -G\frac{M_T m}{r},$$

de donde despejamos la altura máxima $r = 7959$ km.
Una vez que el satélite está a la altura r, para que describa una órbita circular alrededor de la Tierra a esa distancia se debe cumplir:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{M_T m}{r^2},$$

de donde obtenemos la velocidad que debe tener en esa órbita $v = 7,079$ km/s.

► g-02 [m01—B1; *pág.99*]

1. En relatividad general, el horizonte de sucesos es una superficie imaginaria de forma esférica que rodea a un agujero negro, en la cual la velocidad de escape necesaria para alejarse del mismo coincide con la velocidad de la luz (3×10^8 m/s). Por ello, ninguna cosa dentro de él, incluyendo los fotones (partículas que "componen" la luz), puede escapar debido a la atracción de un campo gravitatorio extremadamente intenso. Supongamos que en la etapa final de nuestro Sol, éste colapsa gravitatoriamente debido a la atracción gravitatoria provocada por su propia masa. Esto significa que su radio comienza a disminuir con el tiempo y su densidad aumenta. Sabiendo que la masa del Sol es aproximadamente de 2×10^{30} kg, calcular el radio máximo que debería tener el nuevo objeto (lo que podría identificarse con su horizonte de sucesos) para que pudiera considerarse como un agujero negro. **(2 puntos)**
Datos: $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Solución:

La velocidad de escape de un campo gravitatorio creado por una masa M, a una distancia R de la misma, tiene la forma:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

En nuestro caso, para calcular el horizonte de sucesos tenemos que considerar que esa partícula es un fotón que se mueve a la velocidad de la luz c. Así pues tenemos:

$$c = \sqrt{\frac{2GM_{Sol}}{R}}.$$

Despejando obtenemos el radio de nuestra estrella convertida en agujero negro:

$$R \approx 3 \text{ km}$$

► g-03 [m02—A1; *pág.101*] (Nota: enunciado parecido al **g-01**)

1. Para poner un satélite en órbita circular alrededor de la Tierra se lanza desde su superficie con una velocidad de 7 km/s.

-Calcular la altura máxima alcanzada. **(1,5 puntos)**

-Cuando el satélite alcanza la altura máxima se le impulsa para que describa una órbita circular alrededor de la Tierra. Determinar la velocidad con la que se le debe impulsar para que tenga lugar el movimiento circular bajo la acción del campo gravitatorio terrestre. **(1,5 puntos)**

Datos: $R_T = 6370$ km. $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg. $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Solución

Primero debemos averiguar cuál es la altura máxima alcanzada. Si elegimos el origen de energía potencial ($U = 0$) cuando $r = \infty$, la expresión de la energía potencial en función de la altura es

$$U = -G\frac{M_T m}{r}.$$

Por lo tanto, igualando energías en la superficie de la Tierra y en la altura máxima tenemos que:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = -G\frac{M_T m}{r},$$

de donde despejamos la altura máxima $r = 10464$ km.

Una vez que el satélite está a la altura r, para que describa una órbita circular alrededor de la Tierra a esa distancia se debe cumplir:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{M_T m}{r^2},$$

de donde obtenemos la velocidad que debe tener en esa órbita $v = 6{,}174$ km/s.

► g-04 [m02—B1; *pág.102*]

1. Un proyectil es lanzado verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de 20 km/s. Explicar razonadamente qué sucederá con el proyectil y calcular el estado final de su movimiento despreciando la interacción con otros astros. **(2,5 puntos)**

Datos: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. $R_T = 6370$ km. $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg.

Solución

La velocidad de escape del campo gravitatorio terrestre desde la superficie de la Tierra es

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11,2 \text{ km/s}$$

Como la velocidad inicial es mayor, el proyectil escapará del campo terrestre y se alejará indefinidamente siguiendo una trayectoria rectilínea dada por la dirección inicial del lanzamiento. Su movimiento será decelerado tendiendo a una velocidad límite constante (ya que no actúan más fuerzas sobre el proyectil). Aplicando conservación de la energía mecánica podemos obtener la velocidad límite:

$$E_{c,i} + U_i = E_{c,f} + U_f$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = \frac{1}{2}mv_f^2 + 0$$

Despejando se obtiene $v_f = \sqrt{v_0^2 - \frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{v_0^2 - v_e^2} = 16,57 \text{ km/s}$

► g-05 [m03—A1; *pág.104*]

1. Se quiere poner un satélite en órbita circular alrededor de la Tierra a una distancia de 10000 km de su centro. Calcular la velocidad con la que debemos lanzarlo desde la superficie de la Tierra para que la altura máxima coincida con el radio de la órbita. **(2 puntos)**

Datos: $R_T = 6370$ km. $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg. $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm²/kg².

Solución

Si elegimos el origen de energía potencial $(U = 0)$ cuando $r = \infty$, la expresión de la energía potencial en función de la altura es

$$U = -G\frac{M_T m}{r}.$$

Si aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica podemos igualar la energía del satélite en la superficie de la Tierra y en la altura máxima:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = -G\frac{M_T m}{R}.$$

de donde despejamos la velocidad inicial del lanzamiento $v = 6,74$ km/s.

► g-06 [m03—B1; *pág.105*]

1. El radio de la órbita terrestre alrededor del Sol es de $1,46\times10^{11}$ m y el de Urano es de $2,87\times10^{12}$ m. Aplicar la tercera Ley de Kepler para calcular el período de la órbita de Urano. **(2 puntos)**

Solución

La Tercera Ley de Kepler se formula de la siguiente forma

$$T^2 \propto R^3.$$

Entonces tenemos

$$T_{Urano} = T_{Tierra}\sqrt{\frac{R^3_{Urano}}{R^3_{Tierra}}} = 87,16 \text{ años}$$

► g-07 [m04—A1; pág.107] (Nota: enunciado parecido al **g-05**)

1. Queremos poner un satélite en una órbita circular alrededor de la Tierra con radio 8000 km. Calcular la velocidad con la que debemos lanzarlo desde la superficie de la Tierra para que la altura máxima coincida con el radio de la órbita. **(2 puntos)**
Datos: $R_T = 6370$ km. $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg. $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Solución

Si elegimos el origen de energía potencial $(U = 0)$ cuando $r = \infty$, la expresión de la energía potencial en función de la altura es

$$U = -G\frac{M_T m}{r}.$$

Si aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica podemos igualar la energía del satélite en la superficie de la Tierra y en la altura máxima:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = -G\frac{M_T m}{R}.$$

de donde despejamos la velocidad inicial del lanzamiento $v = 5{,}05$ km/s.

► g-08 [m04—B1; pág.108]

1. Según la tercera Ley de Kepler, el cuadrado del periodo orbital de un planeta es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica o distancia media. Suponiendo que estamos tratando de órbitas circulares, calcular el factor de proporcionalidad entre el cuadrado del periodo T^2 y el cubo del radio de la órbita R^3 para los planetas del sistema solar que orbitan alrededor del Sol. **(2 puntos)**

Solución

Como la fuerza de atracción gravitatoria del Sol es la responsable del movimiento orbital de los planetas del sistema solar podemos escribir:

$$G\frac{mM_S}{R^2} = m\omega^2 R = m\frac{4\pi^2}{T^2}R \quad \rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S}R^3$$

de modo que el factor de proporcionalidad será $\dfrac{4\pi^2}{GM_S}$.

► g-09 [m05—A1; pág.110]

1. Se quiere poner un satélite en una órbita circular estacionaria alrededor de la Tierra bajo la acción de su campo gravitatorio con un periodo de 2 horas.
-Calcular el radio de la órbita. **(1,5 puntos)**
-Calcular la velocidad con la que debemos lanzarlo desde la superficie de la Tierra para que la altura máxima coincida con el radio de la órbita. **(1,5 puntos)**
Datos: $R_T = 6370$ km. $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg. $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Solución

Como la fuerza de atracción gravitatoria es la responsable del movimiento orbital podemos escribir:

$$G\frac{mM_T}{R^2} = m\omega^2 R = m\frac{4\pi^2}{T^2}R \quad\rightarrow\quad R = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 8061 \text{ km}$$

Ahora podemos calcular la velocidad de lanzamiento a partir del principio de conservación de la energía mecánica. Si elegimos el origen de energía potencial ($U = 0$) cuando $r = \infty$, la expresión de la energía potencial en función de la altura es

$$U = -G\frac{M_T m}{r}.$$

Igualando la energía del satélite en la superficie de la Tierra y en la altura máxima tenemos:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = -G\frac{M_T m}{R}.$$

de donde despejamos la velocidad inicial del lanzamiento $v = 5{,}13$ km/s.

► g-10 [m05—B1; *pág.111*]

1. Supongamos que sólo conocemos el radio de la Tierra ($R_T = 6370$ km), la distancia Tierra-Luna ($r = 60R_T$) y el valor de la gravedad en la superficie terrestre ($g_0 = 9{,}81$ m/s^2), calcular la velocidad de la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra en función de estas magnitudes. **(2,5 puntos)**

Solución

Sabiendo que la fuerza de atracción gravitatoria de la Tierra es la responsable del movimiento orbital de la luna tenemos que:

$$G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad\rightarrow\quad v^2 = \frac{GM_T}{r}.$$

Ahora necesitamos calcular el término GM_T, para lo cual podemos utilizar el dato de la gravedad en la superficie terrestre:

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} \quad\rightarrow\quad GM_T = g_0 R_T^2.$$

Sustituyendo en la ecuación de arriba llegamos a:

$$v^2 = \frac{g_0 R_T^2}{r} = \frac{g_0 R_T}{60} \quad\rightarrow\quad v = \sqrt{\frac{g_0 R_T}{60}} = 1{,}02 \text{ km/s}$$

► g-11 [m06—A1; *pág.113*] (Nota: enunciado parecido al **g-09**)

1. Queremos poner un satélite en una órbita circular estacionaria alrededor de la Tierra bajo la acción de su campo gravitatorio con un periodo de 4 horas.
-Calcular el radio de la órbita. **(1,5 puntos)**
-Calcular la velocidad con la que debemos lanzarlo desde la superficie de la Tierra para que la altura máxima coincida con el radio de la órbita. **(1,5 puntos)**
Datos: $R_T = 6370$ km. $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg. $G = 6{,}67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Solución

Como la fuerza de atracción gravitatoria es la responsable del movimiento orbital podemos escribir:

$$G\frac{mM_T}{R^2} = m\omega^2 R = m\frac{4\pi^2}{T^2}R \quad \rightarrow \quad R = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 12796 \text{ km}$$

Ahora podemos calcular la velocidad de lanzamiento a partir del principio de conservación de la energía mecánica. Si elegimos el origen de energía potencial ($U = 0$) cuando $r = \infty$, la expresión de la energía potencial en función de la altura es

$$U = -G\frac{M_T m}{r}.$$

Igualando la energía del satélite en la superficie de la Tierra y en la altura máxima tenemos:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = -G\frac{M_T m}{R}.$$

de donde despejamos la velocidad inicial del lanzamiento $v = 7{,}93$ km/s.

► g-12 [m06—B1; *pág.114*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **g-08**

► g-13 [m07—A1; *pág.116*]

1. Una estación espacial se encuentra a 2000 km de la superficie de la Tierra. Desde la estación se quiere lanzar un satélite para ponerlo en una órbita superior alrededor de la Tierra con radio 10000 km. Calcular la velocidad con la debe ser lanzado para que llegue a esa distancia con velocidad nula. **(2,5 puntos)**

Datos: $R_T = 6370$ km. $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg. $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Solución

Si elegimos el origen de energía potencial ($U = 0$) cuando $r = \infty$, la expresión de la energía potencial en función de la altura es

$$U = -G\frac{M_T m}{r}.$$

Si aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica podemos igualar la energía del satélite en la estación espacial con la energía en la altura máxima:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{(R_T + h)} = -G\frac{M_T m}{R},$$

siendo h la altura a la que se encuentra la estación con respecto a la superficie terrestre y R el radio de la órbita del satélite. Despejando la velocidad inicial del lanzamiento obtenemos $v = 3{,}94$ km/s.

► g-14 [m07—B1; *pág.117*] (Nota: enunciado parecido al **g-10**)

1. Supongamos que sólo conocemos el radio de la Tierra ($R_T = 6370$ km), la distancia Tierra-Luna ($r = 60R_T$) y el valor de la gravedad en la superficie terrestre ($g_0 = 9{,}81$ m/s^2), calcular el periodo de rotación de la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra en función de estas magnitudes. **(2,5 puntos)**

Solución

Sabiendo que la fuerza de atracción gravitatoria de la Tierra es la responsable del movimiento orbital de la luna tenemos que:

$$G\frac{M_T m}{r^2} = m\omega^2 r \quad \rightarrow \quad \omega^2 = \frac{GM_T}{r^3} \quad \rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}.$$

Ahora necesitamos calcular el término GM_T, para lo cual podemos utilizar el dato de la gravedad en la superficie terrestre:

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} \quad \rightarrow \quad GM_T = g_0 R_T^2.$$

Sustituyendo en la ecuación de arriba llegamos a:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{g_0 R_T^2} \quad \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{g_0 R_T^2}} = 27,24 \text{ días}$$

► g-15 [m08—A1; *pág.118*] (Nota: enunciado parecido al **g-13**)

1. A 500 km de la superficie de la Tierra se encuentra una estación espacial desde la que se quiere lanzar un satélite para ponerlo en una órbita superior alrededor de la Tierra con radio 10000 km. Calcular la velocidad con la debe ser lanzado para que llegue a esa distancia con velocidad nula. **(2,5 puntos)**

Datos: $R_T = 6370$ km. $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg. $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm²/kg².

Solución

Si elegimos el origen de energía potencial $(U = 0)$ cuando $r = \infty$, la expresión de la energía potencial en función de la altura es

$$U = -G\frac{M_T m}{r}.$$

Si aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica podemos igualar la energía del satélite en la estación espacial con la energía en la altura máxima:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{(R_T + h)} = -G\frac{M_T m}{R},$$

siendo h la altura a la que se encuentra la estación con respecto a la superficie terrestre y R el radio de la órbita del satélite. Despejando la velocidad inicial del lanzamiento obtenemos $v = 6,03$ km/s.

► g-16 [m08—B1; *pág.119*] (Nota: enunciado parecido al **g-06**)

1. El radio de la órbita terrestre alrededor del Sol es de $1,46\times10^{11}$ m y el de Saturno es de $1,43\times10^{12}$ m. Aplicar la tercera Ley de Kepler para calcular el período de la órbita de Saturno. **(2 puntos)**

Solución

La Tercera Ley de Kepler se formula de la siguiente forma

$$T^2 \propto R^3.$$

Entonces tenemos

$$T_{Urano} = T_{Tierra}\sqrt{\frac{R^3_{Saturno}}{R^3_{Tierra}}} = 30,65 \text{ años}$$

► g-17 [m09—A1; *pág.131*]

1. Deducir la expresión de la energía total de un satélite que orbita alrededor de la Tierra en función exclusivamente de G, la masa de la Tierra M_T, la masa del satélite m y la velocidad angular ω del satélite. Considerar que el origen de energía potencial se encuentra en un punto infinitamente alejado. **(2,5 puntos)**

Solución

En una órbita cualquiera la energía del satélite vendrá dada por la suma de su energía cinética más potencial:

$$E_T = E_c + U = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{r},$$

donde hemos elegido el origen de energía potencial ($U = 0$) en $r = \infty$

Sabiendo que la fuerza de atracción gravitatoria es la responsable del movimiento orbital tenemos que:

$$G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \to \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r},$$

por lo que la energía total tendrá la forma:

$$E_T = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r}.$$

Ahora sólo tenemos que expresar el radio de la órbita en función de la velocidad angular, lo cual es fácil volviendo a la igualdad entre fuerza de atracción y fuerza centrípeta:

$$G\frac{M_T m}{r^2} = m\omega^2 r \quad \to \quad r^3 = G\frac{M_T}{\omega^2},$$

de modo que tenemos

$$E_T = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{\left(G\frac{M_T}{\omega^2}\right)^{1/3}} = -\frac{1}{2}m\left(GM_T\omega\right)^{2/3}.$$

► g-18 [m09—B1; *pág.132*] (Nota: enunciado parecido al **g-04**)

1. Un proyectil es lanzado verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de 15 km/s. Explicar razonadamente qué sucederá con el proyectil y calcular el estado final de su movimiento despreciando la interacción con otros astros. **(2,5 puntos)**
Datos: $G = 6,67\times10^{-11}$ Nm²/kg². $R_T = 6370$ km. $M_T = 5,98\times10^{24}$ kg.

Solución

La velocidad de escape del campo gravitatorio terrestre desde la superficie de la Tierra es

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11,2 \text{ km/s}$$

Como la velocidad inicial es mayor, el proyectil escapará del campo terrestre y se alejará indefinidamente siguiendo una trayectoria rectilínea dada por la dirección inicial del lanzamiento. Su movimiento será decelerado tendiendo a una velocidad límite constante (ya que no actúan más fuerzas sobre el proyectil). Aplicando conservación de la energía mecánica podemos obtener la velocidad límite:

$$E_{c,i} + U_i = E_{c,f} + U_f$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = \frac{1}{2}mv_f^2 + 0$$

Despejando se obtiene $v_f = \sqrt{v_0^2 - \frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{v_0^2 - v_e^2} = 9{,}98 \text{ km/s}$

► g-19 [m10—A1; *pág.133*] (Nota: enunciado parecido al **g-17**)

1. Deducir la expresión de la energía total de un satélite que orbita alrededor de la Tierra en función exclusivamente de *G*, la masa de la Tierra M_T, la masa del satélite *m* y el periodo orbital *T* del satélite. Considerar que el origen de energía potencial se encuentra en un punto infinitamente alejado. **(2,5 puntos)**

Solución

En una órbita cualquiera la energía del satélite vendrá dada por la suma de su energía cinética más potencial:

$$E_T = E_c + U = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{r},$$

donde hemos elegido el origen de energía potencial ($U = 0$) en $r = \infty$

Sabiendo que la fuerza de atracción gravitatoria es la responsable del movimiento orbital tenemos que:

$$G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r},$$

por lo que la energía total tendrá la forma:

$$E_T = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r}.$$

Ahora sólo tenemos que expresar el radio de la órbita en función del periodo de rotación, lo cual es fácil volviendo a la igualdad entre fuerza de atracción y fuerza centrípeta:

$$G\frac{M_T m}{r^2} = mr\frac{4\pi^2}{T^2} \quad \rightarrow \quad r^3 = G\frac{M_T}{4\pi^2}T^2,$$

de modo que tenemos

$$E_T = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{\left(G\frac{M_T}{4\pi^2}T^2\right)^{1/3}} = -\frac{1}{2}m\left(GM_T\frac{2\pi}{T}\right)^{2/3}.$$

► g-20 [m10—B1; *pág.134*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **g-02**

► g-21 [m11—A1; pág.121]

1. Se lanza un objeto desde la superficie de un planeta de radio R con una velocidad igual a la velocidad de escape v_e. Determinar a cuántos radios de distancia del centro del planeta el objeto habrá perdido el 90 % de su energía cinética. **(2,5 puntos)**

Solución

Las energías cinéticas y potenciales en los dos puntos de interés son:

-En la superficie, $r = R$

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_e^2, \quad U_1 = -\frac{GMm}{R}$$

-En la distancia buscada r

$$K_2 = 0{,}1 \cdot K_1, \quad U_2 = -\frac{GMm}{r}$$

Aplicamos conservación de la energía mecánica

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Despejando en la ecuación resultante obtenemos:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{0{,}45v_e^2}{GM}$$

Ahora podemos utilizar la ecuación de la velocidad de escape de un planeta:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

y sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{0.9GM}{GMR} = \frac{1}{R} - \frac{0.9}{R} = \frac{0.1}{R}$$

$$r = 10\,R$$

Es decir, 10 veces el radio del planeta, independientemente del valor de la velocidad de escape.

► g-22 [m11—B1; pág.122]

1. Supongamos que un satélite tarda el mismo tiempo en describir una órbita alrededor de la Tierra en su superficie que en describir una órbita alrededor de la Luna también en su superficie. Sabiendo que el radio de la Tierra es 3,67 veces más grande que el radio de la luna ($R_T = 3{,}67 \times R_L$), calcular la relación entre las masas de la Tierra y la Luna. **(2,5 puntos)**

Solución

Como el satélite se mueve en ambos casos bajo la acción del campo gravitatorio de cada astro tenemos que

$$G\frac{M_T m}{R_T^2} = m\frac{v_T^2}{R_T} = m\omega_T^2 R_T = m\frac{4\pi^2}{T_T^2}R_T$$

$$G\frac{M_L m}{R_L^2} = m\frac{v_L^2}{R_L} = m\omega_L^2 R_L = m\frac{4\pi^2}{T_L^2}R_L$$

Como $T_T = T_L$, dividiendo ambas ecuaciones llegamos a

$$\frac{M_T}{M_L} = \frac{R_T^3}{R_L^3}$$

Por lo que el resultado final será $M_T = 49{,}4 \times M_L$.

► g-23 [m12—A1; *pág.123*] (Nota: enunciado parecido al **g-21**)

1. Se lanza un objeto desde la superficie de un planeta de radio R con una velocidad igual a la velocidad de escape v_e. Determinar a cuántos radios de distancia del centro del planeta el objeto habrá perdido el 50 % de su energía cinética. **(2,5 puntos)**

Solución

Las energías cinéticas y potenciales en los dos puntos de interés son:

-En la superficie, $r = R$

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_e^2, \quad U_1 = -\frac{GMm}{R}$$

-En la distancia buscada r

$$K_2 = 0{,}5 \cdot K_1, \quad U_2 = -\frac{GMm}{r}$$

Aplicamos conservación de la energía mecánica

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Despejando en la ecuación resultante obtenemos:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{0{,}25v_e^2}{GM}$$

Ahora podemos utilizar la ecuación de la velocidad de escape de un planeta:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

y sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{0.5GM}{GMR} = \frac{1}{R} - \frac{0.5}{R} = \frac{0.5}{R}$$

$$r = 2\,R$$

Es decir, 2 veces el radio del planeta, independientemente del valor de la velocidad de escape.

► g-24 [m12—B1; *pág.124*] (Nota: enunciado parecido al **g-26**)

1. Supongamos que tenemos dos satélites artificiales de la misma masa describiendo órbitas circulares estacionarias de radios R_1 y R_2 respectivamente alrededor de la Tierra bajo la acción de su campo gravitatorio. Suponiendo que el radio de la órbita del primer satélite es menor que el radio de la órbita del segundo, es decir, que $R_1 < R_2$, ¿qué satélite tendrá mayor velocidad lineal? **(2 puntos)**

Solución

Podemos calcular la energía cinética de cualquier satélite sabiendo que la fuerza gravitatoria de la Tierra es la responsable del movimiento orbital del satélite:

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{M_T m}{R^2} \quad \rightarrow \quad E_c = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{M_T m}{2R} \quad .$$

Vemos que cuanto mayor es el radio de la órbita menor es la energía cinética del satélite. Como la masa de los dos satélites es la misma, llegamos a la conclusión de que el satélite con menor órbita R_1 es el que tendrá mayor velocidad lineal.

► g-25 [m13—A1; *pág.126*] (Nota: enunciado parecido al **g-27**)

1. Un satélite se mueve con velocidad constante en una órbita circular alrededor de la Tierra bajo la acción de su campo gravitatorio. Si su aceleración es 8,14 m/s^2 y el periodo de su órbita es de 97 minutos, calcular el radio de la órbita. **(2 puntos)**

Solución

La aceleración del satélite es la aceleración centrípeta:

$$g = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = 6984 \text{ km}$$

► g-26 [m13—B1; *pág.127*]

1. Supongamos que tenemos dos satélites artificiales de la misma masa describiendo órbitas circulares estacionarias de radios R_1 y R_2 respectivamente alrededor de la Tierra bajo la acción de su campo gravitatorio. Suponiendo que el radio de la órbita del primer satélite es menor que el radio de la órbita del segundo, es decir, que $R_1 < R_2$:

-¿Qué satélite tendrá mayor velocidad lineal? **(1,5 puntos)**
-¿Qué satélite tendrá mayor momento angular? **(1 punto)**

Solución

Podemos calcular la energía cinética de cualquier satélite sabiendo que la fuerza gravitatoria de la Tierra es la responsable del movimiento orbital del satélite:

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{M_T m}{R^2} \quad \rightarrow \quad E_c = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{M_T m}{2R} \quad .$$

Vemos que cuanto mayor es el radio de la órbita menor es la energía cinética del satélite. Como la masa de los dos satélites es la misma, llegamos a la conclusión de que el satélite con menor órbita R_1 es el que tendrá mayor velocidad lineal.
El módulo del momento angular es

$$L = mRv = m\sqrt{GM_T R}$$

donde hemos sustituido la velocidad lineal obtenida en el apartado anterior:

$$v = \sqrt{G\frac{M_T}{R}} \; .$$

Por lo tanto tendrá mayor momento angular el satélite con mayor radio orbital, esto es, el segundo satélite.

► g-27 [m14—A1; *pág.128*]

1. Una estación espacial se mueve con velocidad constante en una órbita circular estacionaria alrededor de la Tierra bajo la acción de su campo gravitatorio.
- Si su aceleración es 7 m/s^2 y el periodo de su órbita es de 2 horas, calcular el radio de la órbita. **(2 puntos)**
- ¿Con qué fuerza atraerá la Tierra a un astronauta de 70 kg que se encuentra en la estación? **(1 punto)**

Solución

La aceleración del satélite es la aceleración centrípeta:

$$g = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = 9192 \text{ km}$$

El módulo de la fuerza con la que la Tierra atraerá al astronauta será

$$F = mg = 490 \text{ N}$$

► g-28 [m14—B1; *pág.129*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **g-22**

► g-29 [m15—A1; *pág.136*]

1. Supongamos que lanzamos verticalmente un proyectil desde la superficie de la Tierra dirigido hacia la Luna. Si despreciamos cualquier tipo de rozamiento y la influencia de cualquier otro astro del Sistema Solar:
-¿En qué punto de su trayectoria la aceleración será nula? **(1 punto)**
-¿Cuál sería la velocidad inicial mínima del cohete necesaria para llegar a este punto y caer en la Luna por acción de la gravedad lunar? **(2 puntos)**

Datos: $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg. $R_T = 6370$ km. $M_{\text{Luna}} = 7,35 \times 10^{22}$ kg. $d_{\text{Tierra-Luna}} = 3,84 \times 10^8$ m.

Solución

La aceleración será nula cuando sobre el proyectil no actúe ninguna fuerza neta, o lo que es lo mismo, cuando la suma de las fuerzas que actúan sobre el mismo sea nula. En nuestro problema esto ocurrirá cuando la fuerza de atracción gravitatoria de la Tierra se anule con la atracción gravitatoria de la Luna (ya que tienen sentidos opuestos):

$$G\frac{M_T m}{r^2} = G\frac{M_L m}{(d_{T-L} - r)^2},$$

donde r está medida con respecto a la Tierra. Esta ecuación tiene dos soluciones, pero sólo nos interesa aquella que proporciona el punto entre la Tierra y la Luna en el que los campos tienen sentidos opuestos, es decir $r < d_{T-L}$, que es:

$$r = 3,46 \times 10^8 \text{ m}$$

Para calcular la velocidad inicial mínima que debe tener el proyectil hasta llegar a este punto podemos aplicar el principio de conservación de la energía mecánica, suponiendo que llegará a este punto r con velocidad nula.

$$E_i = E_f$$
$$E_{c,i} + U_{T,i} + U_{L,i} = E_{c,f} + U_{T,f} + U_{L,f}$$
$$\frac{1}{2}mv_0^{\,2} - G\frac{M_T m}{R_T} - G\frac{M_L m}{d_{T-L} - R_T} = -G\frac{M_T m}{r} - G\frac{M_L m}{d_{T-L} - r}$$

donde hemos elegido el origen de energías potenciales en un punto infinitamente alejado: $U = 0$ en $r = \infty$.

<u>OBSERVACIÓN IMPORTANTE</u>: En la energía mecánica total de la partícula hay que tener en cuenta la energía potencial debida al campo gravitatorio lunar.

Despejando v_0 obtenemos la velocidad pedida:

$$v_0 = 11{,}08 \text{ km/s}.$$

► g-30 [m15—B1; *pág.137*]

1. Dos planetas orbitan alrededor de una estrella de masa desconocida por la acción de su campo gravitatorio.
- El primero de ellos describe una órbita circular de radio 10^{10} m y periodo 1 año. Calcular la masa de la estrella. **(1 punto)**
- El segundo, sin embargo, describe una órbita elíptica, encontrándose el afelio (punto más alejado) a 2×10^{10} m de la estrella y el perihelio (punto más cercano) a $0{,}6\times10^{10}$ m. Aplicar la tercera Ley de Kepler para obtener el periodo de la órbita del segundo satélite. **(1,5 puntos)**

Datos: $G = 6{,}67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

<u>Solución</u>

Como la fuerza de atracción gravitatoria de la estrella es la responsable del movimiento orbital de los planetas podemos escribir:

$$G\frac{mM}{R_1^2} = m\omega_1^2 R_1 = m\frac{4\pi^2}{T_1^2}R_1 \quad \rightarrow \quad M = \frac{4\pi^2}{G}\frac{R_1^3}{T_1^2} = 5{,}95\times10^{26} \text{ kg}.$$

Según la tercera Ley de Kepler, el cuadrado del periodo orbital de un planeta es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica o distancia media. Para el primer satélite esta longitud es el radio de la órbita, mientras que para el segundo será:

$$R_2 = \frac{d_{afelio} + d_{perihelio}}{2} = 1{,}3\times10^{10} \text{ m}$$

Ahora podemos aplicar la tercera Ley de Kepler:

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} \quad \rightarrow \quad T_2 = T_1\left(R_2 / R_1\right)^{3/2} = 1{,}48 \text{ años}$$

► g-31 [m16—A1; *pág.139*]

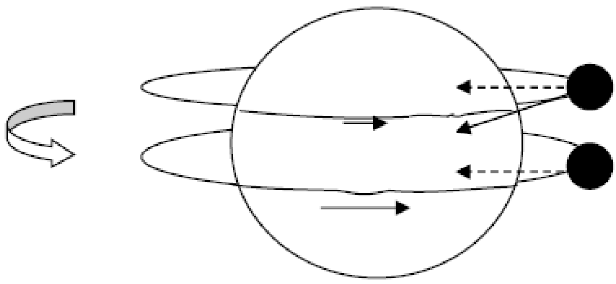
El enunciado de este problema es idéntico al del **g-29**

► g-32 [m16—B1; pág.140]

1. Un satélite geoestacionario es aquél cuya posición permanece siempre en la vertical de un determinado punto de la superficie terrestre a una distancia fija. Explicar razonadamente por qué los satélites geoestacionarios pueden estar solamente en la vertical de puntos del ecuador terrestre. **(2 puntos)**

Solución

Al permanecer siempre en la vertical de un determinado punto, los satélites geoestacionarios giran con la misma velocidad angular que lo hace la Tierra. La única fuerza que actúa sobre ellos es la atracción gravitatoria que está siempre dirigida hacia el centro de la Tierra. La fuerza gravitatoria entonces debe ejercer de fuerza centrípeta responsable del movimiento circular de los cuerpos. La fuerza centrípeta siempre apunta hacia el centro del giro.



En la figura vemos por qué un satélite geoestacionario tiene que estar siempre en la vertical de un punto de latitud 0°, es decir, sobre el Ecuador. Sólo en esa latitud, la fuerza gravitatoria puede ejercer como fuerza centrípeta ya que tendrían la misma dirección. En cualquier otra latitud, por ejemplo la ilustrada en la figura, la fuerza centrípeta (flecha con trazo discontinuo) y la gravitacional (flecha con trazo continuo) no coinciden en dirección, por lo que el satélite jamás podrá estar siempre sobre el mismo punto girando con la Tierra, únicamente por atracción gravitatoria.

► g-33 [m17—A1; pág.141]

1. La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular alrededor de Venus por la acción de su campo gravitatorio es $\omega = 1{,}45\times10^{-4}$ rad/s.

- Calcular el radio de la órbita. **(1,5 puntos)**
- Calcular la velocidad mínima con la que debemos lanzar una sonda desde el satélite para que escape del campo gravitatorio de Venus. **(1,5 puntos)**

Datos: $M_{\text{Venus}} = 4{,}87\times10^{24}$ kg. $G = 6{,}67\times10^{-11}$ Nm²/kg².

Solución

Si el satélite describe una órbita estacionaria, la fuerza centrípeta responsable de su movimiento es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce Venus sobre el satélite:

$$m\omega^2 R = G\frac{mM}{R^2}$$

Despejando obtenemos el radio de la órbita

$$R = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} = 24906 \text{ km}$$

La velocidad pedida es igual a la velocidad de escape del planeta a una distancia dada por el radio orbital:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 5{,}11 \text{ km/s}$$

► g-34 [m17—B1; *pág.142*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **g-32**

► g-35 [m18—A1; *pág.144*] (Nota: enunciado parecido al **g-33**)

1. La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular alrededor de la Tierra por la acción de su campo gravitatorio es $\omega = 5\times10^{-4}$ rad/s.
- Calcular el radio de la órbita. **(1,5 puntos)**
- Calcular la velocidad mínima con la que debemos lanzar una sonda desde el satélite para que escape del campo gravitatorio de la Tierra. **(1,5 puntos)**

Datos: $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg. $G = 6{,}67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Solución

Si el satélite describe una órbita estacionaria, la fuerza centrípeta responsable de su movimiento es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre el satélite:

$$m\omega^2 R = G\frac{mM}{R^2}$$

Despejando obtenemos el radio de la órbita

$$R = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} = 11685 \text{ km}$$

La velocidad pedida es igual a la velocidad de escape del planeta a una distancia dada por el radio orbital:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 8{,}26 \text{ km/s}$$

► g-36 [m18—B1; *pág.145*]

1. Un satélite artificial de masa m describe una órbita circular estacionaria de radio R alrededor de la Tierra, que tiene una masa M_T, bajo la acción de su campo gravitatorio.
- ¿Cuánto vale la energía total del satélite (energía potencial + energía cinética) en función del radio de la órbita? Considerar que el origen de energía potencial se encuentra en un punto infinitamente alejado. **(1 punto)**
- Supongamos ahora que en un instante dado, debido al rozamiento, el satélite pierde energía y se sitúa en una nueva órbita estacionaria, ¿aumentará o disminuirá el radio de la nueva órbita? Razonar la respuesta. **(0,75 puntos)**
- ¿Deberá aumentar o disminuir el satélite su velocidad para mantenerse en esa nueva órbita? Razonar la respuesta. **(0,75 puntos)**

Solución

La energía potencial del satélite viene dada por la expresión $U=-\dfrac{GM_T m}{R}+U_0$, donde U_0 es una constante que depende del origen de energía potencial considerado. Si suponemos, por ejemplo, que $U=0$ cuando $r=\infty$, tenemos entonces que $U_0=0$. Por otro lado la energía cinética se calcula a partir de

$$m\frac{v^2}{R}=G\frac{M_T m}{R^2} \quad \rightarrow \quad E_c=\frac{1}{2}mv^2=G\frac{M_T m}{2R} \ .$$

Sumando ambas energías obtenemos que la energía total del satélite es:

$$E=E_c+U=-G\frac{M_T m}{2R}.$$

Vemos que cuanto mayor es el radio de la órbita, mayor es la energía total del satélite (ya que es negativa). Por tanto, si el satélite pierde energía, R disminuirá y descenderá a una órbita de radio menor. Por otro lado, hemos visto arriba que la energía cinética del satélite aumenta si disminuye el radio de la órbita estacionaria, por lo que la velocidad del satélite deberá ser mayor.

► g-37 [m19—A1; *pág.146*]

1. La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular alrededor de Venus por la acción de su campo gravitatorio es ω = 1,45×10^{-4} rad/s. Sabiendo que su energía cinética es de 10^{9} J, calcular la masa del satélite. **(2,5 puntos)**
Datos: $M_{\text{Venus}}=4,87\times10^{24}$ kg. $G=6,67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Solución

En primer lugar debemos calcular el radio de la órbita. Si el satélite describe una órbita estacionaria, la fuerza centrípeta responsable de su movimiento es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce Venus sobre el satélite:

$$m\omega^2 R=G\frac{mM}{R^2}$$

Despejando obtenemos el radio de la órbita

$$R=\left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3}=24906\text{ km}$$

Ahora podemos calcular la masa del satélite a partir de la energía cinética:

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2R^2\rightarrow m=\frac{2E_c}{\omega^2R^2}=153,3\text{ kg}$$

► g-38 [m19—B1; *pág.147*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **g-36**

► g-39 [m20—A1; *pág.149*] (Nota: enunciado parecido al **g-37**)

1. La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular alrededor de la Tierra por la acción de su campo gravitatorio es ω = 5×10^{-4} rad/s. Sabiendo que su energía cinética es de 10^{9} J, calcular la masa del satélite. **(2,5 puntos)**
Datos: $M_T=5,98\times10^{24}$ kg. $G=6,67\times10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Solución

En primer lugar debemos calcular el radio de la órbita. Si el satélite describe una órbita estacionaria, la fuerza centrípeta responsable de su movimiento es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre el satélite:

$$m\omega^2 R = G\frac{mM}{R^2}$$

Despejando obtenemos el radio de la órbita

$$R = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} = 11685 \text{ km}$$

Ahora podemos calcular la masa del satélite a partir de la energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \rightarrow m = \frac{2E_c}{\omega^2 R^2} = 58,6 \text{ kg}$$

► g-40 [m20—B1; *pág.150*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **g-29**

► g'-41 [m01—A1; *pág.2*] (Nota: enunciado parecido al **g-10**)

1. Sabiendo que la Luna tiene una masa M_L, que está situada a una distancia d de la Tierra, y que el campo gravitatorio de la Tierra en la superficie terrestre g_0 es 3600 mayor que el campo gravitatorio terrestre en el centro de la Luna, deducir la expresión de la energía cinética de la Luna en función, exclusivamente, de los datos del enunciado. **(2,5 puntos)**

Solución

La energía cinética de la Luna es

$$E_c = \frac{1}{2}M_L v^2 .$$

Ahora debemos calcular la velocidad *v* con la que orbita, a partir de la relación entre la fuerza gravitatoria y la fuerza centrípeta:

$$G\frac{M_T M_L}{d^2} = M_L\frac{v^2}{d} \quad \rightarrow \quad v = \left(G\frac{M_T}{d}\right)^{1/2} .$$

A partir del enunciado sabemos que

$$G\frac{M_T}{d^2} = \frac{g_0}{3600}$$

De modo que finalmente obtenemos

$$E_c = \frac{1}{2}M_L v^2 = \frac{1}{2}\frac{M_L g_0 d}{3600}$$

► g'-42 [m01—B1; *pág.3*] (Nota: enunciado parecido al **g-09**)

1. Un satélite geoestacionario es aquél cuya posición permanece siempre en la vertical de un determinado punto de la superficie terrestre (más concretamente en la vertical del ecuador). Calcular el radio de la órbita de este tipo de satélites. **(2.5 puntos)**

Datos: $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg. $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm²/kg².

Solución

Al permanecer siempre en la vertical de un determinado punto, los satélites geoestacionarios giran con la misma velocidad angular con la que lo hace la Tierra, es decir, con un periodo *T* de revolución de 24 h (86400 s). Tenemos entonces que

$$G\frac{M_T m}{R^2} = m\frac{v_T^2}{R} = m\omega^2 R = m\frac{4\pi^2}{T^2}R .$$

Despejando *R* obtenemos

$$R = \left(G\frac{T^2 M_T}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 42000 \text{ km}$$

► g'-43 [m02—A1; *pág.9*]

1. Dos satélites idénticos A y B describen órbitas circulares estacionarias de diferente radio $(R_A > R_B)$ alrededor de la Tierra debido a la acción de su campo gravitatorio. Razone cuál de los dos tiene mayor energía cinética, mayor energía potencial y mayor energía total. (2,5 puntos)

Solución

Sabiendo que la fuerza de atracción gravitatoria es la responsable del movimiento orbital tenemos que:

$$G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r},$$

por lo que la energía cinética dependerá directamente del radio de la órbita: menor radio implica mayor energía cinética, así que tendrá mayor energía cinética el satélite B.

La energía potencial tiene la forma general:

$$U = -G\frac{M_T m}{r} + U_0 .$$

Como es negativa, cuanto mayor es el radio orbital mayor es su energía potencial, así que tendrá mayor energía potencial el satélite A.

Finalmente, la energía total, dada por la suma de cinética más potencial, valdrá:

$$E = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r} + U_0 ,$$

y su comportamiento con la distancia es similar al de la energía potencial. De nuevo tendrá mayor energía potencial el satélite A.

► g'-44 [m02—B1; *pág.10*]

1. A una altura *h* con respecto a la superficie de un planeta una persona tiene un cierto peso. Calcular el radio del planeta en función de *h* sabiendo que en su superficie, el peso de la persona se ha duplicado. (Considerar únicamente el campo gravitatorio creado por el planeta) **(2,5 puntos)**

Solución

Los pesos de esa persona se calculan como

$$P = G\frac{M}{(R+h)^2}m$$

$$2P = G\frac{M}{R^2}m$$

Dividiendo ambas expresiones obtenemos

$$2 = \frac{(R+h)^2}{R^2} \quad \rightarrow \quad R = \frac{h}{\sqrt{2}-1}$$

► g'-45 [m03—A1; *pág.17*]

1. La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular estacionaria alrededor de la Tierra por la acción de su campo gravitatorio es ω Sabiendo que la energía mecánica total del satélite dentro del campo gravitatorio creado por la Tierra es *E* (donde para la energía potencial se ha tomado como origen de energía un punto infinitamente alejado del centro terrestre), calcular la masa del satélite en función de los datos del problema, *G* y la masa de la Tierra M_T. **(2,5 puntos)**

Solución

En primer lugar debemos calcular el radio de la órbita. Si el satélite describe una órbita estacionaria, la fuerza centrípeta responsable de su movimiento es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre el satélite:

$$m\omega^2 R = G\frac{mM_T}{R^2}$$

Despejando obtenemos el radio de la órbita

$$R = \left(\frac{GM_T}{\omega^2}\right)^{1/3}$$

Ahora podemos calcular la masa del satélite a partir de su energía total:

$$E = E_c + U = -G\frac{M_T m}{2R} \quad \rightarrow \quad m = -\frac{2RE}{GM_T} = -\frac{2E}{(\omega GM_T)^{2/3}}$$

► g'-46 [m03—B1; *pág.18*]

1. La intensidad del campo gravitatorio terrestre en la superficie de la Tierra es $g_0 = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$. Calcular la intensidad del campo terrestre a una distancia *d* del centro de la Tierra dada por $d = 6R_T$, siendo R_T el radio terrestre. **(2 puntos)**

Solución

El campo gravitatorio en esta distancia será

$$g(d) = G\frac{M_T}{d^2} = G\frac{M_T}{(6R_T)^2} = \frac{1}{36}g_0 = 0{,}27\ \mathrm{m/s^2}$$

► g'-47 [m04—A1; *pág.25*]

1. Un astronauta de 80 kg se encuentra en un globo espacial en reposo con respecto a la Tierra. Sabiendo que en el globo tiene un peso de 640 N, calcular la distancia del globo al centro del planeta. **(2,5 puntos)**

Datos: $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg. $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm²/kg².

Solución

A partir del peso del astronauta calculamos el campo gravitatorio a esa distancia de la Tierra:

$$P = mg \quad \rightarrow \quad g = \frac{P}{m} = 8 \text{ m/s}^2$$

Ahora es fácil calcular la distancia a la que se encuentra el globo:

$$g = G\frac{M_T}{R^2} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{GM_T}{g}} = 7061 \text{ km}$$

► g'-48 [m04—B1; *pág.26*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **g'-41**

► g'-49 [m05—A1; *pág.32*]

1. Una estación espacial se encuentra en reposo con respecto al Sol a una distancia *R*.

-Sabiendo que en el punto en el que se encuentra la estación la velocidad de escape del campo gravitatorio solar es de 30 km/s, calcular *R*. **(1,5 puntos)**

-Desde la estación se quiere lanzar una sonda para que orbite en torno al Sol siguiendo una trayectoria circular estacionaria. Determine la velocidad angular que debe tener la sonda. **(1,5 puntos)**

Datos: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm²/kg². $M_{Sol} = 2.0 \times 10^{30}$ kg.

Solución

La velocidad de escape es

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_S}{R}}$$

Despejando obtenemos la distancia a la que se encuentra la estación espacial

$$R = \frac{2GM_S}{v_e^2} = 2{,}96 \times 10^{11} \text{ m}$$

El movimiento orbital de la sonda debe satisfacer la relación

$$G\frac{M_S m}{R^2} = m\omega^2 R \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{GM_S}{R^3}} = 7{,}16 \times 10^{-8} \text{ rad/s}$$

► g'-50 [m05—B1; *pág.33*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **g'-46**

► g'-51 [m06—A1; pág.40]

1. La velocidad angular con la que un satélite de 100 kg de masa describe una órbita circular estacionaria en torno al planeta Venus es $\omega = 10^{-4}$ rad/s.
-Calcular la energía total que tiene el satélite durante la órbita. Considerar que el origen de energía potencial se encuentra en un punto infinitamente alejado. **(2 puntos)**
-¿Qué energía sería necesaria para cambiar a otra órbita circular con velocidad angular $\omega = 10^{-5}$ rad/s? **(1 punto)**
Datos: $M_{\text{Venus}} = 5\times10^{24}$ kg. $G = 6,67\times10^{-11}$ Nm²/kg².

Solución

La energía potencial del satélite viene dada por la expresión $U = -\dfrac{GM_T m}{R} + U_0$, donde U_0 es una constante que depende del origen de energía potencial considerado. Si suponemos, por ejemplo, que $U = 0$ cuando $r = \infty$, tenemos entonces que $U_0 = 0$. Por otro lado la energía cinética se calcula a partir de

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{M_T m}{R^2} \quad \rightarrow \quad E_c = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{M_T m}{2R} \ .$$

Sumando ambas energías obtenemos que la energía total del satélite es:

$$E = E_c + U = -G\frac{M_{\text{Venus}} m}{2R} .$$

Ahora debemos calcular el radio de la órbita a partir del dato de la velocidad angular

$$G\frac{M_{\text{Venus}} m}{R^2} = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R \quad \rightarrow \quad R = \left(G\frac{M_{\text{Venus}}}{\omega^2}\right)^{1/3} .$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación anterior llegamos a

$$E = -G\frac{M_{\text{Venus}} m}{2\left(\dfrac{GM_{\text{Venus}}}{\omega^2}\right)^{1/3}} = -\frac{m}{2}\left(GM_{\text{Venus}}\omega\right)^{2/3}$$

En la órbita inicial la energía del satélite será $E_1 = -5,2\times10^8$ J, mientras que en la órbita final la energía será $E_2 = -1,1\times10^8$ J. La diferencia de energías entre las dos órbitas será precisamente la energía que deberá suministrarse al satélite:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 4,1\times10^8 \text{ J} .$$

► g'-52 [m06—B1; pág.41]

1. Sabiendo que la gravedad en la superficie de la Luna es 1/5 de la terrestre (siendo ésta $g_0 = 9,81$ m/s²), calcular la velocidad de escape de la Luna sabiendo que la velocidad de escape en la Tierra es de 11,2 km/s y que la relación entre los radios terrestre y lunar es de $R_T = 3,67\times R_L$. **(2.5 puntos)**

Solución

La velocidad de escape en la Luna es

$$v_L{}^2 = G\frac{2M_L}{R_L} = 2g_{0L}R_L$$

y en la Tierra

$$v_T{}^2 = G\frac{2M_T}{R_T} = 2g_{0T}R_T$$

Dividiendo ambas ecuaciones obtenemos que

$$v_L{}^2 = v_T{}^2\frac{g_{0L}}{g_{0T}}\frac{R_L}{R_T} = \frac{v_T{}^2}{5\times 3,67} \quad\Rightarrow\quad v_L = 2,61\ \mathrm{km/s}$$

► g'-53 [m07—A1; *pág.48*]

Errata: en última línea enunciado debería decir "por nuestro planeta"

1. Supongamos que sólo conocemos el valor de la constante de gravitación universal *G*, el radio de la órbita de la Luna alrededor de la tierra *R* y el periodo de su órbita *T*.
- ¿Cuánto vale la masa de la Tierra en función de estos datos? **(1,5 puntos)**
-¿Qué dato nos faltará para poder calcular la energía mecánica total de la Luna dentro del campo gravitatorio creado por nuestro satélite? **(1,5 puntos)**

Solución

La fuerza de atracción gravitatoria que la Tierra ejerce sobre la Luna es la responsable del movimiento de rotación de la última sobre la primera. Podemos escribir por tanto que

$$G\frac{M_T m_L}{R^2} = m_L\omega^2 R = m_L\frac{4\pi^2}{T^2}R\,.$$

Despejando M_T obtenemos que $M_T = \dfrac{4\pi^2}{GT^2}R^3$.

La energía total de nuestro satélite será (hemos tomado el origen de energía potencial en el infinito)

$$E = E_c + U = -G\frac{M_T m_L}{2R}\,.$$

Es evidente que nos faltará la masa de la luna.

► g'-54 [m07—B1; *pág.50*]

1. La intensidad del campo gravitatorio terrestre en la superficie de la Tierra es $g_0 = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$. Calcular la intensidad del campo gravitatorio generado por la Luna en su propia superficie sabiendo que el radio terrestre es 3,7 veces mayor que el lunar, y que la masa de la Tierra es 81,4 veces la masa de la Luna. **(2 puntos)**

Solución

El campo gravitatorio en la superficie de la Luna valdrá

$$g_L = G\frac{M_L}{R_L{}^2} = G\frac{(3,7)^2\times M_T}{81,4\times R_T{}^2} = \frac{(3,7)^2}{81,4}g_T = 1,65\ \mathrm{m/s^2}$$

► **g'-55** [m08—A1; *pág.56*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **g'-42**

► **g'-56** [m08—B1; *pág.57*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **g'-43**

► **g'-57** [m09—A1; *pág.62*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **g'-44**

► **g'-58** [m09—B1; *pág.63*]

1. La distancia media entre la Tierra y el Sol es de 150×10^9 m. Supongamos que nos encontramos en la superficie terrestre, calcular el cociente entre la velocidad con la que debemos lanzar un objeto para superar el campo gravitatorio terrestre y la velocidad que debe tener el mismo objeto lanzado desde el mismo punto para escapar del campo gravitatorio del Sol. **(2,5 puntos)**

Datos: $G = 6,67\times10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$. $M_\mathrm{T} = 5,98\times10^{24}$ kg. $M_\mathrm{Sol} = 2,0\times10^{30}$ kg.
$R_\mathrm{T} = 6370$ km.

Solución

La velocidad de escape es

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Calculamos la velocidad de escape con respecto a la Tierra en un punto de su superficie

$$v_{e,\mathrm{Tierra}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11,2\ \mathrm{km/s}$$

Calculamos la velocidad de escape con respecto al Sol en un punto de la Tierra (obsérvese que como el radio terrestre es mucho menor que la distancia media del Sol a la Tierra , el resultado no variará con el punto en particular de la superficie que se considere, la Tierra puede ser vista como un punto)

$$v_{e,\mathrm{Sol}} = \sqrt{\frac{2GM_S}{d_{T-S}}} = 42,2\ \mathrm{km/s}$$

Vemos que la velocidad de escape del campo solar es más de 3,8 veces mayor que la del campo terrestre.

► **g'-59** [m10—A1; *pág.70*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **g'-53**

► **g'-60** **[m10—B1; *pág.71*]** (Nota: enunciado parecido al **g'-52**)

1. La velocidad de escape del campo gravitatorio terrestre en la superficie de la Tierra es $v_e = 11,2$ m/s. Calcular la velocidad de escape del campo gravitatorio lunar en la superficie de la Luna, sabiendo que el radio terrestre es 3,7 veces mayor que el lunar, y que la masa de la Tierra es 81,4 veces la masa de la Luna. **(2 puntos)**

Solución

La velocidad de escape en la superficie lunar será

$$v_{e,L} = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{3,7}{81,4}}\sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{3,7}{81,4}}v_{e,T} = 2,4 \text{ m/s}^2$$

► **g'-61** **[m11—A1; *pág.78*]**

El enunciado de este problema es idéntico al del **g'-52**

► **g'-62** **[m11—B1; *pág.79*]**

El enunciado de este problema es idéntico al del **g'-47**

► **g'-63** **[m12—A1; *pág.87*]**

El enunciado de este problema es idéntico al del **g'-49**

► **g'-64** **[m12—B1; *pág.88*]**

El enunciado de este problema es idéntico al del **g'-60**

► **g'-65** **[m13—A1; *pág.95*]**

1. La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular estacionaria alrededor de la Tierra por la acción de su campo gravitatorio es ω Sabiendo que la energía mecánica total del satélite dentro del campo gravitatorio creado por la Tierra es *E* (donde para la energía potencial se ha tomado como origen de energía un punto infinitamente alejado del centro terrestre), calcular la masa del satélite en función de los datos del problema, *G* y la masa de la Tierra M_T. **(2,5 puntos)**

Solución

En primer lugar debemos calcular el radio de la órbita. Si el satélite describe una órbita estacionaria, la fuerza centrípeta responsable de su movimiento es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre el satélite:

$$m\omega^2 R = G\frac{mM_T}{R^2}$$

Despejando obtenemos el radio de la órbita

$$R = \left(\frac{GM_T}{\omega^2}\right)^{1/3}$$

Ahora podemos calcular la masa del satélite a partir de su energía total:

$$E = E_c + U = -G\frac{M_T m}{2R} \quad \rightarrow \quad m = -\frac{2RE}{GM_T} = -\frac{2E}{\left(\omega G M_T\right)^{2/3}}$$

► **g'-66** [m13—B1; *pág.96*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **g'-58**

► **g'-67** [m14—A1; *pág.104*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **g'-54**

► **g'-68** [m14—B1; *pág.105*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **g'-51**

► **g'-69** [m15—A1; *pág.113*]

1. El planeta A tiene una masa 200 veces mayor que el planeta B y su radio es 10 veces también mayor. Calcular el peso de una persona de 80 kg en la superficie del planeta A sabiendo que en la superficie del planeta B pesa 880 N. **(2,5 puntos)**

Solución

Del último dato del enunciado deducimos la gravedad en la superficie de B

$$g_B = \frac{P_B}{m} = 11 \text{ m/s}^2$$

Por otro lado, la intensidad del campo gravitatorio de A en su superficie es

$$g_A = G\frac{M_A}{R_A^2} = \frac{200}{10^2} g_B = 22 \text{ km/s}^2 ,$$

De modo que el peso de la persona será el doble, esto es, 1760 N.

► **g'-70** [m15—B1; *pág.114*] (Nota: enunciado parecido al **g-06**)

1. Sabiendo que el radio medio de la órbita de Marte es 1,52 veces el radio medio de la órbita de la Tierra, ¿cuál será el periodo de la órbita de Marte? Suponer que las órbitas son circulares. **(2 puntos)**

Solución

Según la tercera Ley de Kepler, el cuadrado del periodo orbital de un planeta es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica o distancia media. Aplicando la ley tenemos

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} \quad \rightarrow \quad T_2 = T_1 \left(R_2 / R_1 \right)^{3/2} = 1,87 \text{ años}$$

► g'-71 [m16—A1; *pág.121*]

1. En qué punto o puntos de la línea que pasa por los centros de la Tierra y la Luna, los módulos de los campos gravitatorios creados por ambos astros se igualan. Realizar un diagrama en el que figuren los dos astros así como el punto, o los puntos, obtenidos. Indicar en cada punto el vector campo gravitatorio producido por cada astro. **(2,5 puntos)**

Datos: $M_T = 81 \times M_L$. $d_{\text{Tierra-Luna}} = 3,84 \times 10^8$ m.

Solución

Tomemos como origen de nuestro sistema de referencia la Tierra. El eje X está dado por la dirección de la recta que pasa por los centros de la Tierra y la Luna, con el sentido positivo apuntando hacia la Luna.

El módulo del campo gravitatorio creado por la Tierra será

$$g_T = G \frac{M_T}{x^2}$$

El módulo del campo gravitatorio creado por la Luna será

$$g_L = G \frac{M_L}{\left(x - d_{T-L} \right)^2}$$

Igualando ambas expresiones obtenemos

$r = 3,46 \times 10^8$ m (punto situado entre la Tierra y la Luna)

$r = 4,32 \times 10^8$ m (más allá de la Luna)

► g'-72 [m16—B1; *pág.122*]

1. Un satélite describe una órbita circular estacionaria de 1 hora de periodo y radio 5000 km alrededor de un planeta debido a la acción de su campo gravitatorio. Calcular el módulo del campo gravitatorio que actúa sobre el satélite utilizando exclusivamente los datos del enunciado. **(2,5 puntos)**

Solución

No podemos calcular directamente el módulo del campo gravitatorio que actúa sobre el satélite ya que nos faltan los datos de la masa del planeta y la constante G. Sin embargo, sabemos que la fuerza gravitatoria que actúa sobre el satélite es igual a la fuerza centrípeta responsable del movimiento circular. Así pues tenemos que:

$$G \frac{Mm}{R^2} = m \frac{v^2}{R} \quad \rightarrow \quad G \frac{M}{R^2} = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R = 15,23 \text{ N/kg}.$$

► g'-73 [m17—A1; *pág.128*]

1. Un satélite de 100 kg de masa describe una órbita circular estacionaria de 1 hora y radio 5000 km alrededor de un planeta debido a la acción de su campo gravitatorio. Calcular la energía cinética, la energía potencial y la energía total del satélite utilizando exclusivamente los datos del enunciado. Tomar como origen de energía potencial un punto infinitamente alejado del planeta. **(2,5 puntos)**

Solución

Podemos calcular directamente la energía cinética a partir de los datos del enunciado:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2R^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R^2 = 3{,}81\times10^9 \text{ J}.$$

Sin embargo, no podemos calcular directamente ni la energía potencial ni la energía total ya que nos faltan los datos de la masa del planeta y la constante G. Para calcular estas energías podemos relacionarlas con la energía cinética utilizando las expresiones deducidas del movimiento orbital bajo la acción de un campo gravitatorio. Sabemos que

$$E_c = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}.$$

También sabemos que la energía potencial tiene la forma:

$$U = -G\frac{Mm}{r},$$

de modo que tendremos

$$U = -G\frac{Mm}{r} = -2E_c = -7{,}62\times10^9 \text{ J}.$$

Finalmente, para la energía total tenemos

$$E = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} = -E_c = -3{,}81\times10^9 \text{ J}$$

► g'-74 [m17—B1; *pág.129*]

1. Supongamos que nos encontramos en la superficie de la Tierra. ¿Con qué velocidad deberíamos lanzar horizontalmente un objeto para que, despreciando cualquier tipo de rozamiento, diera la vuelta a la Tierra y nos golpease en la espalda? **(2,5 puntos)**

Utilizar exclusivamente los siguientes datos: $g_0 = 9{,}81 \text{ m/s}^2$. $R_T = 6370 \text{ km}$.

Solución

Para que esto ocurra el objeto debería describir una órbita en la superficie de la Tierra bajo la acción de su campo gravitatorio. Por lo tanto

$$G\frac{M_T m}{R_T^2} = m\frac{v^2}{R_T} \quad \rightarrow \quad v = (g_0 R_T)^{1/2} = 7{,}9 \text{ km/s}.$$

► g'-75 [m18—A1; *pág.137*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **g'-69**

► **g'-76** [m18—B1; *pág.138*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **g'-72**

► **g'-77** [m19—A1; *pág.144*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **g'-73**

► **g'-78** [m19—B1; *pág.145*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **g'-70**

► **g'-79** [m20—A1; *pág.153*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **g'-71**

► **g'-80** [m20—B1; *pág.154*]

El enunciado de este problema es idéntico al del **g'-74**